Chapter 3

行列式

行列式的定义

在第一章中我们已经定义了二阶和三阶的行列式 (determinant)，现在我们来定义一般的行列式并探讨其性质。

定义 3.0.1 设

$$\begin{aligned} f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{\text{m 个}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) &\longmapsto f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \end{aligned}.$$

称 f 是 m 重线性函数，如果对 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \{1, \ldots, m\}$，固定除 $\mathbf{x}_k$ 之外的变元，有：

$$f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) = \alpha f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m) + \beta f(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m).$$

即若任意地固定 $m-1$ 个变元后 f 是线性函数，则 m 是多重线性函数。

例 3.0.1 (1) 设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$，$m = 1$ 时 $f(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ 回到了线性函数的情形。(2)$m = 2$ 时考虑下面的多元函数：

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{aligned}$$

容易验证这是一个二重线性函数。

设 $\mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(n)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基。则每个变元 (向量)

$$\mathbf{x}_k = x_{1k}\mathbf{e}^{(1)} + \ldots + x_{nk}\mathbf{e}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\mathbf{e}^{(i)}.$$

由 f 的多重线性性质，我们可以对 f 作如下展开 (建议初学者耐心推导)：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m) &= f(\sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1 1}\mathbf{e}^{(i_1)},\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1 1} f(\mathbf{e}^{(i_1)},\sum_{i_2=1}^{n} x_{i_2 2}\mathbf{e}^{(i_2)},\ldots,\mathbf{x}_m) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1 1}\sum_{i_2=1}^{n} x_{i_2 2} f(\mathbf{e}^{(i_1)},\mathbf{e}^{(i_2)},\sum_{i_3=1}^{n} x_{i_3 3}\mathbf{e}^{(i_3)},\cdots,\mathbf{x}_m) \\ &\quad\vdots \\ &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} x_{i_1 1}x_{i_2 2}\cdots x_{i_m m} f(\mathbf{e}^{(i_1)},\ldots,\mathbf{e}^{(i_m)}). \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

实际上，我们刚刚的推导是在取定一组基后，将张量展开成坐标形式。张量的内容我们会在下册简单介绍。

定义 3.0.2 设 $f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)$ 是 m 重线性函数，如果 $\forall i,j\in\{1,\cdots,m\}, i\neq j$，有 $f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_j,\ldots,\mathbf{x}_i,\ldots,\mathbf{x}_m) = f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_i,\ldots,\mathbf{x}_j,\ldots,\mathbf{x}_m)$，则称 f 是对称的。如果 $\forall i,j\in\{1,\cdots,m\}, i\neq j$，有 $f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_j,\ldots,\mathbf{x}_i,\ldots,\mathbf{x}_m) = -f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_i,\ldots,\mathbf{x}_j,\ldots,\mathbf{x}_m)$，则称 f 是斜对称的。

容易看到，这个定义与定义 1.5.6 是一致的。

引理 3.0.1 设 f 是 m 重斜对称线性函数，则 $f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v},\ldots,\mathbf{x}_m) = 0$

证明: 由 $f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{v},\ldots,\mathbf{x},\ldots,\mathbf{x}_m) = -f(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{v},\ldots,\mathbf{v},\ldots,\mathbf{x}_m)$ 即得结论。 □

当结论推广到一般的域上时要求域的特征不为 2。

记 $a_{i_1\ldots i_m} = f(\mathbf{e}^{(i_1)},\ldots,\mathbf{e}^{(i_m)})$。于是，$f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_m) = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} a_{i_1\ldots i_m}x_{i_1 1}\cdots x_{i_m m}$，并且其中的 $i_1,\ldots,i_m$ 两两不同。下面我们考虑 $m=n$ 的情形。由于 $i_1,\ldots,i_n$ 两两不同，即 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是一个置换，那么

$$f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n}$$

引理 3.0.2 设 $f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n}$ 是 n 重斜对称线性函数，则 $\forall\sigma\in S_n$，$a_{\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)} = \varepsilon_\sigma a_{12\ldots n}$。

