Chapter 4

解析几何 (I)：仿射空间

现在我们开始应用前三章的知识讨论解析几何的内容。我们很容易看到，向量空间与不带距离的“真实空间”类似，而欧氏空间则与带距离的“真实空间”类似。然而，向量空间中或欧氏空间中的向量或子空间都要求经过原点 $\mathbf{0}$，而我们在现实中需要不经过原点的向量和平面。因此，我们需要利用向量空间或欧氏空间构造出一个更贴近现实的空间。

4.1 仿射空间

仿射空间的实质与我们中学中学过的建坐标系法是相同的，即以“点”为元素，两点确定一个向量，所有向量构成一个向量空间，取定原点后向量空间的基底就是我们熟悉的坐标系。在仿射空间中，我们主要关注点、线、面之间的位置关系。

定义 4.1.1 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间，$\mathbb{A}$ 是一个非空集合，$\mathbb{A}$ 中的元素称为点 (point)，如果存在满足以下条件的加法映射 $+ : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}, (\dot{p}, \mathbf{x}) \mapsto \dot{p} + \mathbf{x} \in \mathbb{A}$:

(1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 及 $\dot{p} \in \mathbb{A}$，有 $(\dot{p} + \mathbf{x}) + \mathbf{y} = \dot{p} + (\mathbf{x} + \mathbf{y})$;

(2) $\forall \dot{p} \in \mathbb{A}$，$\dot{p} + \mathbf{0} = \dot{p}$;

(3) $\forall \dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}$，存在唯一的 $\mathbf{x} \in V$ 使得 $\dot{p} + \mathbf{x} = \dot{q}$(我们记为 $\mathbf{x} = \overline{pq}$ 或 $\mathbf{x} = \dot{q} - \dot{p}$)。

则称 $\mathbb{A}$ 是一个与 V 相伴的仿射空间 (affine space)。我们定义 $\mathbb{A}$ 的维数 $\dim(\mathbb{A}) = \dim(V) = n$。如果 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$)，则我们称 $\mathbb{A}$ 是实 (或复) 仿射空间。

例 4.1.1 (1) 向量空间 V 本身可以视作与 V 相伴的仿射空间，其加法映射就是 V 上的加法。因此，向量空间中的元素也可以视作点。

(2) 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间，U 是 V 的子空间。取定 $\mathbf{v}_0 \in V$，以 V 上的加法作为加法映射，则容易验证陪集 $\mathbb{A} = \mathbf{v}_0 + U$ 是与 U 相伴的仿射空间。我们称 $\mathbb{A}$ 是**仿射空间** V 中的一个仿射线性流形或者仿射子空间，U 是这个仿射子空间的方向。

定义 4.1.2 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间，$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基。令 $\mathbb{A}$ 是与 V 相伴的仿射空间，取定点 $\dot{o} \in \mathbb{A}$，则我们称 $(\dot{o}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 构成了 $\mathbb{A}$ 的一个仿射坐标系 (或称仿射标架，affine coordinate frame)，其中 $\dot{o}$ 称为仿射坐标系的原点。

我们有：

命题 4.1.1 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$(\dot{o}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个仿射坐标系，则 $\forall \dot{p} \in \mathbb{A}$，存在唯一一组 $(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{K}^n$ 使得

$$\dot{p} = \dot{o} + \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

我们称 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 是 $\dot{p}$ 在此仿射坐标系下的坐标。

证明：由仿射空间的定义，我们知道 $\overline{op} \in V$，设向量 $\overline{op}$ 在基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$，则 $\overline{op} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$，再用一次仿射空间的定义 (定义 4.1.1的 (3)) 即得 $\dot{p} = \dot{o} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$。 □

有了坐标系和坐标，我们自然要考虑坐标变换的问题。

命题 4.1.2 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$(\dot{o}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 和 $(\dot{o}', \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ 是 $\mathbb{A}$ 的两个仿射坐标系。设 $\dot{p} \in \mathbb{A}$ 在 $(\dot{o}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 下的坐标是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$，在 $(\dot{o}', \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ 下的坐标是 $(x'_1, \ldots, x'_n)^t$，点 $\dot{o}'$ 在 $(\dot{o}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 下的坐标是 $(b_1, \ldots, b_n)^t$，而且 $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A$，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{4.1.1}$$

证明：利用定义 4.1.1的 (1) 和 (3) 我们有：

$$\dot{o} + \overline{op} = \dot{p}$$
$$\dot{o} + \overline{oo'} + \overline{o'p} = \dot{p}$$

于是由两点间向量的唯一性，$\overline{op} = \overline{oo'} + \overline{o'p}$。由坐标的定义我们知道：

$$\overline{op} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\overline{oo'} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\overline{o'p} = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

将以上各式代入 $\overline{op} = \overline{oo'} + \overline{o'p}$ 即得

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

由于 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的基，一个向量在一组基底下的坐标是唯一的，故式 (4.1.1) 成立。 □

接下来我们研究的思路和研究向量空间类似，我们将依次考虑仿射空间的子空间、仿射组合和仿射包络、仿射相关 (或无关)，以及仿射映射和仿射变换。

定义 4.1.3 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$U \subset V$ 是 V 的 m 维子空间。任意固定 $\dot{p} \in \mathbb{A}$，则集合

$$\Pi = \dot{p} + U = \{\dot{p} + \mathbf{u} \mid \forall \mathbf{u} \in U\}$$

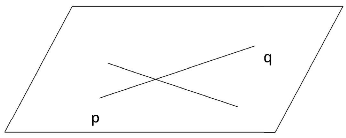
被称为 $\mathbb{A}$ 的一个 m 维仿射子空间或者平面 (flat)，其中 U 称为 Π 的方向子空间。Π 也称为过点 $\dot{p}$ 的以 U 为方向的平面。自然，0 维平面就是点，我们把 1 维的平面也称为直线 (line)，$n-1$ 维的平面称为超平面 (hyperplane)。

