中国科学: 数学　2026 年　第 56 卷　第 7 期: 1295～1308
SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

CrossMark
click for updates

论　文

零素矩阵合冲模计算的高效算法

鲁东[1], 王定康[2,3], 肖方慧[4], 郑晓鹏[5*]

1. 西南交通大学数学学院, 成都 610031;
2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 数学科学全国重点实验室, 北京 100190;
3. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049;
4. 湖南师范大学数学与统计学院, 计算与随机数学教育部重点实验室, 长沙 410081;
5. 汕头大学数学与计算机学院, 汕头 515821

E-mail: donglu@swjtu.edu.cn, dwang@mmrc.iss.ac.cn, xiaofanghui@hunnu.edu.cn, xiaopengzheng@stu.edu.cn

收稿日期: 2025-03-06; 接受日期: 2025-04-30; 网络出版日期: 2025-05-22; * 通信作者

国家重点研发计划 (批准号: 2020YFA0712300)、国家自然科学基金 (批准号: 12171469 和 12201210)、四川省科技计划 (批准号: 2024NSFSC0418)、中央高校基本科研业务费 (批准号: 2682024ZTPY052) 和汕头大学科研启动经费 (批准号: NTF24023T) 资助项目

摘要　本文提出一种计算多元多项式环上零素矩阵合冲模的一组生成元集的新方法. 该方法的核心思想在于, 首先计算零素矩阵的所有最大阶子式, 继而根据特定规则对其进行排列以构造生成元集. 通过实例验证该方法的有效性, 并基于此设计计算零素矩阵合冲模的新算法. 该算法已在计算机代数系统 Maple 上实现, 相较于经典的 Gröbner 基方法, 实验数据表明新算法在效率方面具有显著优势.

关键词　零素矩阵　合冲模　Gröbner 基　生成元集

MSC (2020) 主题分类　15A24, 13P15, 13P10

1　引言

令 F 是多项式环 $K[x_1,\dots,x_n]$ 上的一个 $l\times m$ 阶多项式矩阵, 其中 K 是数域, $x_1,\dots,x_n$ 是 n 个变元. 集合

$$\mathrm{Syz}(F) := \{\vec{u}\in K[x_1,\dots,x_n]^{m\times 1} \mid F\vec{u}=\vec{0}\}$$

是一个 $K[x_1,\dots,x_n]$- 模, 被称为 F 的 (右) 合冲模. 多项式矩阵合冲模的计算理论在符号计算、计算机辅助几何设计等相关领域有着广泛的应用. 例如, 著名的 Hilbert 合冲定理描述了每个有限生成 $K[x_1,\dots,x_n]$- 模均存在一个长度至多为 n 的有限自由分解 [7], 而自由分解常被用来研究多项式环上射影代数簇所对应的齐次理想; Cox 等 [3]、Sederberg 和 Chen [14] 将合冲模理论与计算几何中的动曲线曲面理论相结合, 提出了极具影响力的曲线曲面 μ 基理论, 使得代数几何消元理论中有理参数曲线

英文引用格式: Lu D, Wang D K, Xiao F H, et al. An efficient algorithm for computing syzygy modules of zero prime matrices (in Chinese). Sci Sin Math, 2026, 56: 1295–1308, doi: 10.1360/SSM-2025-0054

　

曲面隐式化问题的研究取得了突破性进展. 由此可知, 理解多项式矩阵合冲模的计算方法至关重要, 且相关研究已取得重要进展 (参见文献 [2,4,9]). 值得注意的是, 多项式矩阵合冲模的计算问题虽在形式上可类比于线性代数中的线性方程组求解, 但二者的求解方法存在本质差异.

当 $n=1$ 时, Huang 和 Chen [8] 借助单变元多项式环 $K[x_1]$ 中的 Euclid 除法获得了单变元多项式矩阵合冲模的一组生成元集. 但当 $n \geqslant 2$ 时, 上述 Euclid 除法失效, 本质原因在于多元多项式环 $K[x_1,\ldots,x_n]$ 不再是主理想整环. 在此情形下, 由奥地利科学家 Buchberger [1] 提出的 Gröbner 基为多元多项式矩阵合冲模的计算提供了一种通用型计算工具. 然而, Gröbner 基算法的计算复杂度是双指数型, 深受多项式的变元个数和全次数的影响 [11,12], 当问题的规模较大时, 该算法无法快速输出正确结果. 这表明, 针对特定类型的多元多项式矩阵, 利用其自身具有的特殊性质设计其合冲模的高效计算方法, 具有重要的理论价值与实践意义.

本文聚焦于零素矩阵合冲模的计算问题研究. 零素矩阵作为交换代数和符号计算领域中一类具有特殊性质的多项式矩阵, 一个与之相关的重要结论是 Quillen-Suslin 定理 [13,16]. 该定理揭示了多项式环上的任意零素矩阵均能被扩充成幺模矩阵, 并由此解决了著名的 Serre 猜想 [15]— 该猜想断言多项式环上的有限生成投射模必为自由模. 由此可见, 研究零素矩阵不仅有助于深化对其性质的理解, 更可能催生新理论体系的构建. 接下来, 本文尝试通过利用零素矩阵的最大阶子式构造其合冲模的一组生成元集.

本文余下内容结构如下. 第 2 节介绍与零素矩阵相关的一些基本概念. 第 3 节提出计算零素矩阵合冲模的新方法. 第 4 节设计新算法, 并通过实验来对比其与 Gröbner 基方法的计算效率. 第 5 节给出本文结论.

2 符号说明与定义

令 K 是一个数域, $R=K[x_1,\ldots,x_n]$ 是系数在 K 中且变元为 $x_1,\ldots,x_n$ 的多元多项式环. 已知 $f_1,\ldots,f_s \in R$, 则 $\gcd(f_1,\ldots,f_s)$ 表示 $f_1,\ldots,f_s$ 的最大公因子. 令 $R^{l\times m}$ 是由元素在 R 中的所有 $l\times m$ 阶多项式矩阵构成的集合. 不失一般性, 全文假设 $l<m$. 令 $A\in R^{l\times m}$, 本文用 $\mathrm{rank}(A)$, A^{T} 和 $d_l(A)$ 分别表示 A 的秩、转置及所有 $l\times l$ 阶子式的最大公因子.

首先介绍本文最重要的一个概念.

定义 2.1 [19] 令 $A\in R^{l\times m}$ 是一个行满秩多项式矩阵. 若 A 的所有 $l\times l$ 阶子式生成单位理想 R, 则 A 被称为零左素矩阵.

假设 $B\in R^{m\times l}$ 是一个列满秩多项式矩阵, 可类似地定义 B 为零右素矩阵.

例 2.1 已知

$$A=\begin{pmatrix} x_1-1 & -1 & x_2+1 \\ 3 & 0 & x_3-2 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]^{2\times 3}$ 中的多项式矩阵, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域. 经计算可得, A 的所有 2×2 阶子式分别为 3, $x_1x_3-2x_1-3x_2-x_3-1$, $-x_3+2$. 因为 A 的 2×2 阶子式中存在非零常数, 所以生成单位理想 $\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]$, 从而 A 是一个零左素矩阵.