证明: 这实际上是定义 1.5.6 的直接推论。

设 $\sigma = \tau_1\cdots\tau_k$，其中 $\tau_1,\cdots,\tau_k$ 是对换。我们对 k 进行归纳。$k=0$ 时 $\sigma = \mathrm{id}$，命题显然成立，$k=1$ 时由引理 3.0.1, 利用 $f(\mathbf{e}^{(1)},\ldots,(\mathbf{e}^{(i)}+\mathbf{e}^{(j)}),\ldots,(\mathbf{e}^{(i)}+\mathbf{e}^{(j)}),\ldots,\mathbf{e}^{(n)}) = 0$ 即得命题成立. 下设 $k>1$ 且 $k-1$ 时命题成立那么，令 $\pi = \tau_2\cdots\tau_k$，则 $\sigma = \tau_1\pi$。于是有

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)} &= f(\mathbf{e}^{(\sigma(1))},\ldots,\mathbf{e}^{(\sigma(n))}) \\ &= f(\mathbf{e}^{(\tau_1\pi(1))},\ldots,\mathbf{e}^{(\tau_1\pi(n))}) \\ &= -f(\mathbf{e}^{(\pi(1))},\ldots,\mathbf{e}^{(\pi(n))}) \\ &= -\varepsilon_\pi a_{1\ldots n} \\ &= \varepsilon_\sigma a_{1\ldots n} \end{aligned}$$

这样我们就完成了证明。 □

有了这个引理，在 f 斜对称且 $n=m$ 时，我们可以继续 (3.0.1) 式的推导如下：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)} x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\ldots n} x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= a_{1\ldots n}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(n)n} \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

其中 $\lambda = f(\mathbf{e}^{(1)},\ldots,\mathbf{e}^{(n)}) = a_{1\ldots n}$ 是给定的常数。这样我们就已经做完了定义行列式的准备了。

定义 3.0.3 行列式函数 $\det : \underbrace{\mathbb{R}^n\times\cdots\times\mathbb{R}^n}_{\text{n 个}} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 n 重线性斜对称函数，且满足

$$\det(\mathbf{e}^{(1)},\ldots,\mathbf{e}^{(n)}) = 1.$$

例 3.0.2 当 $n=2$ 时，$S_2=\{e,\ \sigma=(12)\}$，则 $\det:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 为：

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) &= \varepsilon_e x_{e(1)1}x_{e(2)2} + \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)1}x_{\sigma(2)2} \\ &= x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \\ &= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

即这里我们定义的行列式与第一章中定义的行列式是一致的。

定义 3.0.4 (**方阵的行列式**) 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{R})$，则定义 A 的行列式为 A 的列向量的行列式函数，即 $\det(A)=\det(\mathbf{A}^{(1)},\ldots,\mathbf{A}^{(n)}) = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$，也记为 $|A|=\det(A)$。

于是我们也可以直接将行列式用矩阵元素的组合描述：行列式是方阵中所有不同行不同列元素的乘积的交错和 (完全展开)。

3.1 行列式的基本性质

利用行列式的定义，容易证明行列式 $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 有以下性质：

(1) 正规性：$\det(E_n) = 1$；

(2) 多重线性性质：即固定 $n-1$ 列后 det 是剩下那一列的线性函数，于是特别地，$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$；

(3) 斜对称性：即交换矩阵的两列后行列式的值变成相反数；

(4) 列等性：若矩阵的两列相等，则行列式的值为 0(可由斜对称性推出)。

引理 3.1.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，如果 $\operatorname{rank}(A) < n$，则 $\det(A) = 0$。

证明: 由于 $\operatorname{rank}(A) = n$，即存在某一列可以由其它列线性表出，不妨设

$$\mathbf{A}^{(j)} = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{A}^{(i)}$$

那么由多重线性性及列等性有：

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(\mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(j-1)}, \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{A}^{(i)}, \ldots, \mathbf{A}^{(n)}) \\
&= \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \alpha_i \det(\mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(j-1)}, \mathbf{A}^{(i)}, \mathbf{A}^{(j+1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(n)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

即得结论。 □

(5) 列变换不变性：设 $\mathbf{v} \in \left\langle \mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(j-1)}, \mathbf{A}^{(j+1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(n)} \right\rangle$，则

$$\det(\mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(j-1)}, \mathbf{A}^{(j)} + \mathbf{v}, \mathbf{A}^{(j+1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(n)}) = \det(A)$$

这可以由多重线性性及列等性直接推出。

命题 3.1.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，则 $\det(A) = \det(A^t)$。