我们很容易验证：(1) 如果 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，则 Π 是以 U 为方向的平面 $\Longleftrightarrow$ Π 本身也是与 U 相伴的仿射空间 (留作练习)。
(2) 仿射空间中两个平面的交集或者是 $\emptyset$，或者仍是平面 (因为向量空间的子空间之交仍是子空间，细节留作练习)。
(3) 如果 Π 是仿射空间 $\mathbb{A}$ 中的平面，其方向子空间为 U，那么 $\forall \dot{q} \in \Pi$，都有 $\Pi = \dot{q} + U$。这是因为 $\dot{q} + U$ 也是平面，之后验证互相包含即可。

容易看出，仿射空间中的直线与现实中的直线已经很类似了：任取两个不同的点 $\dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}$，我们可以唯一地确定一条直线：$L_{pq} = \{\dot{r} \in \mathbb{A} \mid \dot{r} = \dot{p} + \lambda\overline{pq}, \forall \lambda \in \mathbb{K}\}$。实际上我们有以下结论：

命题 4.1.3 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}(\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2)$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，则子集 $\Pi \subset \mathbb{A}$ 是平面 $\Longleftrightarrow$ 任取 $\dot{p}, \dot{q} \in \Pi$，直线 $L_{pq} \subset \Pi$。

证明留作思考。这个命题的几何直观是显然的。



下面我们定义仿射组合。首先给出一个辅助定义：设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间，向量组 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset V$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$。如果 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$，则我们称线性组合 $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i$ 是向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ 的仿射组合。现在我们需要把仿射组合推广到仿射空间上，为此我们需要以下定理：

定理 4.1.1 设 V 是域 $\mathbb{K}(\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2)$ 上的 n 维向量空间，X 是 V 的非空子集，则以下条件等价：

(1) 任取 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$，则 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的任意仿射组合也在 X 中；

(2) 任取 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in X$，则 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ 的任意仿射组合也在 X 中；

(3) 将 V 视作与 V 本身相伴的仿射空间，X 是 V 中的平面。

证明: (1)$\Longrightarrow$(2)：对 m 用数学归纳法。$m = 2$ 显然成立，如果结论对 $m-1$ 成立，则对 m 的情形，不妨设 $\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m$ 是 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ 的一个仿射组合 (即 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) 并且 $\lambda_1 \neq 0$，由于 $m-1$ 的情形成立 (归纳假设)，即 $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ 的一个仿射组合

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}\mathbf{x}_2 + \cdots + \frac{\lambda_m}{1-\lambda_1}\mathbf{x}_m \in X$$

因此由 (1) 可知

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mathbf{x}_i = \lambda_1\underbrace{\mathbf{x}_1}_{\in X}+(1-\lambda_1)\underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}\mathbf{x}_2+\cdots+\frac{\lambda_m}{1-\lambda_1}\mathbf{x}_m\right)}_{\in X}\in X$$

因此 m 时 (1)$\Longrightarrow$(2) 也成立。于是 (1)$\Longrightarrow$(2) 成立。
(2)$\Longrightarrow$(3)：由于 X 非空，因此一定存在 $\mathbf{v}\in X$，要证 X 是仿射空间 V 中的平面 (即仿射子空间)，我们只需证明存在向量空间 V 的线性子空间 U 使得 $X=\mathbf{v}+U$ 即可。

实际上，令 $U=\{\mathbf{x}-\mathbf{v}\mid\forall\mathbf{x}\in X\}$，则 $X=\mathbf{v}+U$ 一定成立，下面我们只需说明这样构造出的 U 是 V 的线性子空间。首先，容易看出 $\mathbf{0}=\mathbf{v}-\mathbf{v}\in U$；其次，任取 $\mathbf{u}_1=\mathbf{x}_1-\mathbf{v},\mathbf{u}_2=\mathbf{x}_2-\mathbf{v}\in U$，即 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in X$ 以及 $a_1,a_2\in\mathbb{K}$，我们有

$$\begin{aligned}a_1\mathbf{u}_1+a_2\mathbf{u}_2&=a_1(\mathbf{x}_1-\mathbf{v})+a_2(\mathbf{x}_2-\mathbf{v})\\&=a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+(1-a_1-a_2)\mathbf{v}-\mathbf{v}\end{aligned}$$

由于 $a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+(1-a_1-a_2)\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{v}$ 的仿射组合，而由 (2)，X 对仿射组合封闭，，所以 $a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+(1-a_1-a_2)\mathbf{v}\in X$，即 $a_1\mathbf{u}_1+a_2\mathbf{u}_2=a_1\mathbf{x}_1+a_2\mathbf{x}_2+(1-a_1-a_2)\mathbf{v}-\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{x}-\mathbf{v},\mathbf{x}\in X$ 的形式，$a_1\mathbf{u}_1+a_2\mathbf{u}_2\in U$。此即 U 是 V 的线性子空间。因此 X 是仿射空间 V 中的平面。
(3)$\Longrightarrow$(1)：如果 X 是仿射空间 V 中的平面，则 X 一定可以写成 $\mathbf{v}+U,\mathbf{v}\in X$ 的形式，其中 U 是向量空间 V 的线性子空间。那么，任取 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$ 及 $\lambda\in\mathbb{K}$，我们有

$$\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}=\mathbf{v}+\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{v})+(1-\lambda)(\mathbf{y}-\mathbf{v})$$

由 U 是线性子空间以及 $\mathbf{x}-\mathbf{v},\mathbf{y}-\mathbf{v}\in U$ 可知 $\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{v})+(1-\lambda)(\mathbf{y}-\mathbf{v})\in U$，因此 $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}$ 也具有 $\mathbf{v}+\mathbf{u},\mathbf{u}\in U$ 的形式，即 $\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y}\in X$。这样我们就完成了证明。 □

下面转入点的仿射组合。

命题 4.1.4 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，任意固定 $k+1$ 个点 $\dot{p}_0,\ldots,\dot{p}_k\in\mathbb{A}$，另外固定 $k+1$ 个数 $\alpha_0,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{K}$，$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i=1$，则任取点 $\dot{p}\in\mathbb{A}$，点 $\dot{p}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{pp_i}$ 的位置都与“基点”$\dot{p}$ 无关。