容易验证一个多项式矩阵 $A\in R^{l\times m}$ 是否为零左素矩阵. 令 $I\subseteq R$ 是由 A 的所有 $l\times l$ 阶子式生成的多项式理想, 计算 I 关于某个单项式序的约化 Gröbner 基 G. 若 $G=\{1\}$, 则 A 是零左素矩阵; 否则不是.

为契合本文研究需求, 现如下重新定义按特定规则排列的多项式矩阵最大阶子式.

定义 2.2　令 $C \in R^{l\times(l+1)}$ 是一个行满秩多项式矩阵, $C_i \in R^{l\times l}$ 是 C 去掉其第 i 列后构成的子方阵, 其中 $i = 1, \dots, l+1$, 则

$$\det(C_1), \det(C_2), \dots, \det(C_{l+1})$$

被称为 C 的正则子式.

接下来介绍合冲模生成元集的概念.

定义 2.3 [2]　令 $F \in R^{l\times m}$ 是一个多项式矩阵, $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s\}$ 是 $R^{m\times 1}$ 中的一个有限集合, 则 $\mathcal{G}$ 被称为合冲模 $\mathrm{Syz}(F)$ 的一组生成元集当且仅当 $\mathrm{Syz}(F) = \langle \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s\rangle$, 即 $\mathrm{Syz}(F)$ 由 $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s$ 生成.

已知 $D \in K^{l\times m}$ 且 $Y = (y_1, \dots, y_m)^{\mathrm{T}} \in K^{m\times 1}$, 线性代数中的一个经典结论是线性方程组 $DY = \vec{0}$ 解空间的秩为 $m - \mathrm{rank}(D)$. 此结论同样适用于多元多项式矩阵情形.

引理 2.1 [10]　假设 $F \in R^{l\times m}$ 是一个秩为 r 的多项式矩阵, 则 $\mathrm{Syz}(F)$ 的秩为 $m - r$.

3　零素矩阵合冲模计算的新方法

本节提出一种计算零素矩阵合冲模生成元集的新方法.

在线性代数中, 数域 K 上的任意两个线性相关的向量均可相互线性表示, 但此结论对于多项式环上的向量而言一般不成立. 例如, 已知 $\vec{u} = (x_1, x_1(x_2+1))$ 和 $\vec{v} = (x_3, x_3(x_2+1))$ 是多项式环 $K[x_1, x_2, x_3]$ 上的两个向量. 根据方程

$$x_3\vec{u} - x_1\vec{v} = \vec{0}$$

可知 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 在 $K[x_1, x_2, x_3]$ 上是线性相关的, 但易证不存在 $g \in K[x_1, x_2, x_3]$ 或 $h \in K[x_1, x_2, x_3]$ 使得 $\vec{u} = g\vec{v}$ 或 $\vec{v} = h\vec{u}$. 接下来给出上述结论在多项式环上部分成立的充分条件.

引理 3.1　已知 $\vec{u} = (u_1, \dots, u_s)$ 和 $\vec{v} = (v_1, \dots, v_s)$ 是多项式环 R 上两个线性相关的非零向量. 若 $\gcd(u_1, \dots, u_s) = 1$, 则存在多项式 $h \in R$ 使得 $\vec{v} = h\vec{u}$.

证明　因为非零向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 在多项式环 R 上线性相关, 所以存在多项式 $h_1, h_2 \in R \setminus \{0\}$ 使得

$$h_1\vec{u} + h_2\vec{v} = \vec{0}. \tag{3.1}$$

不失一般性, 假设 h_1 与 h_2 互素 (若不互素, 则对 (3.1) 等式两边同时除以 h_1 与 h_2 的最大公因子, 即可得到一对互素的多项式 h_1' 与 h_2'). 由 (3.1) 可得

$$v_i = -\frac{h_1}{h_2} \cdot u_i, \quad 其中\ i = 1, \dots, s. \tag{3.2}$$

由于 $v_i \in R$ 且 $\gcd(h_1, h_2) = 1$, 因此 $h_2 \mid u_i$, 其中 $i = 1, \dots, s$. 因为 $\gcd(u_1, \dots, u_s) = 1$, 所以 h_2 是 R 中的非零常数. 不妨令 $h = -\frac{h_1}{h_2}$, 则 $h \in R$ 且 $\vec{v} = h\vec{u}$. □

基于引理 3.1, 可构造任意一个 $l \times (l+1)$ 阶行满秩多项式矩阵合冲模的一组生成元集.

定理 3.1　已知 $C \in R^{l\times(l+1)}$ 是一个行满秩多项式矩阵, 且 $e_1, \dots, e_{l+1} \in R$ 是 C 的正则子式. 则

$$\mathrm{Syz}(C) = \left\langle \frac{1}{d_l(C)} \cdot ((-1)^1 e_1, \dots, (-1)^i e_i, \dots, (-1)^{l+1} e_{l+1})^{\mathrm{T}} \right\rangle.$$

证明 令 $\vec{c_j}=(c_{j1},\ldots,c_{j(l+1)})$ 是 C 的第 j 个行向量, 其中 $j=1,\ldots,l$. 对于 C 的每个行向量 $\vec{c_j}$, 构造如下 $(l+1)\times(l+1)$ 阶多项式矩阵:

$$D_j=\begin{pmatrix}\vec{c_j}\\ C\end{pmatrix}.$$

由 Laplace 展开定理可知, 对于每一个 j 均有

$$\det(D_j)=\sum_{i=1}^{l+1}c_{ji}\cdot((-1)^{1+i}e_i)=(-1)\cdot\left\{\sum_{i=1}^{l+1}c_{ji}\cdot(-1)^ie_i\right\}=0. \tag{3.3}$$

令 $\vec{e}=((-1)^1e_1,\ldots,(-1)^ie_i,\ldots,(-1)^{l+1}e_{l+1})^{\mathrm{T}}$, 则由 (3.3) 可推导出

$$C\cdot\vec{e}=\vec{0},$$

这表明 $\vec{e}\in\mathrm{Syz}(C)$. 于是, $\frac{\vec{e}}{d_l(C)}\in\mathrm{Syz}(C)$. 因为 $e_1,\ldots,e_{l+1}$ 是 C 的正则子式, 所以

$$\gcd\left(\frac{e_1}{d_l(C)},\ldots,\frac{e_{l+1}}{d_l(C)}\right)=1.$$

根据引理 2.1 可知 $\mathrm{Syz}(C)$ 的秩为 1. 若 $\vec{v}\in\mathrm{Syz}(C)$, 则根据引理 3.1 可得, 存在多项式 $h\in R$ 使得

$$\vec{v}=h\cdot\frac{\vec{e}}{d_l(C)}.$$

因此, $\mathrm{Syz}(C)=\langle\frac{\vec{e}}{d_l(C)}\rangle$. □

注 3.1 一般情形下, 多元 $(n\geqslant 3)$ 多项式矩阵的合冲模不是自由模. 但由定理 3.1 可知, $\mathrm{Syz}(C)$ 是一个秩为 1 的自由模, 且其一组生成元集可直接由 C 的正则子式除以 $d_l(C)$ 后得到. 若上述定理中的 C 是零左素矩阵, 则 $d_l(C)=1$. 定理 3.1 与线性代数中著名的 Cramer 法则类似.

