



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

硕士学位论文

群作用与优化若干问题研究

作者姓名：陆镜宇

指导教师：支丽红 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别：理学硕士

学科专业：应用数学

培养单位：中国科学院数学与系统科学研究院

2025 年 6 月

Some Topics in Group Action and Optimization

**A thesis submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Natural Science
in Applied Mathematics**

By

Jingyu Lu

Supervisor: Professor Lihong Zhi

**Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of
Sciences**

June, 2025

中国科学院大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。承诺除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体享有著作权的研究成果，未在以往任何学位申请中全部或部分提交。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人或集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关收集、保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则，保留并向国家指定或中国科学院指定机构送交学位论文的电子版和印刷版文件，且电子版与印刷版内容应完全相同，允许该论文被检索、查阅和借阅，公布本学位论文的全部或部分内容，可以采用扫描、影印、缩印等复制手段以及其他法律许可的方式保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘 要

多项式优化问题在生产生活实践中广泛出现，其强大的建模能力和丰富的代数性质使得多项式优化理论在优化领域占据独特地位。群作用是描述对称性的基本工具，合理地利用群作用有助于简化问题的分析和计算。本文讨论了群作用及其在优化领域中的两个应用：无标记传感问题和 Cayley 变换的表示理论。

无标记传感问题 (USP) 旨在求解一个线性方程组 $Ax = \pi y$ ，其中右端项带有未知置换 $\pi \in \mathfrak{S}_m$ 的作用。这一数学问题在数据保护，信号处理，生物信息学等领域中有应用。本文讨论了无标记传感问题的解的性质和数值求解的算法。

本文通过考察 USP 中的双有理等价特性证明了一般的 n 个未知数的 USP 可以被 $n+1$ 个等幂和多项式唯一求解。利用解的唯一性，本文提出了求解 $n+1$ 个幂和多项式超定系统的符号（基于 Gröbner 基）和数值（基于半定规划）计算方法。超定系统的引入使得算法避免计算 $O(n!)$ 多个增根的信息，从而提高计算效率。松弛阶取 $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 时，我们的数值算法相较于同伦算法有显著加速。通过数值实验我们测试了算法的有效性和稳定性。

经典 Cayley 变换作为二次矩阵群与其 Lie 代数间的等变的双有理映射由 Cayley 于 1846 年首次发现。这一变换为 Lie 群上优化问题提供了计算高效的投影算子，在数值代数、信号处理领域也有重要应用。本文着眼于从表示论视角拓展经典 Cayley 变换，并推广到 f -型 Cayley 表示。

本文建立了 Lie 群表示适用 Cayley 变换的普适性判据，幂扩张性质；利用幂扩张性质和半单 Lie 代数表示理论揭示半单不可约 Cayley 表示的权图的几何结构 (Cayley 构型)；在此基础上给出经典单 Lie 群及其紧致实形式 Cayley 表示的完全分类，除已知的例子外，分类表中唯一新增的例外情形是 $\text{Spin}(8)$ 群的旋量表示；针对推广的 f -型 Cayley 表示证明了半单条件下 Cayley 构型的唯一性。

多项式优化和 Lie 群上计算相比一般的流形上优化计算问题具备远为丰富的代数和几何性质。本文探究的两个例子可以看作是代数学中的群论方法应用于优化计算领域的尝试。

关键词：群作用，多项式优化，矩阵补全，半定规划，Cayley 变换，半单 Lie 代数，表示论，代数群，无标记传感问题

Abstract

Polynomial optimization problems have emerged widely in practice, where the powerful modeling capabilities and rich algebraic properties endow polynomial optimization theory with a unique status in the optimization field. Group actions are fundamental tools for describing symmetry, and their proper utilization often simplifies problem analysis and computation. This paper discusses two topics intersecting group actions and optimization: the unlabeled sensing problem and the representation theory of Cayley transforms.

The unlabeled sensing problem (USP) aims to solve a linear system $Ax = \pi y$ with an unknown permutation $\pi \in \mathfrak{S}_m$ acting on the right side. This mathematical problem finds applications in data protection, signal processing, and bioinformatics. We investigate the unlabeled sensing problem from the theoretical analysis of solution properties and computational methodologies.

Theoretically, by examining the birational equivalence characteristics in USP, we prove that a generic USP with n unknowns can be uniquely solved by $n + 1$ power sum polynomials. Computationally, leveraging the uniqueness of the solution, we propose symbolic (based on the Gröbner basis) and numerical (based on semidefinite programming) methods to solve the overdetermined system of $n + 1$ power sum polynomials. Introducing an overdetermined system enables algorithms to avoid computing $O(n!)$ extraneous roots, thereby improving computational efficiency. Theoretical analysis demonstrates that with the relaxation order $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, our numerical algorithm achieves significant acceleration compared to homotopy continuation methods. Numerical experiments validate the effectiveness and stability of the algorithms.