证明：我们只需证明：任意另取 $\dot{q}\in\mathbb{A}$，有 $\dot{q}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{qp_i}=\dot{p}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{pp_i}$ 即可。设 $\dot{p}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{pp_i}+\mathbf{v}=\dot{q}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{qp_i}$，我们来证明 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$。注意到

$$\begin{aligned}\mathbf{v}&=\overline{pq}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{qp_i}-\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{pp_i}\\&=\overline{pq}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i(\overline{qp_i}-\overline{pp_i})\\&=\overline{pq}-\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{pq}\\&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

此即 $\dot{p}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{pp_i}$ 的位置与 $\dot{p}$ 无关。 □

于是我们可以定义仿射空间中点的仿射组合如下：

定义 4.1.4 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$k+1$ 个点 $\dot{p}_0,\ldots,\dot{p}_k \in \mathbb{A}$ 的仿射组合 (affine combination) 是指点 $\dot{p}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{pp_i}$，其中 $\sum_{i=0}^{k}\alpha_i=1$，$\dot{p}\in\mathbb{A}$ 是任意的点。由上面的推论可知仿射组合与 $\dot{p}$ 的选取无关，因此我们把点 $\dot{p}+\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\overline{pp_i}$ 记作 $\alpha_0\dot{p}_0+\cdots+\alpha_k\dot{p}_k$ 或 $\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\dot{p}_i$。

我们有：

推论 4.1.1 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，X 是 $\mathbb{A}$ 的非空子集，则以下条件等价：

(1) 任取 $\dot{p},\dot{q}\in X$，则 $\dot{p},\dot{q}$ 的任意仿射组合也在 X 中；

(2) 任取 $\dot{p}_1,\ldots,\dot{p}_m\in X$，则 $\dot{p}_1,\ldots,\dot{p}_m$ 的任意仿射组合也在 X 中；

(3) X 是 $\mathbb{A}$ 中的平面。

证明: (1)$\Longrightarrow$(2)：我们已经在命题 4.1.4中说明了点的仿射组合是良定义的，因此此处的证明与定理 4.1.1的证明相同。
(2)$\Longrightarrow$(3)：由于 X 非空，因此一定存在 $\dot{p}\in X$，要证 X 是仿射空间 V 中的平面 (即仿射子空间)，我们只需证明存在向量空间 V 的线性子空间 U 使得 $X=\dot{p}+U$ 即可。实际上，令 $U=\{\mathbf{u}=\overline{pq}\in V \mid \forall\dot{q}\in X\}$，则 $X=\dot{p}+U$ 一定成立，于是我们只需说明这样构造出的 U 是 V 的线性子空间。而这个证明与定理 4.1.1的证明相同。(3)$\Longrightarrow$(1)：如果 X 是仿射空间 $\mathbb{A}$ 中的平面，则 X 一定可以写成 $\dot{p}+U,\dot{p}\in X$ 的形式，其中 U 是向量空间 V 的线性子空间。那么，任取 $\dot{p}_1,\dot{p}_2\in X$ 及 $\lambda\in\mathbb{K}$，我们有

$$\lambda\dot{p}_1+(1-\lambda)\dot{p}_2=\dot{p}+\lambda\overline{pp_1}+(1-\lambda)\overline{pp_2}$$

由 U 是线性子空间以及 $\overline{pp_1},\overline{pp_2}\in U$ 可知 $\lambda\overline{pp_1}+(1-\lambda)\overline{pp_2}\in U$，因此 $\lambda\dot{p}_1+(1-\lambda)\dot{p}_2$ 也具有 $\dot{p}+\mathbf{u},\mathbf{u}\in U$ 的形式，即 $\lambda\dot{p}_1+(1-\lambda)\dot{p}_2\in X$。可以看到这个证明与定理 4.1.1的对应部分的证明类似。 □

于是我们可以定义点集的仿射包络如下：

定义 4.1.5 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，M 是 $\mathbb{A}$ 的非空子集，我们称

$$\mathbb{A}(M)=\{\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\dot{p}_i\in\mathbb{A}\mid\forall k\in\mathbb{N},\ \dot{p}_0,\ldots,\dot{p}_k\in M,\ \alpha_0,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{K}\text{满足}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i=1\}.$$

是 M 的仿射包络 (affine span)，也记作 $\operatorname{aff}M$。

例 4.1.2 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间.

(i) 很容易看出一个点 $\dot{p}\in\mathbb{A}$ 的仿射包络 $\mathbb{A}(\{\dot{p}\})=\{\dot{p}\}$。、

(ii) 两个点 $\dot{p},\dot{q}\in\mathbb{A}$ 的仿射包络是过这两点的直线 L_{pq}：任取 $\dot{r}\in\mathbb{A}(\{\dot{p},\dot{q}\})$，则存在 $\alpha\in\mathbb{K}$ 使得 $\dot{r}=\alpha\dot{p}+(1-\alpha)\dot{q}$，按仿射组合的定义我们有

$$\begin{aligned}\alpha\dot{p}+(1-\alpha)\dot{q}&=\dot{p}+\alpha\overline{pp}+(1-\alpha)\overline{pq}\qquad(\text{把“基点”就取成}\dot{p})\\&=\dot{p}+(1-\alpha)\overline{pq}\in L_{pq}\end{aligned}$$

即 $\mathbb{A}(\{\dot{p},\dot{q}\})\subset L_{pq}$。反之，很容易验证 $\dot{r}=\dot{p}+\lambda\overline{pq}\in L_{pq}$ 一定可以写成仿射组合 $(1-\lambda)\dot{p}+\lambda\dot{q}$ 的形式，即 $\mathbb{A}(\{\dot{p},\dot{q}\})\supset L_{pq}$。综上所述，$\mathbb{A}(\{\dot{p},\dot{q}\})=L_{pq}$。

定理 4.1.2 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，M 是 $\mathbb{A}$ 的非空子集，则仿射包络 $\mathbb{A}(M)$ 一定是 $\mathbb{A}$ 中的平面。