假设 $F\in R^{l\times m}$ 是一个零左素矩阵. 为获得 $\mathrm{Syz}(F)$ 的一组生成元集, 本文采取以下步骤.

首先, 构造如下集合:

$$\mathfrak{J}:=\{\vec{j}=(j_1,\ldots,j_{l+1})\in\mathbb{Z}^{l+1}\mid 1\leqslant j_1<\cdots<j_{l+1}\leqslant m\},$$

其中 $\mathfrak{J}$ 中元素的个数为 $\binom{m}{l+1}$.

其次, 对于 $\mathfrak{J}$ 中的每一个元素 $\vec{j}=(j_1,\ldots,j_{l+1})$, 令 $F^{(\vec{j})}\in R^{l\times(l+1)}$ 是由 F 的第 $j_1,j_2,\ldots,j_{l+1}$ 列构成的 $l\times(l+1)$ 阶子矩阵, 且 $e_1^{(\vec{j})},\ldots,e_{l+1}^{(\vec{j})}$ 为 $F^{(\vec{j})}$ 的正则子式. 令

$$\vec{e}^{(\vec{j})}=((-1)^1e_1^{(\vec{j})},\ldots,(-1)^ie_i^{(\vec{j})},\ldots,(-1)^{l+1}e_{l+1}^{(\vec{j})})^{\mathrm{T}}.$$

则根据定理 3.1, 可得 $\vec{e}^{(\vec{j})}\in\mathrm{Syz}(F^{(\vec{j})})$.

接着, 考虑如下从 $R^{(l+1)\times 1}$ 到 $R^{m\times 1}$ 的同态映射:

$$\phi_{\vec{j}}:\begin{pmatrix}(-1)^1e_1^{(\vec{j})}\\ \vdots\\ (-1)^{l+1}e_{l+1}^{(\vec{j})}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ (-1)^1e_1^{(\vec{j})}\quad(\text{第 } j_1 \text{ 行})\\ 0\\ \vdots\\ (-1)^{l+1}e_{l+1}^{(\vec{j})}\quad(\text{第 } j_{l+1} \text{ 行})\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix}.$$

显然 $\phi_{\vec{j}}(\vec{e}^{(\vec{j})})\in\mathrm{Syz}(F)$, 其中 $\vec{j}\in\mathfrak{J}$.

最后, 本文证明 $\{\phi_{\vec{j}}(\vec{e}^{(\vec{j})})\mid\vec{j}\in\mathfrak{J}\}$ 是 $\mathrm{Syz}(F)$ 的一组生成元集.

定理 3.2　已知 $F\in R^{l\times m}$ 是一个零左素矩阵, 则 $\mathcal{S}=\{\phi_{\vec{j}}(\vec{e}^{(\vec{j})})\mid\vec{j}\in\mathfrak{J}\}$ 是 $\mathrm{Syz}(F)$ 的一组生成元集.

证明　只需要验证 $\mathrm{Syz}(F)\subseteq\langle\mathcal{S}\rangle$ 即可. 不失一般性, 假设 $A\in R^{l\times l}$ 是由 F 的前 l 个列向量构成的子方阵. 令

$$\mathfrak{K}:=\{(1,\ldots,l,k)\in\mathbb{Z}^{l+1}\mid l+1\leqslant k\leqslant m\},$$

则 $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{J}$. 对于任意满足 $\vec{v}\in\mathrm{Syz}(F)$ 的向量 $\vec{v}=(v_1,\ldots,v_m)^{\mathrm{T}}\in R^{m\times 1}$, 接下来证明

$$\det(A)\cdot\vec{v}\in\langle\{\phi_{\vec{j}}(\vec{e}^{(\vec{j})})\mid\vec{j}\in\mathfrak{K}\}\rangle.\tag{3.4}$$

若 $\det(A)=0$, 则 (3.4) 显然成立. 因此, 以下考虑 $\det(A)\neq 0$ 的情形. 令

$$F=\begin{pmatrix}f_{11}&\cdots&f_{1l}&\cdots&f_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\ f_{l1}&\cdots&f_{ll}&\cdots&f_{lm}\end{pmatrix}\quad\text{且}\quad A^*=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{l1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{1l}&\cdots&a_{ll}\end{pmatrix},$$

其中 A^* 是 A 的伴随矩阵, 且 a_{st} 是 f_{ts} 的代数余子式, 整数 s 和 t 满足 $1\leqslant s,t\leqslant l$. 对于每一个向量 $\vec{j}^{(k)}=(1,\ldots,l,k)\in\mathfrak{K}$, 构造如下多项式矩阵:

$$F^{(\vec{j}^{(k)})}=\begin{pmatrix}f_{11}&\cdots&f_{1l}&f_{1k}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ f_{l1}&\cdots&f_{ll}&f_{lk}\end{pmatrix}.$$

令 $e_1^{(\vec{j}^{(k)})},\ldots,e_{l+1}^{(\vec{j}^{(k)})}$ 是 $F^{(\vec{j}^{(k)})}$ 的正则子式, 且

$$\vec{e}^{(\vec{j}^{(k)})}=\big((-1)^1e_1^{(\vec{j}^{(k)})},\ldots,(-1)^ie_i^{(\vec{j}^{(k)})},\ldots,(-1)^{l+1}e_{l+1}^{(\vec{j}^{(k)})}\big)^{\mathrm{T}}.$$

根据定理 3.1 可知 $\vec{e}^{(\vec{j}^{(k)})} \in \mathrm{Syz}(F^{(\vec{j}^{(k)})})$. 令 $a_0 = \det(A)$, 则有 $a_0 = e_{l+1}^{(\vec{j}^{(k)})}$, 其中 $k = l+1, \dots, m$. 此外, 容易验证

$$A^* \cdot F = \begin{pmatrix} a_0 & & & & (-1)^{l-1} e_1^{(\vec{j}^{(l+1)})} & \cdots & (-1)^{l-1} e_1^{(\vec{j}^{(m)})} \\ & a_0 & & & (-1)^{l-2} e_2^{(\vec{j}^{(l+1)})} & \cdots & (-1)^{l-2} e_2^{(\vec{j}^{(m)})} \\ & & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_0 & (-1)^{0} e_l^{(\vec{j}^{(l+1)})} & \cdots & (-1)^{0} e_l^{(\vec{j}^{(m)})} \end{pmatrix}.$$

根据 $A^* \cdot F \cdot \vec{v} = \vec{0}$ 可得

$$\begin{cases} a_0 v_1 + (-1)^{l-1} e_1^{(\vec{j}^{(l+1)})} v_{l+1} + \cdots + (-1)^{l-1} e_1^{(\vec{j}^{(m)})} v_m = 0, \\ a_0 v_2 + (-1)^{l-2} e_2^{(\vec{j}^{(l+1)})} v_{l+1} + \cdots + (-1)^{l-2} e_2^{(\vec{j}^{(m)})} v_m = 0, \\ \quad\vdots \\ a_0 v_l \ + \ (-1)^{0} e_l^{(\vec{j}^{(l+1)})} v_{l+1} \ + \cdots + \ (-1)^{0} e_l^{(\vec{j}^{(m)})} v_m \ = 0. \end{cases}$$