证明: 我们利用行列式的完全展开来证明命题。设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$A^t = (a'_{ij})_{n\times n}$，其中 $a'_{ij} = a_{ji}$，$i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，则

$$\begin{aligned}
\det(A^t) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a'_{\sigma(1)1} \cdots a'_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma^{-1}(\sigma(1)),\sigma(1)} \cdots a_{\sigma^{-1}(\sigma(n)),\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \varepsilon_{\sigma^{-1}} a_{\sigma^{-1}(1),1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n),n} \qquad (\text{注意到 } \varepsilon_{\sigma^{-1}} = \varepsilon_\sigma) \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

即得结论。 □

注 3.1.1 (i) 由命题 3.1.1 可知，以上对矩阵列叙述的性质中，把列换成行，性质依然成立；
(ii) 由以上性质容易推出，设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，对 A 作一次初等行 (列) 变换得到 B，若变换是 (I) 类，则 $\det(B) = -\det(A)$；若变换是 (II) 类，则 $\det(B) = \det(A)$；若变换是 (III) 类，则 $\det(B) = \lambda \det(A)$。

(6) 上 (下) 三角矩阵的行列式等于对角线上元素的乘积。称 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ 为上三角矩阵，则 $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$(下三角矩阵可类似定义)。利用完全展开或初等变换都可以证明这一结论。

例 3.1.1 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\det(A)$。

解: $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$

定理 3.1.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，则 $\det(A) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) < n$。

证明: ($\Longleftarrow$) 即引理 3.1.1。
($\Longrightarrow$) 通过 (I)、(II) 类初等变换，我们可以将 A 化成行阶梯型的矩阵 B，而 $\det(A)$ 与 $\det(B)$ 只差一个正负号，于是 $\det(A) = 0$ 表明 B 的对角线上有 0，于是 B 有全是 0 的行，即 $\operatorname{rank}(A) < n$。
□

3.2 行列式的进阶性质

在这一节中，我们将讨论行列式按照一行 (或一列) 的展开，并由此介绍行列式的更多性质。有关行列式按多行 (列) 展开 (Laplace 定理)，我们将在习题课讲义中进行介绍。

设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, 记 M_{ij} 是 A 去掉第 i 行第 j 列后得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式，称为 A 关于位置 (i, j) 的余子式 (minor)；定义 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式 (cofactor)。

例 3.2.1 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，则 $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$。

命题 3.2.1 若 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，则 $\det(A) = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$。

证明: 注意到 A 的第一列只有 a_{11} 非零，于是由 $\det(A^t) = \det(A)$ 及行列式的完全展开有：

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \varepsilon_\sigma a_{11} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

由于 $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ 与 $\{2, 3, \dots, n\}$ 上的置换集合 S_{n-1} 相同，因此

$$\det(A) = a_{11} \sum_{\pi \in S_{n-1}} \varepsilon_\pi a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} M_{11}.$$

即得结论。 □

定理 3.2.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，则 $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$，有

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

分别称之为行列式按第 i 行/第 j 列展开。

证明: 我们只证明按列展开，按行展开的情形可由取转置直接得到。

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \quad \text{(多重线性性质)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \quad \text{(第 j 列换到第 1 列)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{(j-1)+(i-1)}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in}\\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n}\\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \quad \text{(第 i 行换到第 1 行)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \quad \text{(命题 3.2.1)}$$

这样我们就完成了证明。 □

例 3.2.2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$。

例 3.2.3 (Vandemonde **行列式**) 设 $A_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$，则 $\det(A_n)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$，

记作 $\Delta(x_1,\ldots,x_n)$。

证明: 用数学归纳法。$n=2$ 时 $A_2=x_2-x_1$ 显然成立；下面假设 $n-1$ 时结论成立，则对 n 有：

$$\Delta(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2^2-x_2x_1 & x_3^2-x_3x_1 & \cdots & x_n^2-x_nx_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_1 & x_3^{n-1}-x_3^{n-2}x_1 & \cdots & x_n^{n-1}-x_n^{n-2}x_1\end{vmatrix} \quad \text{(各行减去上一行的 } x_1 \text{ 倍)}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix} \quad \text{(按第一列展开后提出公因子)}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\Delta(x_2,x_3,\dots,x_n) \quad \text{(定义)}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i) \quad \text{(归纳假设)}$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i). \qquad \square$$

定理 3.2.2 设 $A\in M_m(\mathbb{R})$, $B\in M_n(\mathbb{R})$, $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 令 $D=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$, 则 $\det(D)=\det(A)\cdot\det(B)$。

证明: 我们给出一个比较抽象的证明，它借助了我们一开始在 (3.0.1) 和 (3.0.2) 处的推导。如果不借助这个推导，我们也可以用 Laplace 定理证明这一结论，参见习题课讲义。

