第3章　整数関数 (Integer Functions)

3.1　切下げ関数と切上げ関数 (Floors and Ceilings)

切下げ関数 (Floor function):　$\lfloor x \rfloor = x$ 以下の整数のうち最大のもの (切下げ)

切上げ関数 (Ceiling function):　$\lceil x \rceil = x$ 以上の整数のうち最小のもの (切下げ)

規則 (Some Rules)

1. $\lfloor x \rfloor = x \iff x$ は整数 $\iff \lceil x \rceil = x$.
2. $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = (x$ は整数でない$)$.
3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
4. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$; $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.
5. $\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1$.
6. $\lfloor x \rfloor = n \iff x - 1 < n \leq x$.
7. $\lceil x \rceil = n \iff n - 1 < x \leq n$.
8. $\lceil x \rceil = n \iff x \leq n < x + 1$.
9. $x < n \iff \lfloor x \rfloor < n$.
10. $n < x \iff n < \lceil x \rceil$.
11. $x \leq n \iff \lceil x \rceil \leq n$.
12. $n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor$.

小数部 (Fractional part)　x と $\lfloor x \rfloor$ の差を x の小数部 *(fractional part)* と呼ぶ : $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$

整数部 (Integer part)　$\lfloor x \rfloor$ を x の整数部 *(integer part)* と呼ぶ。

3.2　切下げ関数と切上げ関数の応用 (Floor/Ceiling Applications)

問題の水準 (" Levels " of Question)

Level 1. 具体的なオブジェクト x と具体的な性質 $P(x)$ が与えられて、 $P(x)$ が真であることを証明せよ。

Level 2. 具体的な集合 X と具体的な性質 $P(x)$ が与えられて、すべての $x \in X$ に対して、 $P(x)$ が真であることを証明せよ。

Level 3. 具体的な集合 X と具体的な性質 $P(x)$ が与えられて、すべての $x \in X$ に対して、 $P(x)$ が真であることを証明するか、反証せよ。

Level 4. 具体的な集合 X と具体的な性質 $P(x)$ が与えられて、 $P(x)$ が真となる必要十分条件 $Q(x)$ を見つけよ。

Level 5. 具体的な集合 X が与えられて、その要素の “おもしろい性質 $P(x)$ を求めよ。”

区間 (Interval)　$[\alpha, \beta]$ は $\alpha \le x \le \beta$ であるような実数 x の集合を表す。この集合は、両端点 α と β を含むので、閉区間 *(closed interval)* と呼ばれる。どちらの端点も含まない区間は (α, β) で表し、 $\alpha < x < \beta$ であるようなすべての x からなる。これは、開区間 *(open interval)* と呼ばれる。一方の端点のみを含む区間 $[\alpha, \beta)$ と $(\alpha, \beta]$ は同様に定義され、半開 *(half-open)* と呼ばれる。

3.3　切下げ関数と切上げ関数に関する漸化式 (Floor/Ceiling Recurrence)

3.4　二項演算 mod (‘ Mod ’: The Binary Operation)

Mod と法 (Modulus)　任意の実数 x と y, $y \neq 0$ に対して、x **mod** y は x を y で割り算を行ったときの余り (remainder) として定義される :

$$x \bmod y = x - y\lfloor x/y \rfloor, \quad \text{for} \quad y \neq 0.$$

mod の後の数を法 *(modulus)* と呼ぶ。完全を期すため、次式を定義する。

$$x \bmod 0 = x.$$

分配則 (Distributive Law)　すべての実数 c, x, y に対して、

$$c(x \bmod y) = (cx) \bmod (cy).$$

3.5　切下げ関数と切上げ関数の和 (Floor/Ceiling Sums)