这表明

$$a_0 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_0 v_1 \\ a_0 v_2 \\ \vdots \\ a_0 v_l \\ a_0 v_{l+1} \\ \vdots \\ a_0 v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^{l-1} e_1^{(\vec{j}^{(l+1)})} v_{l+1} - \cdots - (-1)^{l-1} e_1^{(\vec{j}^{(m)})} v_m \\ -(-1)^{l-2} e_2^{(\vec{j}^{(l+1)})} v_{l+1} - \cdots - (-1)^{l-2} e_2^{(\vec{j}^{(m)})} v_m \\ \vdots \\ -(-1)^{0} e_l^{(\vec{j}^{(l+1)})} v_{l+1} - \cdots - (-1)^{0} e_l^{(\vec{j}^{(m)})} v_m \\ a_0 v_{l+1} \\ \vdots \\ a_0 v_m \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

通过化简公式 (3.5), 可得

$$a_0 \cdot \vec{v} = (-1)^{l-1} v_{l+1} \begin{pmatrix} (-1)^1 e_1^{(\vec{j}^{(l+1)})} \\ (-1)^2 e_2^{(\vec{j}^{(l+1)})} \\ \vdots \\ (-1)^l e_l^{(\vec{j}^{(l+1)})} \\ (-1)^{l+1} e_{l+1}^{(\vec{j}^{(l+1)})} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + (-1)^{l-1} v_m \begin{pmatrix} (-1)^1 e_1^{(\vec{j}^{(m)})} \\ (-1)^2 e_2^{(\vec{j}^{(m)})} \\ \vdots \\ (-1)^l e_l^{(\vec{j}^{(m)})} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{l+1} e_{l+1}^{(\vec{j}^{(m)})} \end{pmatrix}.$$

于是,

$$a_0 \cdot \vec{v} = (-1)^{l-1} \Bigg\{ \sum_{k=l+1}^{m} v_k \cdot \phi_{\vec{j}^{(k)}}(\vec{e}^{(\vec{j}^{(k)})}) \Bigg\} \in \langle \{ \phi_{\vec{j}}(\vec{e}^{(\vec{j})}) \mid \vec{j} \in \mathfrak{K} \} \rangle \subset \langle \mathcal{S} \rangle. \tag{3.6}$$

令 $b_1,\dots,b_\beta\in R$ 是 F 的所有 $l\times l$ 阶子式. 借助上述方法同理可证

$$b_t\cdot\vec{v}\in\langle\mathcal{S}\rangle,$$

其中 $t=1,\dots,\beta$. 因为 F 是零左素矩阵, 所以存在多项式 $u_1,\dots,u_\beta\in R$ 使得

$$u_1b_1+\cdots+u_\beta b_\beta=1. \tag{3.7}$$

由此可得

$$\vec{v}=(u_1b_1+\cdots+u_\beta b_\beta)\cdot\vec{v}\in\langle\mathcal{S}\rangle. \tag{3.8}$$

因此, $\mathrm{Syz}(F)\subseteq\langle\mathcal{S}\rangle$. □

注 3.2　针对零素矩阵合冲模的计算问题, 由定理 3.2 可知, 通过将零素矩阵的最大阶子式按照一定规则进行排列即可获得合冲模的一组生成元集. 此外, 定理 3.2 可推广至如下非零素矩阵情形. 假设 $F\in R^{l\times m}$ 是一个秩为 r $(1\leqslant r\leqslant l)$ 的多项式矩阵, 且 F 的所有 $r\times r$ 阶子式生成主理想. Wang 和 Feng [17] 于 2004 年证明了满足上述条件的 F 有一个零左素分解, 即存在多项式矩阵 $F_1\in R^{l\times r}$ 和零左素矩阵 $F_2\in R^{r\times m}$ 使得 $F=F_1F_2$. 因为 $\mathrm{rank}(F)=r$ 且 $\mathrm{rank}(F)\leqslant\min\{\mathrm{rank}(F_1),\mathrm{rank}(F_2)\}$, 所以 $\mathrm{rank}(F_1)=r$, 即 F_1 是一个列满秩多项式矩阵. 此时易证

$$\mathrm{Syz}(F)=\mathrm{Syz}(F_2),$$

于是 $\mathrm{Syz}(F)$ 的一组生成元集可通过计算零左素矩阵 F_2 的合冲模得到.

下面用一个实例来说明定理 3.2 的计算过程.

例 3.1　已知

$$F=\begin{pmatrix}-x_1+2x_2 & -x_1-x_2 & -x_1+2x_2 & x_1^2-2x_1x_2+1\\ 0 & -2x_1-2x_2 & 1 & -x_1\end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{Q}[x_1,x_2]^{2\times4}$ 中的多项式矩阵, 其中 $\mathbb{Q}$ 是有理数域.

计算 F 的所有 2×2 阶子式, 可得

$$\begin{cases}b_{1,2}=2x_1^2-2x_1x_2-4x_2^2,\\ b_{1,3}=-x_1+2x_2,\\ b_{1,4}=x_1^2-2x_1x_2,\\ b_{2,3}=-2x_1^2+2x_1x_2+4x_2^2-x_1-x_2,\\ b_{2,4}=2x_1^3-2x_1^2x_2-4x_1x_2^2+x_1^2+2x_1+2x_2,\\ b_{3,4}=-1,\end{cases}$$

其中 $b_{i,j}$ 为由 F 的第 i 和 j 列构成的 2×2 阶方阵的行列式, $1\leqslant i<j\leqslant4$. 由 $b_{3,4}=-1$ 可知, F 的所有 2×2 阶子式生成单位理想 $\mathbb{Q}[x_1,x_2]$, 这表明 F 是一个零左素矩阵. 令

$$F^{(1,2,3)}=\begin{pmatrix}-x_1+2x_2 & -x_1-x_2 & -x_1+2x_2\\ 0 & -2x_1-2x_2 & 1\end{pmatrix},$$

则 $b_{2,3}$, $b_{1,3}$ 和 $b_{1,2}$ 是 $F^{(1,2,3)}$ 的正则子式. 令

$$\vec{e}^{(1,2,3)} = ((-1)^1 b_{2,3}, (-1)^2 b_{1,3}, (-1)^3 b_{1,2})^{\mathrm{T}}.$$

于是,

$$\phi_{(1,2,3)}(\vec{e}^{(1,2,3)}) = (-b_{2,3}, b_{1,3}, -b_{1,2}, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Syz}(F).$$

同理可得

$$\begin{cases} \phi_{(1,2,4)}(\vec{e}^{(1,2,4)}) = (-b_{2,4}, b_{1,4}, 0, -b_{1,2})^{\mathrm{T}}, \\ \phi_{(1,3,4)}(\vec{e}^{(1,3,4)}) = (-b_{3,4}, 0, b_{1,4}, -b_{1,3})^{\mathrm{T}}, \\ \phi_{(2,3,4)}(\vec{e}^{(2,3,4)}) = (0, -b_{3,4}, b_{2,4}, -b_{2,3})^{\mathrm{T}}. \end{cases}$$

根据定理 3.2, 有

$$\mathrm{Syz}(F) = \langle \phi_{(1,2,3)}(\vec{e}^{(1,2,3)}), \phi_{(1,2,4)}(\vec{e}^{(1,2,4)}), \phi_{(1,3,4)}(\vec{e}^{(1,3,4)}), \phi_{(2,3,4)}(\vec{e}^{(2,3,4)}) \rangle.$$

4 算法与实验

根据上节所提出的新方法, 本节给出以下用于计算零素矩阵合冲模的新算法 (算法 1).