我们令

$$\begin{aligned}f:\ \mathbb{R}^m\times\cdots\times\mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\mathbf{A}^{(1)},\dots,\mathbf{A}^{(m)}) &\longmapsto \det(D).\end{aligned}$$

那么容易验证：固定 B,C 后 f 是一个 m 重的斜对称线性函数 (按照定义，留作练习)，于是按照推导 (3.0.2) 的结果，固定 B,C 后 f 是行列式的一个常数倍，即

$$\det(D)=f(\mathbf{A}^{(1)},\dots,\mathbf{A}^{(m)})=\lambda\det(A),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

下面只需要证明 $\lambda=\det(B)$ 即可。为此，我们取 $A=E_m$，则此时

$$\begin{aligned}\det(D)&=f(\mathbf{e}^{(1)},\dots,\mathbf{e}^{(m)})\\ &=\begin{vmatrix}E_m & C\\ O & B\end{vmatrix} \quad \text{(依次按第 1,2...,m 列展开得)}\\ &=\det(B)=\lambda\end{aligned}$$

即 $\det(D)=\det(A)\cdot\det(B)$。 $\square$

推论 3.2.1 设 $A\in M_m(\mathbb{R})$, $B\in M_n(\mathbb{R}), C\in\mathbb{R}^{n\times m}$, 则

(i) $\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=|A|\cdot|B|$;

(ii) $\begin{vmatrix}C & B\\ A & O\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A|\cdot|B|$。

证明: (i)$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^t & C^t \\ O & B^t \end{vmatrix} = |A^t| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B|$;

(ii)$\begin{vmatrix} C & B \\ A & O \end{vmatrix}$(交换行 mn 次)$= \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$。

下面的定理表明行列式保持矩阵的乘法。

定理 3.2.3 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$，则 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$。

证明: 我们仍然采用类似定理 3.2.2 的证明方法，这个定理的另一种证法是直接将 $\begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$ 通过初等变换变成 $\begin{pmatrix} O & AB \\ -E_n & B \end{pmatrix}$，留给读者思考。[1]

我们令

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\mathbf{B}^{(1)}, \ldots, \mathbf{B}^{(n)}) \longmapsto \det(AB) = \det(A\mathbf{B}^{(1)}, \ldots, A\mathbf{B}^{(n)}). \end{aligned}$$

固定 A，则容易验证 f 关于 B 的列向量是斜对称的 n 重线性函数 (留作练习)，则由推导 (3.0.2) 有 $\det(AB) = f(\mathbf{B}^{(1)}, \ldots, \mathbf{B}^{(n)}) = \lambda \det(B)$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$ 与 B 无关。于是，取 $B = E_n$ 即得到 $f(\mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(n)}) = \lambda = \det(A)$，从而 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$。 □

例 3.2.4 计算 $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 \\ 1 & \cos\theta_3 & \cos 2\theta_3 \end{vmatrix}$。

解: 原式 $= \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 \\ 1 & \cos\theta_3 & \cos^2\theta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)(\cos\theta_3 - \cos\theta_1)(\cos\theta_3 - \cos\theta_2)$。

注 3.2.1 定理 3.2.3 表明 $\det(AB) = \det(BA)$。(但 $\operatorname{rank}(AB) \neq \operatorname{rank}(BA)$，反例取例 2.4.5(2) 即可)。

定义 3.2.1 (Kronecker **符号**) 设 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，我们记 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$.

引理 3.2.1 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，则对 $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$，有:

(i)$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}|A|$;

(ii)$\sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj} = \delta_{ij}|A|$。

证明: 我们只证明 (i)，(ii) 同理，留作练习。设 $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$，$B = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{j-1} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{A}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{pmatrix}$，则由定理 3.2.1 有:

$$\det(B) = b_1A_{j1} + \cdots + b_nA_{jn}$$

(1)$\exists i \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n\}$，使得$\mathbf{b} = \mathbf{A}_i$，则 $\det(B) = 0$(列等性)，即 $a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$。

(2) 当 $i = j$ 时显然有 $B = A$，按第 i 行展开即有 $\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik} = \delta_{ii}|A|$。 □

[1]可以参考《高等代数 (上册)》§4.3.1，丘维声，清华大学出版社。

定义 3.2.2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，我们定义 A 的伴随矩阵 (classical adjoint)$A^\vee$ 如下：

$$A^\vee=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。

定理 3.2.4 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$，则 $AA^\vee=A^\vee A=|A|E_n$。