证明: 我们利用推论 4.1.1的 (1)$\Longleftrightarrow$(3) 来证明这个定理。任取 $\dot{p} = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i \dot{p}_i$，$\dot{q} = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \dot{q}_j \in \mathbb{A}(M)$，即 $\sum_{i=0}^{l} \alpha_i = \sum_{j=0}^{m} \beta_j = 1$ 并且所有的 $\dot{p}_i$ 和 $\dot{q}_j$ 都是 M 中的点，则任取 $\lambda \in \mathbb{K}$，我们有

$$\lambda \dot{p} + (1-\lambda)\dot{q} = \sum_{i=0}^{l} \lambda \alpha_i \dot{p}_i + \sum_{j=0}^{m} (1-\lambda)\beta_j \dot{q}_j$$

容易计算出 $\sum_{i=0}^{l} \lambda + \sum_{j=0}^{m} (1-\lambda)\beta_j = 1$，因此 $\lambda \dot{p} + (1-\lambda)\dot{q}$ 仍然是 M 中的点的仿射组合，故 $\lambda \dot{p} + (1-\lambda)\dot{q} \in \mathbb{A}(M)$。由推论 4.1.1的 (1)$\Longleftrightarrow$(3) 即可得到 $\mathbb{A}(M)$ 是 $\mathbb{A}$ 中的平面。 □

我们很容易证明：如果 M 是有限集并且 M 中有 $k+1$ 个不同的点，那么 $\dim(\mathbb{A}(M)) \leqslant k$。将仿射组合改写成点加上向量的线性组合后利用线性包络的维数不超过基向量的个数即可证明，细节留作练习。

有了仿射包络，下面我们就可以定义仿射空间中的仿射相关和仿射无关了。

定义 4.1.6 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$n+1$ 个点 $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n \in \mathbb{A}$。如果 $\dim(\mathbb{A}(\{\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n\})) = n$，则我们称点 $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n$ 仿射无关 (affine independent)(或称这些点处于一般位置)；如果 $\dim(\mathbb{A}(\{\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n\})) < n$，则我们称点 $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n$ 仿射相关 (affine dependent)。

例 4.1.3 在 $\mathbb{R}$ 上与 $\mathbb{R}^2$ 相伴的 2 维仿射空间 $\mathbb{A}$ 中，容易看出 $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \dot{p}_2 \in \mathbb{A}$ 仿射相关 $\Longleftrightarrow$ 这三点位于同一条直线上；换言之，在此仿射空间中任意不共线的三点都仿射无关。

于是我们也可以用点的仿射组合来表示点，这就是下面的重心坐标。

定义 4.1.7 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$n+1$ 个点 $\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n \in \mathbb{A}$ 仿射无关。则任取 $\dot{p} \in \mathbb{A}$，存在唯一一组 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$，$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ 满足 $\dot{p} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \dot{p}_i$。我们称有序组 $(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个重心坐标系，$(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)^t \in \mathbb{K}^{n+1}$ 是 $\dot{p}$ 在 $(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ 下的重心坐标 (barycentric coordinate)。

我们很容易验证：$\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n \in \mathbb{A}$ 仿射无关 $\Longleftrightarrow$ 向量组 $\overline{p_0p_1}, \ldots, \overline{p_0p_n}$ 线性无关，留作练习。

例 4.1.4 将 $\mathbb{R}^2$ 视作与其本身相伴的仿射空间，任取其内的一个非退化的三角形，将这个三角形的三个顶点作为一个重心坐标系，则三角形重心的重心坐标是 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})^t$。

接下来我们考虑仿射空间之间保持“比例”(或者说保持仿射组合) 的映射，即仿射映射。

定义 4.1.8 设 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 分别是是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 和 V' 相伴的 n,m 维仿射空间，$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 满足：任取点 $\dot{p}_0, \ldots, \dot{p}_k \in \mathbb{A}$ 的一个仿射组合 $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \dot{p}_i$(即 $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i$)，有 $f(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \dot{p}_i) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f(\dot{p}_i)$ 成立，则我们称 f 是一个仿射映射 (affine map)。

按定义我们很容易验证：如果 $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$，$g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ 都是仿射映射，则 $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}''$ 也是仿射映射，过程留作练习。我们之所以说仿射映射是保持“比例”的映射，是因为我们有以下定理：

定理 4.1.3 设 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 分别是是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 和 V' 相伴的 n,m 维仿射空间，则以下条件等价：

(1) $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是仿射映射。

(2) 任取 $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ 的仿射坐标系 $(\dot{o}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ 和 $(\dot{o}', \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m)$, 对任意 $\dot{p} \in \mathbb{A}, \dot{p}$ 的坐标是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$, 则 $f(\dot{p})$ 的坐标是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

其中 $(v_1, \ldots, v_m)^t$ 是 $f(\dot{o})$ 在 $(\dot{o}', \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m)$ 下的坐标, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$。换言之, 固定 $\dot{o} \in \mathbb{A}$, 则存在线性映射 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V')$ 使得对 $\forall \dot{p} \in \mathbb{A}$, $f(\dot{p}) = f(\dot{o}) + \mathcal{A}\overline{op}$。

(3) 任取 $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dot{s} \in \mathbb{A}$ 满足 $\overline{rs} = \lambda\overline{pq}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, 则 $\overline{f(\dot{r})f(\dot{s})} = \lambda \cdot \overline{f(\dot{p})f(\dot{q})}$。

证明: (1)$\Longrightarrow$(2): 我们来证明第二个叙述。注意到利用 f 我们可以定义 $V \to V'$ 的映射

$$\mathcal{A} : V \longrightarrow V', \ \overline{op} \longmapsto \overline{f(\dot{o})f(\dot{p})}$$

则 $f(\dot{p}) = f(\dot{o}) + \overline{f(\dot{o})f(\dot{p})} = f(\dot{o}) + \mathcal{A}\overline{op}$ 一定成立。下面我们需要证明 $\mathcal{A}$ 是线性映射: 由于 f 保持仿射组合, 故 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ 及 $\overline{op_1}, \overline{op_2} \in V$, 我们有

$$\begin{aligned} f(\dot{o} + x_1\overline{op_1} + x_2\overline{op_2}) &= f((1 - x_1 - x_2)\dot{o} + x_1\dot{p}_1 + x_2\dot{p}_2) \\ &= (1 - x_1 - x_2)f(\dot{o}) + x_1 f(\dot{p}_1) + x_2 f(\dot{p}_2) \\ &= f(\dot{o}) + x_1\overline{f(\dot{o})f(\dot{p}_1)} + x_2\overline{f(\dot{o})f(\dot{p}_2)} \end{aligned}$$