算法 1 计算零素矩阵合冲模的生成元集

输入: 零左素矩阵 $F \in R^{l\times m}$.
输出: $\mathrm{Syz}(F)$ 的一组生成元集.
1. 计算 F 的所有 $l \times l$ 阶子式 $\{b_{s_1,\ldots,s_l} \mid 1 \leqslant s_1 < \cdots < s_l \leqslant m\}$;
2. 令 $\mathcal{S} := \emptyset$ 且 $\mathfrak{J} := \{\vec{j} = (j_1, \ldots, j_{l+1}) \in \mathbb{Z}^{l+1} \mid 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{l+1} \leqslant m\}$;
3. 当 $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ 时, 反复执行以下 4 个步骤:
3.1. 从 $\mathfrak{J}$ 中任意挑选一个向量 $\vec{j} = (j_1, \ldots, j_{l+1})$;
3.2. 令 $\vec{e}^{(\vec{j})} := ((-1)^1 b_{j_2,\ldots,j_{l+1}}, (-1)^2 b_{j_1,j_3,\ldots,j_{l+1}}, \ldots, (-1)^{l+1} b_{j_1,\ldots,j_l})^{\mathrm{T}}$;
3.3. 令 $\mathcal{S} := \mathcal{S} \cup \{\phi_{\vec{j}}(\vec{e}^{(\vec{j})})\}$;
3.4. 令 $\mathfrak{J} := \mathfrak{J} \setminus \{\vec{j}\}$;
4. 返回 $\mathcal{S}$.

注 4.1 在算法 1 中, 当输入的零左素矩阵为行向量时, 该向量被称为幺模行向量. Wu 等 [18] 针对某些具有特殊结构的幺模行向量 F, 如向量中存在某个多项式可由其余多项式组合表示的情形, 提出了计算 $\mathrm{Syz}(F)$ 自由基的方法, 其中自由基是一组特殊的生成元集. 然而, 由于本文的研究对象涵盖任意类型的零素矩阵, 算法 1 仅能提供它们合冲模生成元集的计算方法. 对于能否借助计算子式的方式获取自由基, 则是后续研究有待探索的方向.

在算法 1 中, 步骤 1 的 $b_{s_1,\ldots,s_l}$ 表示由 F 的第 $s_1, \ldots, s_l$ 列构成的子方阵的行列式. 此外, 上述算法在整个计算过程中, 大部分时间都花在了步骤 1 上.

定理 4.1 算法 1 在有限步骤之内按指定要求输出结果.

证明 算法 1 的正确性依赖于定理 3.2. 算法 1 总共需要计算 $\binom{m}{l}$ 个 $l \times l$ 阶子式, 由于在有限步骤内可完成方阵行列式的计算, 因此该算法将在有限步骤之内终止. □

本文已在计算机代数系统 Maple 2022 上实现了算法 1, 并与传统计算方法 Gröbner 基对比了计算效率. 尽管 Maple 2022 没有内置程序计算多项式矩阵的合冲模, 但可以使用基于 Maple 平台设计

表 1　算法 1 与 Gröbner 基的计算效率比较 (秒)

实例	Maple 算法 1	Maple SyzygyModule	Singular syz
F_1	0.001	0.304	0.001
F_2	0.001	6.694	0.960
F_3	0.001	99.660	25.740
F_4	0.001	大于 1 小时	大于 1 小时
F_5	0.009	1140.975	1901.350
F_6	0.007	大于 1 小时	大于 1 小时
F_7	0.648	14.243	9.820
F_8	0.644	114.909	143.210

的软件包 “Involutive” [5], 通过调用其中的 “SyzygyModule” 命令用来计算零素矩阵的合冲模. 此外, Singular 2023 (版本: 4.3.2) 也是一个用于多项式计算的计算机代数系统, 在处理多项式环上模的相关问题方面具有特殊优势. Singular 的内置命令 “syz” 能够被用来计算多项式矩阵的合冲模, 并输出一组生成元集 [6]. 当然, 上述命令的基本思想都是基于 Gröbner 基算法. 本文随机生成了一些零左素矩阵用来验证上述程序的计算效率, 得到如下数据.

下面对实验的设置进行说明, 以便表 1 中所报告的时间数据能够被独立复现.

• 表 1 中的数据是使用一台配备了 AMD 锐龙 7 6800H 处理器、Radeon 显卡以及 64GB 内存的个人笔记本电脑获得的.

• 为了获得可靠的计时数据, 当计算时间与时钟分辨率相比极短时, 针对相同输入多次执行每个程序, 并计算总运行时间的平均值. 此外, 若在给定的输入上一个程序的执行时间超过 1 小时, 就会主动终止计算.

• 表 1 中的 $F_1, \ldots, F_8$ 是根据以下规则随机生成的零左素矩阵. 首先, 矩阵的大小随机从 2×6 至 6×10 中选择; 其次, 矩阵中的元素均是多项式环 $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ 中的多项式; 最后, 矩阵中每个位置的元素其关于变元的总次数不超过 4. 参见附录 A 查看 $F_1, \ldots, F_8$ 的具体形式.

从表 1 中的数据可明显看出, 算法 1 比 Gröbner 基算法表现得更加高效, 这说明本文所提出的新方法非常有效. 出现这种现象的原因在于, 相较于新算法只涉及多元多项式的乘法、加法和减法运算而言, Gröbner 基算法还需要进行大量的多元多项式除法运算, 从而导致 Gröbner 基算法比新算法在计算效率方面要慢.

感兴趣的读者可在网站 http://www.mmrc.iss.ac.cn/~dwang/software.html 获取相关代码和实例.

5　结论

本文提出了计算零素矩阵合冲模的一种新方法. 与传统经典计算方法 Gröbner 基相比, 新方法只需要计算矩阵的最大阶子式并按照特定规则进行排序即可获得合冲模的一组生成元集. 基于新方法, 本文设计了计算零素矩阵合冲模的算法, 并在 Maple 上予以了实现. 表 1 中的实验数据表明, 新算法在计算效率方面比 Gröbner 基算法更为优越. 我们期望, 本文所提出的结果将激发各种类型多元多项式矩阵合冲模计算的进一步探索并取得新的进展.

致谢　感谢评审专家们对本文提出的宝贵修改意见和建议.