The classical Cayley transform, an equivariant birational map between quadratic matrix groups and their Lie algebras, was first discovered by Cayley in 1846. This transform provides computationally efficient projection operators for optimization over Lie groups, with applications in numerical algebra and signal processing. This paper extends the classical Cayley transform from a representation-theoretic perspective, generalizing it to f -type Cayley representations.

The main contributions in this part include: Establishing universal criteria and power span properties for Cayley transforms applicable to Lie group representations; Revealing the geometric structure (Cayley configuration) of weight diagrams for semisimple irreducible Cayley representations through power span properties and semisimple Lie algebra representation theory; Providing complete classifications of Cayley representations for classical simple Lie groups and their compact real forms, where the only exceptional new case in the classification table is the spinor representation of $\text{Spin}(8)$.

group; Proving uniqueness of Cayley configurations under semisimple conditions for generalized f -type Cayley representations.

Compared with general manifold computation, polynomial optimization and computations over Lie groups possess substantially richer algebraic and geometric structures. The two case studies explored in this paper can be regarded as attempts to permeate group-theoretic methods from algebra into optimization and computational fields.

Key Words: Group Action, Polynomial Optimization, Matrix Completion, Semi-definite Programming, Cayley Transform, Semisimple Lie algebra, Representation Theory, Algebraic Group, Unlabeled Sensing Problem

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 论文结构及主要结果	2
第 2 章 预备知识	5
2.1 初等代数几何	5
2.1.1 理想与簇	5
2.1.2 行列式簇	6
2.1.3 双有理等价	6
2.2 群与群作用	6
2.2.1 置换群与对称多项式	6
2.2.2 Lie 理论基础	7
2.2.3 作用与表示	9
2.3 优化理论	11
2.3.1 多项式优化	11
2.3.2 Moment-SoS 松弛分层	12
第 3 章 无标记传感问题的计算	13
3.1 引言: 无标记传感问题 (USP)	13
3.2 预备知识: 半定松弛求解零维理想	15
3.3 解的唯一性	16
3.3.1 双有理等价	16
3.4 解的计算	21
3.4.1 算法设计	21
3.4.2 算法分析	24
3.4.3 算法实现	29
第 4 章 Cayley 变换的表示理论	35
4.1 引言: 经典 Cayley 变换	35
4.2 预备知识: 半单 Lie 代数	37
4.2.1 半单 Lie 代数的结构	37
4.2.2 单 Lie 代数的分类	39
4.2.3 半单 Lie 代数的表示	40

4.2.4 代数 Lie 理论	41
4.3 Cayley 表示	41
4.3.1 经典 Cayley 变换的表示论推广	41
4.3.2 Cayley 表示的刻画	43
4.4 Cayley 表示的半单性理论	48
4.4.1 基本事实	48
4.4.2 Cartan 子代数判据	50
4.4.3 不可约 Cayley 表示: Cayley 构型	52
4.4.4 一般 Cayley 表示	58
4.4.5 验证 Cartan 子代数判据的符号算法	59
4.5 经典单 Lie 群上的 Cayley 变换	63
4.5.1 具有 Cayley 构型的表示	63
4.5.2 Cayley 表示的分类	71
4.6 f -型 Cayley 表示	73
4.6.1 推广的 f -型 Cayley 表示与 LPR 问题	73
4.6.2 有理映射的影响	76
4.6.3 半单性理论	80
4.6.4 Cayley 构型的唯一性	83
第 5 章 总结与展望	87
5.1 本文总结	87
5.2 未来工作展望	87
参考文献	89
致谢	97
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果 ..	101

图目录

图 1-1 流形优化算法框架	2
图 3-1 基于 Gröbner 基的符号求解算法 3.1	23
图 3-2 基于 Gröbner 基的超定系统符号求解算法 3.2	24
图 3-3 基于 SDP 松弛的算法 3.3	26
图 4-1 Cartan 子代数判据判定算法 4.1	62
图 4-2 $\mathfrak{sl}_2, V_{\text{std}}$ 的权图	65

表目录

表 3-1 不同 n 值下算法 3.1 与 3.2 的 CPU 时间	30
表 3-2 不同 n 值下算法 3.3 的 CPU 时间、相对误差、秩序列及矩量矩阵 维度	30
表 3-3 不同 m 值下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差	31
表 3-4 $n = 3$ 时不同噪声强度下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差	32
表 3-5 $n = 4$ 时不同噪声强度下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差	33
表 3-6 $n = 5$ 时不同噪声强度下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差	33
表 3-7 $n = 6$ 时不同噪声强度下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差	33
表 3-8 不同 n 值下 AIEM 与算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差	34
表 4-1 复单 Lie 代数的分类	39
表 4-2 复单 Lie 代数的实形式	39
表 4-3 经典单 Lie 代数的根系资料	63
表 4-4 经典单 Lie 代数具备 Cayley 构型的表示列表	72
表 4-5 经典紧单 Lie 代数具备 Cayley 构型的表示列表	73