令 $\dot{q} = \dot{o} + x_1\overline{op_1} + x_2\overline{op_2}$, 利用上式及 $\mathcal{A}$ 的定义我们有

$$f(\dot{o}) + \mathcal{A}\overline{oq} = f(\dot{o}) + x_1\overline{f(\dot{o})f(\dot{p}_1)} + x_2\overline{f(\dot{o})f(\dot{p}_2)} = f(\dot{o}) + x_1\mathcal{A}\overline{op_1} + x_2\mathcal{A}\overline{op_2}$$

即 $\mathcal{A}(x_1\overline{op_1} + x_2\overline{op_2}) = x_1\mathcal{A}\overline{op_1} + x_2\mathcal{A}\overline{op_2}$, $\mathcal{A}$ 是线性映射得证。之后, 设 $\mathcal{A}$ 在 V 和 V' 的基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$ 的矩阵是 $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, 则 $\overline{f(\dot{o})f(\dot{p})}$ 在 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m$ 下的坐标正是 $A \cdot (x_1, \ldots, x_n)^t$, 即在仿射坐标系 $(f(\dot{o}), \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m)$ 下 $f(\dot{p})$ 的坐标是 $A \cdot (x_1, \ldots, x_n)^t$, 再利用仿射坐标系的坐标变换 (命题 4.1.2) 我们就可以完成该方向的证明 (细节是容易的, 留作练习)。

(2)$\Longrightarrow$(3): 利用 (2) 的条件我们立刻有:

$$\begin{aligned} \overline{f(\dot{r})f(\dot{s})} &= \mathcal{A}\overline{rs} \\ &= \lambda\mathcal{A}\overline{pq} \\ &= \lambda\overline{f(\dot{p})f(\dot{q})}. \end{aligned}$$

该方向证毕。

(3)$\Longrightarrow$(2): 令 $\mathcal{A} : V \to V'$, $\overline{pq} \mapsto \overline{f(\dot{p})f(\dot{q})}$, 则固定 $\dot{o} \in \mathbb{A}$, 对任意的 $\dot{p} \in \mathbb{A}$, $\mathcal{A}$ 一定满足:

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o}) + \mathcal{A}\overline{op}.$$

下面我们只需说明 $\mathcal{A}$ 是线性映射即可证明该方向。对 $\forall\overline{pq}, \overline{qr} \in V$(容易看出 V 中的任意两个向量一定可以写成这样首尾相接的形式), 一方面 $\mathcal{A}(\overline{pq} + \overline{qr}) = \mathcal{A}\overline{pr} = \overline{f(\dot{p})f(\dot{r})}$; 另一方面 $\mathcal{A}\overline{pq} + \mathcal{A}\overline{qr} = \overline{f(\dot{p})f(\dot{q})} + \overline{f(\dot{q})f(\dot{r})} = \overline{f(\dot{p})f(\dot{r})}$, 这说明 $\mathcal{A}(\overline{pq} + \overline{qr}) = \mathcal{A}\overline{pq} + \mathcal{A}\overline{qr}$, 即 $\mathcal{A}$ 保持向量的加法。$\mathcal{A}$ 保持数乘是 (3) 的直接结论, 因此 $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, V')$。该方向证毕。

(2)$\Longrightarrow$(1)：固定 $\dot{o}\in\mathbb{A}$，设 f 满足：存在线性映射 $\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V')$ 使得对 $\forall\dot{p}\in\mathbb{A}$，$f(\dot{p})=f(\dot{o})+\mathcal{A}\overline{op}$，我们来证明 f 保持仿射组合。任取仿射组合 $\sum_{i=0}^{k}x_i\dot{p}_i\in\mathbb{A}$，其中 $\sum_{i=0}^{k}x_i=1$，则

$$\begin{aligned}f(\sum_{i=0}^{k}x_i\dot{p}_i)&=f(\dot{o}+\sum_{i=0}^{k}x_i\overline{op_i})\\&=f(\dot{o})+\mathcal{A}(\sum_{i=0}^{k}x_i\overline{op_i})\\&=\sum_{i=0}^{k}x_i(f(\dot{o})+\mathcal{A}\overline{op_i})\\&=\sum_{i=0}^{k}x_if(\dot{p}_i)\end{aligned}$$

此即 f 保持仿射组合。

综上所述，定理成立。 □

特别地，我们关注 $\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 本身的仿射映射，我们称之为仿射变换 (affine transformation)。利用上面的定理我们立刻可以得到仿射变换的结构。

定义 4.1.9 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 是 $\mathbb{A}$ 上的仿射变换，如果存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $\forall\dot{p}\in\mathbb{A}$，$f(\dot{p})=\dot{p}+\mathbf{v}$，则我们称 f 是 $\mathbb{A}$ 上的一个平移 (translation)，并记作 $f=T_{\mathbf{v}}$。

推论 4.1.2 设 V 是域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维向量空间，将 V 本身视作与 V 相伴的仿射空间，则 $f:V\to V$ 是 V 上的仿射变换 $\Longleftrightarrow$ 存在 $\mathbf{v}\in V$ 使得 $f=T_{\mathbf{v}}\circ\mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$。

证明即定理 4.1.3的 (1) $\Longleftrightarrow$ (2)。

设 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 分别是是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 和 V' 相伴的仿射空间，如果存在双射 $f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ 是仿射映射，则我们称 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 仿射同构，f 是仿射同构映射。很容易证明 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 仿射同构 $\Longleftrightarrow$ $\dim(\mathbb{A})=\dim(\mathbb{A}')$，留作练习。特别地，任何与 V 相伴的仿射空间 $\mathbb{A}$ 都一定与 V 本身 (视作仿射空间) 仿射同构。