证明: 设 $A^\vee=(a'_{ij})_{n\times n}$，$AA^\vee=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $a'_{ij}=A_{ji}$，$b_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}|A|$，即 $AA^\vee=(|A|\delta_{ij})_{n\times n}=|A|E_n$。同理可证 $A^\vee A=|A|E_n$。 □

例 3.2.5 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$，求证 $\det(A^\vee)=|A|^{n-1}$。

证明: 当 $|A|=0$ 时，由 $AA^\vee=O$ 知 $\operatorname{rank}(A^\vee)<n$(这是因为若 $A=O$ 则 $A^\vee=O$，否则设 $0<r=\operatorname{rank}(A)<n$，则由 Sylvester 不等式有 $r+\operatorname{rank}(A)-n\leqslant 0$)，于是 $\det(A^\vee)=0$。
当 $|A|\neq 0$ 时，对 $AA^\vee=|A|E_n$ 两边取行列式即得 $|A|\det(A^\vee)=|A|^n$，即 $\det(A^\vee)=|A|^{n-1}$。 □

3.3 行列式的应用

这一节我们简单讨论一下行列式与线性方程组及矩阵的秩之间的联系。

定理 3.3.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$，则 A 可逆 $\Longleftrightarrow A^\vee$ 满秩，并且此时 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A^\vee$。

证明: ($\Longrightarrow$) 由于 A 可逆, 即 $\det(A) \neq 0$, 于是由定理 3.2.4 知 $A(\dfrac{1}{\det(A)}A^\vee) = E$, 即 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}A^\vee$。
($\Longleftarrow$) 由 $A^\vee$ 满秩知 $\det(A^\vee) \neq 0$，于是由例 3.2.5 得 $|A| \neq 0$，即 A 满秩 (可逆)。 □

下面我们考虑行列式与线性方程组的关系。

定理 3.3.2 (Cramer **法则**) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n)^t$，则方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow A$ 可逆，并且此时解为

$$x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{A}^{(2)}, \ldots, \mathbf{A}^{(n)})}{\det(A)},\ x_2 = \frac{\det(\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{(n)})}{\det(A)}, \ldots\ldots, x_n = \frac{\det(\mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(n-1)}, \mathbf{b})}{\det(A)}.$$

证明: ($\Longrightarrow$) 由命题 1.2.1 易证方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\Longleftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有 0 解，即 $V_A = \{\mathbf{0}\}$，所以 $\operatorname{rank}(A) = n$，即 A 可逆。
($\Longleftarrow$) 若 A 可逆，则 $A(A^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{b}$，即 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ 是方程组的解，若另有解 $\mathbf{x}'$，则 $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解，而 A 满秩推出 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有 0 解，即 $\mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}$。故解唯一。

下面利用定理 3.3.1 给出解的形式。由 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{\det(A)}A^\vee\mathbf{b}$ 可得：对 $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$，有

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)}A_i^\vee\mathbf{b} \\ &= \frac{1}{\det(A)}(b_1A_{1i} + \cdots + b_nA_{ni}) \\ &= \frac{1}{\det(A)}\det\left(\mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(i-1)}, \mathbf{b}, \mathbf{A}^{(i+1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(n)}\right). \end{aligned}$$

此即我们所需要的解，具体写出来就是

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}.$$

这样我们就完成了证明。 □

最后我们考虑行列式和矩阵的秩之间的联系。

定义 3.3.1 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $k \leqslant \min(m, n)$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$, $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$，则

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix}$$

称为 A 的 k 阶子式，记为 $M_A\binom{i_1,\cdots,i_k}{j_1,\cdots,j_k}$。

引理 3.3.1 设 $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$，则 $\mathbf{A}^{(j_1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(j_k)}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 存在子式 $M_A\binom{i_1,\cdots,i_k}{j_1,\cdots,j_k} \neq 0$。

证明: ($\Longrightarrow$) 令 $B = (\mathbf{A}^{(j_1)}, \cdots, \mathbf{A}^{(j_k)})_{m\times k}$，则 $\mathrm{rank}(B) = k$，于是存在 $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$ 使得 $\mathbf{B}_{i_1}, \ldots, \mathbf{B}_{i_k}$ 线性无关，再令 $B' = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{i_1} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{i_k} \end{pmatrix}_{k\times k}$，则 B' 满秩，于是 $\det(B') \neq 0$。B' 即所需要的 $M_A\binom{i_1,\cdots,i_k}{j_1,\cdots,j_k}$。
($\Longleftarrow$) 由 $M_A\binom{i_1,\cdots,i_k}{j_1,\cdots,j_k} \neq 0$ 可得方程组