参考文献

1 Buchberger B. Gröbner bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory. In: Multidimensional Systems Theory and Applications. Dordrecht: Springer, 1995, 89–127
2 Cox D A, Little J B, O'shea D B. Using Algebraic Geometry, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics. Heidelberg: Springer-Verlag, 2005
3 Cox D A, Sederberg T W, Chen F L. The moving line ideal basis of planar rational curves. Comput Aided Geom Design, 1998, 15: 803–827
4 Eisenbud D. Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics. Heidelberg: Springer-Verlag, 2008
5 Fabiańska A, Quadrat A. Applications of the Quillen-Suslin theorem to multidimensional systems theory. Radon Ser Comp Appl Math, 2007, 3: 23–106
6 Greuel G, Pfister G. A Singular Introduction to Commutative Algebra. Heidelberg: Springer-Verlag, 2002
7 Hilbert D. Ueber die theorie der algebraischen formen. Math Ann, 1890, 36: 473–534
8 Huang B, Chen F L. Computing μ-bases of univariate polynomial matrices using polynomial matrix factorization. J Syst Sci Complex, 2021, 34: 1189–1206
9 Lin Z. On syzygy modules for polynomial matrices. Linear Algebra Appl, 1999, 298: 73–86
10 Lu D, Wang D K, Xiao F H. New remarks on the factorization and equivalence problems for a class of multivariate polynomial matrices. J Symbolic Comput, 2023, 115: 266–284
11 Mayr E W, Meyer A R. The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals. Adv Math, 1982, 46: 305–329
12 Möller H M, Mora F. Upper and lower bounds for the degree of Gröbner bases. In: EUROSAM 1984. Lecture Notes in Computer Science, vol. 174. Berlin-Heidelberg: Springer, 1984, 172–183
13 Quillen D. Projective modules over polynomial rings. Invent Math, 1976, 36: 167–171
14 Sederberg T, Chen F L. Implicitization using moving curves and surfaces. In: Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM, 1995, 301–308
15 Serre J P. Faisceaux algébriques cohérents. Ann of Math (2), 1955, 61: 197–278
16 Suslin A. Projective modules over polynomial rings are free. Soviet Math Doklady, 1976, 17: 1160–1165
17 Wang M, Feng D. On Lin-Bose problem. Linear Algebra Appl, 2004, 390: 279–285
18 Wu T, Liu J, Guan J. Embedding of unimodular row vectors. Mathematics, 2023, 11: 1–9
19 Youla D, Gnavi G. Notes on n-dimensional system theory. IEEE Trans Circuits Syst I Regul Pap, 1979, 26: 105–111

附录 A 表 1 中的零素矩阵

表 1 第一列所有零左素矩阵如下所示. 考虑到有些矩阵的规模比较大, 为方便起见, 用转置的形式呈现.

(1) $F_1 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]^{2\times 6}$, 且其转置矩阵为

$$F_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2x_1+x_2-2x_3-4 & -2x_1+x_2+1 \\ 2x_1+x_2-2x_3 & 2x_1-x_3+1 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2 & 2x_1+2x_2-2x_3-2 \\ -2x_1-x_2-x_3-1 & 2x_2-2 \\ 2x_1-2x_2+x_3-1 & x_1-2x_2+2x_3+2 \\ -2x_1-2x_2+2x_3+3 & 2x_1+2x_2-2x_3+1 \end{pmatrix}.$$

(2) $F_2 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]^{2\times 6}$, 且其转置矩阵为

$$F_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 0 & 2x_1^2+x_1x_2-x_2^2+2x_2x_3-x_3 \\ 2x_1^2+x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3-2x_2 & x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3^2-x_3-2 \\ -x_1^2+2x_2x_3+x_3^2-2x_3+3 & -2x_1x_2-2x_2^2+x_2x_3-1 \\ 0 & 0 \\ 2x_1^2+x_1x_3+2x_2^2-x_2x_3+2x_3^2+1 & 2x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3+x_3^2-x_1+1 \\ -x_1^2+x_2^2+x_1+3 & 2x_1x_2-2x_1x_3-x_3+4 \end{pmatrix}.$$

(3) $F_3\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]^{2\times 6}$, 且其转置矩阵为

$$F_3^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -x_1^2x_3-x_2x_3^2-x_2^2+x_1-2x_3 & x_1^2x_2+2x_2^3-x_1x_3-x_2+1 \\ -2x_1x_2x_3-2x_2^3-x_2^2x_3+2x_2x_3^2-2x_3x_2-1 & -x_1^2x_3-x_1x_2x_3+x_2+2 \\ x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_2^2+x_3 & 0 \\ 0 & x_2^3+2x_2x_3^2-2x_1x_2-2x_3^2-2x_3+1 \\ 2x_1^2x_2-x_2^3+x_2x_3^2+2x_1x_3+2x_1+x_3+1 & x_2^2x_3-x_1^2+x_3+1 \\ x_1x_3^2-2x_2^3+x_3^3-1 & x_1^3+x_1x_2x_3-x_2^3-2x_3x_2-2x_1 \end{pmatrix}.$$

(4) $F_4\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]^{2\times 6}$, 且其转置矩阵为

$$F_4^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} x_2x_3^3+x_1^2x_3+2x_3x_2-2x_3^2-x_3 & 0 \\ -x_1x_2x_3^2-2x_3^4+2x_1x_2-2x_1x_3+x_3x_2-2 & -x_1^2x_2x_3-x_3^4+2x_1^3-3 \\ -2x_2x_3^3+2x_1^2x_3-x_2^3+x_1x_2+1 & -2x_2^2x_3^2-2x_3^4-2x_2^3-x_2^2+x_3+1 \\ 2x_1^2x_2^2+2x_2^4-2x_1^3+2x_3^2-2 & 2x_3^4-2x_1^2x_3-x_1x_2x_3-2x_2^2x_3+2 \\ 0 & 0 \\ -2x_1^3x_2+x_1x_2^2x_3-x_1x_3^3+x_2^2x_3 & 2x_1^2x_3^2+2x_1x_2^2x_3-2x_2^2x_3^2+2x_1^2x_3+x_1+2 \end{pmatrix}.$$

(5) $F_5\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]^{4\times 8}$, 且其每个位置的元素分别如下所示:

$F_5[1,1]=2x_1x_2-2x_2x_3+x_1+x_2-1,\quad F_5[1,2]=2x_1x_3+2x_2^2+x_3^2+x_2-4,$

$F_5[1,3]=x_1^2-x_1x_2+x_1x_3-x_3^2-4,\quad F_5[1,4]=x_1^2+2x_1x_2+x_1x_3-x_2^2-x_3^2+x_1-1,$

$F_5[1,5]=x_1x_2+x_3^2+x_2-4,\quad F_5[1,6]=x_1x_2-2x_1x_3+x_2x_3-x_1-1,$

$F_5[1,7]=-2x_1x_2-x_1x_3-2x_1-x_3-2,\quad F_5[1,8]=2x_1x_2-2x_1x_3+x_2^2-1,$

$F_5[2,1]=x_1^2+x_1x_2-2x_1x_3-2x_2^2+2x_2x_3+x_2-2,\quad F_5[2,2]=0,$

$F_5[2,3]=-x_1^2+x_2^2-2x_2x_3-2,\quad F_5[2,4]=x_1x_2+2x_1-2x_3+2,$

$F_5[2,5]=-2x_1^2+x_1x_2-x_1x_3+x_3^2-x_3,\quad F_5[2,6]=x_1^2+x_1x_2-2x_1x_3+2x_1-3,$

$F_5[2,7]=2x_1x_2+x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2+x_1+2,\quad F_5[2,8]=x_1^2-x_1x_2+2x_1x_3-x_2^2-x_2x_3-2,$