推论 4.1.3 (1) 设 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 分别是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 和 V' 相伴的仿射空间，$f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ 是仿射映射并且固定 $\dot{o}\in\mathbb{A}$，对 $\forall\dot{p}\in\mathbb{A}$ 有 $f(\dot{p})=f(\dot{o})+\mathcal{A}\overline{op}$，$\mathcal{A}\in\mathrm{Hom}(V,V')$。则 f 是仿射同构映射 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是 V 到 V' 的线性同构。

(2) 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，则 $\mathbb{A}$ 的所有自同构 (即 $\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 的同构映射) 在映射复合运算下构成一个群。我们把这个群称为仿射变换群，记作 $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$。

证明: (1) 是显然的，因为容易看出 f 是双射 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 是双射。下面我们证明 (2)。设 f,g 都是 $\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 的自同构，则显然 $f\circ g$ 也是 $\mathbb{A}\to\mathbb{A}$ 的自同构，封闭性成立；结合律即映射复合的结合律；乘法幺元是恒等映射；固定原点 $\dot{o}\in\mathbb{A}$，$f:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$，$\dot{p}\mapsto f(\dot{o})+\mathcal{A}\overline{op},\mathcal{A}\in\mathrm{End}(V)$ 的逆元是 $g:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$，$\dot{q}\mapsto\dot{o}+\mathcal{A}^{-1}\overline{f(\dot{o})q}$(容易验证 $f\circ g=g\circ f=\mathrm{id}$，留作练习)。这样我们就证明了 $\mathbb{A}$ 的所有自同构在映射复合下构成群。 □

下面考虑仿射群的粗略结构。

命题 4.1.5 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，任意固定原点 $\dot{o} \in \mathbb{A}$，则 $\mathrm{Aff}(\mathbb{A}) = \{T_{\mathbf{v}} \circ A \mid \mathbf{v} \in V,\ A \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$并且$\mathcal{A}\dot{o} = \dot{o}\}$，即 A 可视作 V 上的可逆线性算子 $\mathcal{A}$，$A\dot{p} = \dot{o} + \mathcal{A}\overline{op}$。我们把 V 上所有可逆线性算子在映射复合下构成的群记为 $\mathrm{GL}(V)$，令

$$\varPhi : \mathrm{Aff}(\mathbb{A}) \to \mathrm{GL}(V),\ f = T_{\mathbf{v}} \circ A \mapsto \mathcal{A}$$

则 $\varPhi$ 是满的群同态，并且 $\ker(\varPhi) = \{T_{\mathbf{v}} \mid \forall \mathbf{v} \in V\}$(称为平移群) 是 $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ 的子群 (实际上是正规子群)。

证明: 推论 4.1.2以及 $\mathbb{A}$ 与 V 仿射同构保证了 $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ 中的元素都可以写成 $T_{\mathbf{v}} \circ A$ 的形式。下面说明 $\varPhi$ 是满同态。

首先 $\varPhi$ 是满射，因为任取 $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(V)$ 都可以定义 $A : \mathbb{A} \to \mathbb{A},\ \dot{p} \mapsto \dot{o} + \mathcal{A}\overline{op}$，则 $A \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ 并且 $\varPhi(A) = \mathcal{A}$。

其次，设 $f, g \in \mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ 并且 $f = T_{\mathbf{v}} \circ A$，$g = T_{\mathbf{u}} \circ B$，$\varPhi(f) = \mathcal{A}$，$\varPhi(g) = \mathcal{B}$，那么：

$$\begin{aligned} f \circ g &= T_{\mathbf{v}} \circ A \circ T_{\mathbf{u}} \circ B \\ &= T_{\mathbf{v}} \circ T_{\mathcal{A}\mathbf{u}} \circ A \circ B \\ &= T_{\mathbf{v}+\mathcal{A}\mathbf{u}} \circ A \circ B \end{aligned}$$

其中第一行到第二行利用了 $A \circ T_{\mathbf{u}} = T_{\mathcal{A}\mathbf{u}} \circ A$，这是因为 $\forall \dot{p} \in \mathbb{A}$，都有 $A \circ T_{\mathbf{u}}(\dot{p}) = A(\dot{p} + \mathbf{u}) = \dot{o} + \mathcal{A}(\overline{op} + \mathbf{u}) = \dot{o} + \mathcal{A}\overline{op} + \mathcal{A}\mathbf{u} = T_{\mathbf{u}} \circ A(\dot{p})$。于是 $\varPhi(f \circ g) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \varPhi(f) \circ \varPhi(g)$，即 $\varPhi$ 是同态。

最后我们来求 $\ker(\varPhi)$。如果 $\varPhi(f) = \mathcal{E}$，那么一定有 $f = T_{\mathbf{v}} \circ \mathrm{id} = T_{\mathbf{v}}$，即 f 是平移。此即 $\ker(\varPhi) = \{T_{\mathbf{v}} \mid \forall \mathbf{v} \in V\}$. 由讲义上册定义 4.2.11 下方的说明立刻可知 $\ker(\varPhi)$ 是 $\mathrm{Aff}(\mathbb{A})$ 的正规子群。 □

接下来我们考虑另一类特殊的仿射映射：仿射线性函数，并讨论它和非齐次的线性方程组之间的关系。

定义 4.1.10 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$f : \mathbb{A} \to \mathbb{K}$ 是仿射映射 (将 $\mathbb{K}$ 视作与其本身相伴的 1 维仿射空间)，则我们称 f 是一个仿射线性函数。

命题 4.1.6 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$(\dot{p}_0, \dot{p}_1, \ldots, \dot{p}_n)$ 是 $\mathbb{A}$ 的一个重心坐标系，则每个点映到其坐标分量的函数 $f_k : \mathbb{A} \to \mathbb{K},\ \sum_{i=0}^{n} x_i\dot{p}_i \mapsto x_k,\ k \in \{1, \ldots, n\}$ 是仿射线性函数。

证明: 我们验证每个 f_k 都保持仿射组合。任取 $\dot{q}_j = \sum_{i=0}^{n} x_{ij}\dot{p}_i \in \mathbb{A},\ j \in \{0, \ldots, m\}$ 及 $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$，$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j = 1$，则

$$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \dot{q}_j = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j (\sum_{i=0}^{n} x_{ij}\dot{p}_i) = \sum_{i=0}^{n} (\sum_{j=0}^{m} \lambda_j x_{ij})\dot{p}_i$$