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} \\ \vdots \\ a_{i_k,j_1} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} a_{i_1,j_k} \\ \vdots \\ a_{i_k,j_k} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

只有 0 解。于是添加一些方程后，有：

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{1,j_1} \\ \vdots \\ a_{n,j_1} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} a_{1,j_k} \\ \vdots \\ a_{n,j_k} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

也只有 0 解。即 $\mathbf{A}^{(j_1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(j_k)}$ 线性无关。 □

定理 3.3.3 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则以下条件等价：

(i) $\mathrm{rank}(A) = r$;
(ii) A 中存在一个 r 阶子式非零，而其它任何大于 r 阶的子式都是 0;
(iii) A 中存在一个 r 阶子式非零，而其它任何 $r+1$ 阶的子式都是 0。

证明: (i)$\Longrightarrow$(ii)：设 $\mathbf{A}^{(j_1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(j_r)}$ 线性无关，由引理 3.3.1，A 中存在一个 r 阶子式非零。若有 $s > r$ 使得一个 A 的 s 阶子式 $M_A\binom{i_1,\cdots,i_s}{j_1,\cdots,j_s}$ 非零，则由引理 3.3.1，其对应的列向量 $\mathbf{A}^{(j_1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(j_s)}$ 线性无关，这与 $\mathrm{rank}(A) = r$ 矛盾!
(ii)$\Longrightarrow$(iii)：显然。
(iii)$\Longrightarrow$(i)：由引理 3.3.1，A 中有 r 列线性无关，而任何 $r+1$ 列都线性相关，故 $\mathrm{rank}(A) = r$。 □

设 $M_A, \widetilde{M}_A$ 都是 A 的子式，若 M_A 可以由 $\widetilde{M}_A$ 去掉一端的行和一端的列得到，则我们称 $\widetilde{M}_A$ 是 M_A 的加边子式。

定理 3.3.4 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则 $\mathrm{rank}(A) = r \Longleftrightarrow A$ 有一个 r 阶的非零子式且这个子式的所有加边子式都是 0。

证明: ($\Longrightarrow$) 方向已经在定理 3.3.3 中证明。下面证明 ($\Longleftarrow$) 方向。
不妨设 $N = M\binom{1,2,\cdots,r}{1,2,\cdots,r} \neq 0$，则由引理 3.3.1 知 $\mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(r)}$ 线性无关。不计正负号下，N 的所有加边子式为 $M\binom{1,2,\cdots,r,i}{1,2,\cdots,r,j}$，其中 $i \in \{1, \ldots, m\}$，$j \in \{1, \ldots, n\}$。用反证法，假设 $\mathrm{rank}(A) \neq r$，则只可能是 $\mathrm{rank}(A) > r$，于是对任意的 i, j，有 $M\binom{1,2,\cdots,r,i}{1,2,\cdots,r,j} = 0$。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0$$

将上式按最后一行展开得 $a_{i1}c_1 + \cdots + a_{ir}c_r + a_{ij}N = 0$，其中 $c_1, \ldots, c_r$ 分别是子式 $M\binom{1,2,\cdots,r,i}{1,2,\cdots,r,j}$ 中 $a_{i1} \ldots, a_{ir}$ 的代数余子式。因为 $N \neq 0$，所以可以整理得到：

$$a_{ij} = (-\frac{c_1}{N})a_{i1} + \cdots + (-\frac{c_r}{N})a_{ir}$$

对任意 i, j 都成立。使 i 遍历 $\{1, \ldots, m\}$，即对任意的列指标 j，有

$$\mathbf{A}^{(j)} = (-\frac{c_1}{N})\mathbf{A}^{(1)} + \cdots + (-\frac{c_r}{N})\mathbf{A}^{(r)}.$$

即 $< \mathbf{A}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}^{(r)} >= V_c(A)$，于是 $\mathrm{rank}(A) \leqslant r$，与假设矛盾！这样我们就完成了证明。

有关行列式的计算技巧，我们不作过多介绍，读者可以参考习题课讲义及其他高等代数的标准教材。