$F_5[3,1]=0,\quad F_5[3,2]=-x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3-2x_1+x_2-2x_3-1,$

$F_5[3,3]=x_1x_2+2x_2x_3-2x_2+2,\quad F_5[3,4]=0,$

$$F_5[3,5] = -x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 + x_2x_3 + 2x_3^2 + x_2, \quad F_5[3,6] = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - x_3 + 4,$$
$$F_5[3,7] = -x_1x_2 + 3, \quad F_5[3,8] = -x_2x_3 + 2x_3^2 + x_2 - 1,$$
$$F_5[4,1] = -x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_3^2 - x_1 + 1, \quad F_5[4,2] = x_2x_3 + 2x_3^2 - x_1 + x_2 - x_3,$$
$$F_5[4,3] = 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_3^2, \quad F_5[4,4] = -2x_1^2 - x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + 2x_1 - 2x_3 + 1,$$
$$F_5[4,5] = 2x_1x_3 - 2x_1 + 2x_2 + 1, \quad F_5[4,6] = -2x_1^2 + x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2 + x_3 + 1,$$
$$F_5[4,7] = 0, \quad F_5[4,8] = -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 + 2x_3 - 2.$$

(6) $F_6 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]^{4\times 8}$, 且其每个位置的元素分别如下所示:

$$F_6[1,1] = -2x_1^2x_2 + 2x_1x_2x_3 + 2x_2^2x_3 - 2x_2x_3^2 + x_3^3 + x_3x_2 - 1,$$
$$F_6[1,2] = -2x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - 2x_1x_3^2 + 2x_3^3 + x_1x_3 + x_3 - 1,$$
$$F_6[1,3] = 0, \quad F_6[1,4] = 0,$$
$$F_6[1,5] = -2x_1x_2x_3 + x_2^3 - 2x_3^3 + 2x_1x_2 - 2, \quad F_6[1,6] = x_1^3 + x_2^2x_3 - x_2^2 + 1,$$
$$F_6[1,7] = 0, \quad F_6[1,8] = -x_1^2x_3 + 2x_1x_3^2 + 2x_2x_3^2 - x_3^3 - x_1x_2 + 2x_3 - 1,$$
$$F_6[2,1] = -2x_1^3 + x_2x_3^2 - x_3^2 - 2x_3 - 4, \quad F_6[2,2] = -x_1x_2x_3 - 2x_2^2x_3 + x_2 + 2,$$
$$F_6[2,3] = -2x_1^3 - 2x_1x_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3 + 2, \quad F_6[2,4] = x_1^2 + 2x_3x_2 + 2x_1 - x_3 - 2,$$
$$F_6[2,5] = 0, \quad F_6[2,6] = -2x_1^3 + 2x_1x_3 - x_3^2 + 1,$$
$$F_6[2,7] = 0, \quad F_6[2,8] = -2x_1x_2x_3 - x_2x_3^2 - x_1 + 2x_2 - 1,$$
$$F_6[3,1] = 0, \quad F_6[3,2] = 0,$$
$$F_6[3,3] = 2x_1x_2x_3 - x_2^2x_3 + 2x_2x_3^2 + x_2^2 + x_3x_2 + 2, \quad F_6[3,4] = 0,$$
$$F_6[3,5] = -2x_1^2x_2 - 2x_3^3 - x_1x_3 - x_2^2 - 1, \quad F_6[3,6] = 2x_1^3 + x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_2^2x_3 + 2x_1^2 - x_1x_2 + 1,$$
$$F_6[3,7] = -x_1^2x_3 - x_2x_3^2 - x_2^2 + x_1 - 2x_3, \quad F_6[3,8] = -2x_1x_2x_3 - 2x_2^3 - x_2^2x_3 + 2x_2x_3^2 - 2x_3x_2 - 1,$$
$$F_6[4,1] = x_1^2x_3 + x_1x_2x_3 + x_2^2 + x_3, \quad F_6[4,2] = 0,$$
$$F_6[4,3] = 2x_1^2x_2 - x_2^3 + x_2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_1 + x_3 + 1, \quad F_6[4,4] = x_1x_3^2 - 2x_2^3 + x_3^3 - 1,$$
$$F_6[4,5] = x_1^2x_2 + 2x_2^3 - x_1x_3 - x_2 + 1, \quad F_6[4,6] = -x_1^2x_3 - x_1x_2x_3 + x_2 + 2,$$
$$F_6[4,7] = 0, \quad F_6[4,8] = x_2^3 + 2x_2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_3^2 - 2x_3 + 1.$$

(7) $F_7 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]^{6\times 10}$, 且其每个位置的元素分别如下所示:

$$F_7[1,1] = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1 + 1, \quad F_7[1,2] = -x_2^2 + 2x_1 - x_2 - 1,$$
$$F_7[1,3] = 0, \quad F_7[1,4] = 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1 - x_2 - 3,$$
$$F_7[1,5] = -x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - 1, \quad F_7[1,6] = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1 + 2x_2 + 1,$$
$$F_7[1,7] = 2x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1 - 1, \quad F_7[1,8] = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 2x_1 + x_2 - 2,$$
$$F_7[1,9] = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 - x_2 - 1, \quad F_7[1,10] = x_1^2 - x_2 - 2,$$
$$F_7[2,1] = -2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - 2, \quad F_7[2,2] = 0,$$
$$F_7[2,3] = 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1 - x_2 - 2, \quad F_7[2,4] = 0,$$

$F_7[2,5]=x_1^2-x_1x_2-x_2+3,\quad F_7[2,6]=0,$

$F_7[2,7]=-x_1^2-2x_1x_2-x_2^2+x_1-2x_2-3,\quad F_7[2,8]=0,$

$F_7[2,9]=-x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_1+2,\quad F_7[2,10]=-x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-x_1-2x_2-3,$

$F_7[3,1]=2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2-2x_1-x_2-2,\quad F_7[3,2]=2x_1^2-2x_1x_2-x_1+1,$

$F_7[3,3]=0,\quad F_7[3,4]=0,$

$F_7[3,5]=-2x_1^2-2x_1x_2-x_2^2+x_1+2x_2-3,\quad F_7[3,6]=2x_1^2+x_1x_2-x_2^2+x_1-2x_2+1,$

$F_7[3,7]=x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2x_1,\quad F_7[3,8]=-x_1^2+2x_2^2-x_1-x_2-2,$

$F_7[3,9]=-x_1x_2-x_1+2x_2,\quad F_7[3,10]=0,$

$F_7[4,1]=0,\quad F_7[4,2]=-x_1x_2-x_2^2-x_1-3,$

$F_7[4,3]=x_1^2-x_1x_2-2x_2^2-2x_2-1,\quad F_7[4,4]=0,$

$F_7[4,5]=x_1^2-x_1x_2-2x_2^2-2x_1-2,\quad F_7[4,6]=2x_1^2-x_1x_2-x_2^2-2x_1+2x_2,$