因此 $f_k(\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \dot{q}_j) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j x_{kj}$。另一方面，$\sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_k(\dot{p}_j) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j x_{kj}$，故 $f_k(\sum_{j=0}^{m} \lambda_j \dot{q}_j) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_k(\dot{p}_j)$。这样我们就完成了证明。 □

我们在 1.5 节中研究过抽象的齐次线性方程组，类似地，我们也可以考虑在仿射空间中求解一些仿射线性函数的核的交集，这就是抽象的非齐次线性方程组。

定义 4.1.11 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$f_1,\ldots,f_m$ 是 $\mathbb{A}$ 上的仿射线性函数，则我们称方程组

$$\begin{cases} f_1(\dot{x})=0 \\ f_2(\dot{x})=0 \\ \quad\vdots \\ f_m(\dot{x})=0 \end{cases}，\quad 其中\dot{x}\in\mathbb{A}. \tag{L}$$

是抽象的非齐次线性方程组，称 $\Pi=\{\dot{x}\in\mathbb{A}\mid\forall i=1,\ldots,m,\ f_i(\dot{x})=0\}$ 是该方程组的解流形。

任取 $\mathbb{A}$ 的一组仿射坐标系 $(\dot{o},\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$，设 $\dot{x}$ 的坐标是 $(x_1,\ldots,x_n)^t$，任取仿射线性函数 f，则 $f(\dot{x})=f(\dot{o})+\mathcal{A}\overline{op}$，其中 $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性函数。不妨设 $f(\dot{o})=-b\in\mathbb{K}$，并且在 V 的基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下 $\mathcal{A}\overline{op}=\sum_{j=1}^n a_jx_j$，则 $f(\dot{x})=\sum_{j=1}^n a_jx_j-b$。也就是说，仿射线性函数在固定仿射坐标系之后是坐标的一次函数。

于是，对于方程组 (L) 而言，固定 $\mathbb{A}$ 的一组仿射坐标系后，设 $f_i(\dot{x})=\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j-b_i$，$\forall i\in\{1,\ldots,m\}$，则 (L) 等价于下面的非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}\quad (其中所有的a_{ij},b_i\in\mathbb{K}.) \tag{L'}$$

结合讲义上册的定理 2.9.1 我们就可以得到：

命题 4.1.7 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，则 $\Pi\subset\mathbb{A}$ 是某个抽象的非齐次线性方程组 (L) 的解流形 $\iff$ Π 是 $\mathbb{A}$ 中的平面。

证明细节留作练习。利用线性方程组的知识我们还可以得到：如果方程组 (L') 的系数矩阵和增广矩阵的秩都是 r，则 (L) 的解流形 Π 是 $n-r$ 维的平面；反过来，$\mathbb{A}$ 中的任何一个 $n-r$ 维平面都都是某个含有 r 个方程的抽象非齐次线性方程组的解流形。特别地，超平面等价于一个仿射线性函数的解流形。证明留作练习。

在本节的最后，我们来讨论仿射空间中平面的位置关系。

定义 4.1.12 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$\Pi_1=\dot{x}+U_1$, $\Pi_2=\dot{y}+U_2$ 是 $\mathbb{A}$ 中的两个平面，如果 $U_1\subset U_2$ 或 $U_2\subset U_1$，则我们称 Π_1 和 Π_2 平行，记作 $\Pi_1//\Pi_2$。

需要注意的是，如果限制到真实的三维空间，那么我们这里定义的平行包含了重合、线在面内、线面平行和面面平行。而对 n 维空间，我们有：

定理 4.1.4 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，Π_1, Π_2 是 $\mathbb{A}$ 中的两个平面并且 $\Pi_1//\Pi_2$，则 $\Pi_1\cap\Pi_2$ 一定是以下三者之一：Π_1, Π_2 或 $\emptyset$。

证明: 如果 $\Pi_1\cap\Pi_2=\emptyset$，则证明已经完成；下设 $\Pi_1\cap\Pi_2\neq\emptyset$，即 $\exists\dot{p}\in\Pi_1\cap\Pi_2$，于是可设 $\Pi_1=\dot{p}+U_1$, $\Pi_2=\dot{p}+U_2$。由平行的定义，不妨设 $U_1\subset U_2$，我们来证明此时 $\Pi_1\subset\Pi_2$：任取 $\dot{q}=\dot{p}+\mathbf{x}\in\Pi_1$，则 $\mathbf{x}\in U_1\subset U_2$，即 $\dot{q}\in\dot{p}+U_2=\Pi_2$；如果设 $U_2\subset U_1$，我们同理可证 $\Pi_2\subset\Pi_1$。这样我们就完成了证明。 □

定理 4.1.5 (**平行公理**) 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，Π_1, Π_2 是 $\mathbb{A}$ 中的两个平面，其方向子空间分别是 U_1, U_2，则 $\Pi_1 // \Pi_2 \iff \exists \dot{p} \in \Pi_1$ 和 $\dot{q} \in \Pi_2$ 使得 $\overline{pq} + \Pi_1$(即$\dot{p} + \overline{pq} + U_1) \subset \Pi_2$ 或者 $barqp + \Pi_2 \subset \Pi_1$。

证明: ($\Longrightarrow$) 不妨设 $U_1 \subset U_2$，则任取 $\dot{p} \in \Pi_1$ 和 $\dot{q} \in \Pi_2$，都一定有

$$\overline{pq} + \Pi_1 = \dot{p} + \overline{pq} + U_1 = \dot{q} + U_1 \subset \dot{q} + U_2 = \Pi_2;$$

如果设 $U_2 \subset U_1$ 则可以得到另一半结论。
($\Longleftarrow$) 如果存在 $\dot{p} \in \Pi_1$ 和 $\dot{q} \in \Pi_2$ 使得 $\overline{pq} + \Pi_1 \subset \Pi_2$，则 $\dot{p} + \overline{pq} + U_1 \subset \dot{q} + U_2$，即 $\dot{q} + U_1 \subset \dot{q} + U_2$，因此 $U_1 \subset U_2$，由平行的定义即得 $\Pi_1 // \Pi_2$。另一半结论同理。 □

我们知道，三维空间中两条直线可以既不平行也不相交，这种情形可以推广到一般的仿射空间。

定义 4.1.13 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，Π_1, Π_2 是 $\mathbb{A}$ 中的两个平面，如果 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ 并且 Π_1 和 Π_2 不平行，则我们称 Π_1 和 Π_2 是偏斜的 (或异面的)。

现在我们可以对两个平面之间的位置关系进行刻画了。

定理 4.1.6 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，$\Pi_1 = \dot{p} + U_1$, $\Pi_2 = \dot{q} + U_2$ 是 $\mathbb{A}$ 中的两个平面并设 $\dim(U_1) = k \leqslant \dim(U_2) = l$。设 $i = \dim(U_1 \cap U_2)$，$m = \dim(\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2))$，则 Π_1 和 Π_2 的位置关系有且只有以下三种情况：

(1) $\Pi_1 // \Pi_2 \iff i = k$;

(2) Π_1 和 Π_2 相交但没有包含关系 $\iff$ $i < k$ 且 $m = k + l - i$，此时 $\Pi_1 \cap \Pi_2$ 也是平面并且 $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = i$;

(3) Π_1 和 Π_2 偏斜 $\iff i < k$ 且 $m = k + l - i + 1$。

证明: 首先，由于 $i \leqslant k$，故只有 $i = k$ 和 $i < k$ 两种可能。
(1) 如果 $i = k$，则说明 $U_1 \cap U_2 = U_1$，即 $U_1 \subset U_2$，此即 $\Pi_1 // \Pi_2$。
(2) 如果 $i < k$，则说明 $U_1 \cap U_2 \subsetneq U_1, U_2$，即 Π_1 和 Π_2 不可能平行。那么我们考虑如下两种情形：

(i) 如果 $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$，即 Π_1 和 Π_2 相交但没有包含关系，那么由定义 4.1.3下方的说明 (2) 可知 $\Pi_1 \cap \Pi_2$ 仍是平面并且 $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \dim(U_1 \cap U_2) = i$。不妨设此时 $\dot{p} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ 且 $\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ 的方向子空间是 W，即 $\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2) = \dot{p} + W$。则由 $\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2) \supset \Pi_1$，$\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2) \supset \Pi_2$ 可知 $W \supset U_1$，$W \supset U_2$，因此 $W \supset U_1 + U_2$。另一方面，容易看出 $\Pi_1 \cup \Pi_2$ 中的点一定都具有 $\dot{p} + \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \in U_1 + U_2$ 的形式，因此其仿射组合也具有这样的形式，这说明 $W \subset U_1 + U_2$。综上，$W = U_1 + U_2$，因此由维数公式即得

$$m = \dim(\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2)) = \dim(W) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = k + l - i.$$

(ii) 如果 $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$，即 Π_1 和 Π_2 偏斜，下面我们来计算 $m = \dim(\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2))$。任取 $\dot{p} \in \Pi_1$ 和 $\dot{q} \in \Pi_2$，则显然 $\overline{pq} \notin U_1 + U_2$。不妨设此时 $\dot{p} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$ 且 $\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ 的方向子空间是 W，则一方面 $W \supset U_1$，$W \supset U_2$ 并且 $\overline{pq} \in W$；另一方面，容易验证 $\mathbb{A}(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ 中的点一定都可以写成 $\dot{p} + \lambda\overline{pq} + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $\mathbf{u} \in U_1, \mathbf{u}_2 \in U_2, \lambda \in \mathbb{K}$ 的形式。因此，$W = \operatorname{span}\{\overline{pq}, U_1 + U_2\}$，因此 $m = \dim(W) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) + 1 = k + l - i + 1$。

综上所述，$\mathbb{A}$ 中两个平面的位置关系有且只有以上情形，证毕。 □

致歉与寄语

这段话会在讲义完稿时删除。

很抱歉由于编者个人原因，截至期末考试前讲义距离完稿还差了很大一部分，耽误了大家的课程，在这里编者向大家郑重道歉，希望能够得到同学们的谅解。后面讲义会在暑期继续更新，直至完稿，之后编者会补出所有之前为了赶进度而省略的部分，以及对上下册讲义进行彻底的校对与修订，在此过程中欢迎大家随时提出建议。

下面是关于讲义一些细节处的说明。这套讲义是以作者的手稿整理而成，在此过程中，编者对部分内容进行了调整，对符号则进行了统一化，与大部分教材的通用符号保持了一致。讲义中省略的细节，如果标注了“显然”或“容易看出”，那么它一定是十分显然的，并且在以后也不会补充 (因为真的不需要)；如果标注了“容易验证”或“留作练习”，则这部分细节通常需要按照定义进行一定的计算或推导，是编者认为可以独立完成，并且不给出具体过程也可以继续阅读的，这部分细节以后会视具体情况补充细化一部分；如果标注了“留作思考”或者给出了参考文献，则这部分内容通常较难，我们会在完稿后补充。这套讲义的风格是偏“硬”、偏具体的，希望大家在阅读时重视对结构的思考，能够熟练地进行抽象到具体的转换，能够掌握理论并且熟练计算。

如果读者希望寻找与讲义的语言风格相似的教材，可以看看《高等代数简明教程》，蓝以中或者《Advanced Linear Algebra》，GTM135。当然每套教材都有其独特之处，但知识内容总体上是一样的，希望大家可以读一而知百。

最后祝大家期末考试顺利！

编者禹天石，2022.06.22.

4.2 欧几里得仿射空间

现在我们希望在仿射空间上引入夹角和距离，这就得到了下面的欧氏仿射空间。

定义 4.2.1 设 $\mathbb{A}$ 是域 $\mathbb{K}$ 上与 V 相伴的 n 维仿射空间，如果 V 还是欧氏空间，其上的内积记为 $<\cdot,\cdot>$，则我们称 $\mathbb{A}$ 是欧几里得仿射空间，简称为欧氏仿射空间。