$F_7[4,7]=0,\quad F_7[4,8]=2x_1^2-x_1x_2+x_2^2-2x_1+1,$

$F_7[4,9]=-2x_1x_2+2x_2^2-x_2+1,\quad F_7[4,10]=0,$

$F_7[5,1]=x_1^2-x_1x_2-x_2^2+x_1-2x_2+4,\quad F_7[5,2]=2x_1x_2+2x_2^2+2x_1+x_2,$

$F_7[5,3]=-2x_1^2-2x_2^2-2x_1+3,\quad F_7[5,4]=0,$

$F_7[5,5]=-2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_1-2x_2+2,\quad F_7[5,6]=x_1^2-2x_2^2+x_1,$

$F_7[5,7]=-2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-x_1+2x_2-3,\quad F_7[5,8]=2x_2^2-x_1+x_2-1,$

$F_7[5,9]=x_1^2+x_1x_2-x_2^2-2x_1+2x_2+3,\quad F_7[5,10]=0,$

$F_7[6,1]=0,\quad F_7[6,2]=x_1^2+2x_2^2+x_1+x_2,$

$F_7[6,3]=-x_1^2-x_1x_2-x_1+x_2+3,\quad F_7[6,4]=-x_1^2-2x_2^2-2x_1+2x_2+1,$

$F_7[6,5]=-2x_1x_2-x_2^2-2x_1-2x_2+1,\quad F_7[6,6]=-2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-2x_2,$

$F_7[6,7]=-x_1^2+2x_1x_2-x_2^2+x_2,\quad F_7[6,8]=-x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-2x_2-2,$

$F_7[6,9]=-2x_1x_2-x_2^2-x_1-x_2+2,\quad F_7[6,10]=0.$

(8) $F_8\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]^{6\times 10}$, 且其每个位置的元素分别如下所示:

$F_8[1,1]=-2x_1x_2^2+x_1x_2-x_2^2-3,\quad F_8[1,2]=x_1^2x_2+2x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-x_2-1,$

$F_8[1,3]=x_1^3+2x_1^2x_2-2x_1-x_2+4,\quad F_8[1,4]=-2x_1^3+2x_1^2x_2+2x_2^3-x_1x_2+x_2^2+2,$

$F_8[1,5]=x_1^3-2x_1^2x_2-2x_2^2-x_1+2x_2-2,\quad F_8[1,6]=-x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2-2x_2^3-2x_1^2-x_1x_2,$

$F_8[1,7]=-x_1^3+2x_1x_2^2-x_1-2x_2-1,\quad F_8[1,8]=0,$

$F_8[1,9]=x_1x_2+x_2^2-2x_2-1,\quad F_8[1,10]=0,$

$F_8[2,1]=x_1^3-x_1^2x_2+x_1^2+x_1x_2+x_1+1,\quad F_8[2,2]=x_1x_2^2+x_1^2+x_1x_2+2x_1,$

$F_8[2,3]=x_1x_2^2+2x_1^2-2x_1x_2-2,\quad F_8[2,4]=2x_2^3-2,$

$F_8[2,5]=0,\quad F_8[2,6]=-2x_2^3+2x_1^2-2x_2^2+2x_2+3,$

$F_8[2,7]=0,\quad F_8[2,8]=x_1^3+2x_1^2x_2-2x_1x_2^2-x_2^3+2x_1x_2+3,\quad F_8[2,9]=0,\quad F_8[2,10]=0,$

$$F_8[3,1] = x_1^3 - x_2^3 + x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_2 - 2, \quad F_8[3,2] = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 + 1,$$
$$F_8[3,3] = 2x_1^2x_2 + 2x_2^2 + 2x_1 - x_2 + 3, \quad F_8[3,4] = 2x_1^3 - 2x_2^3 + x_1x_2 + 2,$$
$$F_8[3,5] = -x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - x_2 + 1, \quad F_8[3,6] = 0,$$
$$F_8[3,7] = -x_1^3 + 2x_1x_2^2 - 2x_1^2 + x_1 - 2x_2 - 2, \quad F_8[3,8] = 2x_1^3 + 2x_2^3 + x_1x_2 - 2x_2 - 1,$$
$$F_8[3,9] = 0, \quad F_8[3,10] = 0,$$
$$F_8[4,1] = x_1^3 - x_1x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 2, \quad F_8[4,2] = 0,$$
$$F_8[4,3] = 0, \quad F_8[4,4] = 2x_2^3 - 2x_1^2 + 2x_2 + 2,$$
$$F_8[4,5] = -x_1^2x_2 + x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1 - 1, \quad F_8[4,6] = 2x_1x_2^2 - 2x_1 - 4,$$
$$F_8[4,7] = 0, \quad F_8[4,8] = x_1^2x_2 - x_2^3 + 2x_1^2 + 2x_1 + 1,$$
$$F_8[4,9] = -x_1^3 + 2x_1x_2^2 - x_1^2 - 2x_1 - 2, \quad F_8[4,10] = -x_1^3 - x_1^2x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2 - 1,$$
$$F_8[5,1] = 0, \quad F_8[5,2] = 0,$$
$$F_8[5,3] = 2x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1^2 - 2x_1 - 1, \quad F_8[5,4] = 2x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3,$$
$$F_8[5,5] = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2 - 1, \quad F_8[5,6] = 2x_1^3 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_1 - 1,$$
$$F_8[5,7] = x_1x_2^2 + x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1 - 3, \quad F_8[5,8] = 0,$$
$$F_8[5,9] = -2x_1^3 + 2x_1x_2^2 - 2x_2^3 + 2x_1x_2 + 2x_2 + 1, \quad F_8[5,10] = -2x_1x_2^2 - 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 - 3,$$
$$F_8[6,1] = 0, \quad F_8[6,2] = -x_1^3 - x_1^2x_2 + x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 + 1,$$
$$F_8[6,3] = x_1^3 + x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 2x_1 + x_2 - 2, \quad F_8[6,4] = 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + 2x_1^2 + 2x_1 - 2x_2 + 2,$$
$$F_8[6,5] = -2x_1x_2^2 - 2x_2^3 + 2x_1^2 + x_1x_2, \quad F_8[6,6] = -x_1^3 - x_1x_2^2 - x_2^3 - x_1x_2 + 2x_1 + x_2,$$
$$F_8[6,7] = 2x_1x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 3, \quad F_8[6,8] = x_1^3 + 2x_2^3 + x_1^2 - x_2^2 - 2x_2 + 1,$$
$$F_8[6,9] = 2x_1^3 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1 - 1, \quad F_8[6,10] = -2x_1^3 + x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 - 2x_2^2 - x_2.$$

An efficient algorithm for computing syzygy modules of zero prime matrices

Dong Lu, Dingkang Wang, Fanghui Xiao & Xiaopeng Zheng

Abstract In this paper, we introduce a new method for computing a generating set of the syzygy module associated with a zero prime matrix over a multivariate polynomial ring. The core idea lies in firstly calculating all the maximum order minors of the matrix, and subsequently arranging them in accordance with a specific principle to obtain the generating set. An example is given to illustrate the effectiveness of the method. According to the method, we present a new algorithm for computing syzygy modules of zero prime matrices. The algorithm has been implemented on the computer algebra system Maple, and experimental data show that the new algorithm is more efficient compared with the classical computational method of Gröbner basis.

Keywords zero prime matrix, syzygy module, Gröbner basis, generating set

MSC(2020) 15A24, 13P15, 13P10

doi: 10.1360/SSM-2025-0054