算法列表

算法 3.1 基于 Gröbner 基符号求解系统 Q_n (3-4) 的算法	22
算法 3.2 基于 Gröbner 基符号求解超定系统 Q_{n+1} (3-3) 的算法	22
算法 3.3 基于 SDP 数值求解超定系统 Q_{n+1} (3-3) 的松弛算法	25
算法 4.1 关于 $\tilde{\theta}(S^3\mathfrak{h})$ 的 Gauss 消元测试	61

术语列表

本文采用的符号和术语列表. 如章节内有单独特殊说明, 则按照章节内的说明.

符号	描述	Terminology
数系		
$\mathbb{R}$	实数域	real number field
$\mathbb{C}$	复数域	complex number field
$\mathbb{Q}$	有理数域	rational field
$\mathbb{Z}$	整数环	integer ring
$\mathbb{H}$	四元数代数	quaternion algebra
$\mathbb{N}$	自然数集	natural number
$\mathbb{Z}^+$	正整数集	positive integer
$\mathbb{O}$	奇数集	odd number
$\mathbb{F}$	域, 假设 $\text{char } \mathbb{F} = 0$	field
$R^\times$	环 R 中可逆元构成的群	invertible group of ring
交换代数		
I	交换环的理想	ideal
$\sqrt{I}$	根理想	radical ideal
$\sqrt[r]{I}$	实根理想	real radical ideal
$I(S)$	集合 S 的消失理想	vanishing ideal
$\mathcal{V}(I)$	I 的零点集	vanishing locus
$\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$	I 的实零点集	real vanishing locus
$\mathbb{F}[X]$	仿射簇 X 的坐标环	coordinate ring
$\mathbb{F}(X)$	不可约簇 X 的有理函数域	rational function field
$Y_r(\mathbb{F}^{m \times n})$	$\mathbb{F}^{m \times n}$ 中秩不超过 r 的矩阵构成的行列式簇	determinantal variety
$\mathbb{F}(t)$	$\mathbb{F}$ 添加符号 t 的有理分式域	fraction field
$\mathbb{F}[[t]]$	$\mathbb{F}$ 添加符号 t 的形式幂级数环	formal power series ring
$R_{\mathfrak{p}}$	交换环 R 在素理想 $\mathfrak{p}$ 处的局部化	localization
RS	R -模 N 中 S 张成的 R -子模	submodule spanned by S

群

$\mathfrak{S}_n$	n 个元素的置换群	permutation group of n letters
$SL(V)$	向量空间 V 上的特殊线性群	special linear group
$GL(V)$	向量空间 V 上的一般线性群	general linear group
$O_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^n$ 上的正交群	orthogonal group
$SO_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^n$ 上的特殊正交群	special orthogonal group
$Sp_{2n}(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^{2n}$ 上的辛群	symplectic group
$U_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$ 上的酉群	unitary group
$SU_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$ 上的特殊酉群	special unitary group
$\text{Aut } -$	$-$ 的自同构群	automorphism group
$\text{Inn } -$	$-$ 的内自同构群	inner automorphism group
$\text{Out } -$	$-$ 的外同构群	outer automorphism group

Lie 代数

$\mathfrak{g}$	Lie 代数	Lie algebra
$\text{Lie } G$	Lie 群 G 的 Lie 代数	Lie algebra of Lie group G
$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^n$ 上的特殊线性 Lie 代数	special linear Lie algebra
$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^n$ 上的一般线性 Lie 代数	general linear Lie algebra
$\mathfrak{o}_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^n$ 上的正交 Lie 代数	orthogonal Lie algebra
$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^{2n}$ 上的辛 Lie 代数	symplectic Lie algebra
$\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$ 上的特殊酉 Lie 代数	special unitary Lie algebra
$\mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^n$ 上的酉 Lie 代数	unitary Lie algebra
$\mathfrak{u}_n(\mathbb{H})$	$\mathbb{H}^n$ 上的紧辛 Lie 代数	compact symplectic Lie algebra
$\mathfrak{r}_n(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}^n$ 的上三角幂零 Lie 代数	nilpotent Lie algebra
Λ	半单 Lie 代数的权格	weight lattice
Λ_R	半单 Lie 代数的根系格	root lattice
C	半单 Lie 代数的基本 Weyl 腔	fundamental Weyl chamber
$\mathcal{W}$	半单 Lie 代数的 Weyl 群	Weyl group
$\mathfrak{h}$	半单 Lie 代数的 Cartan 子代数	Cartan subalgebra
Φ	半单 Lie 代数的根系集	set of roots
Φ^+	半单 Lie 代数的正根系集	set of positive roots
Δ^+	半单 Lie 代数的单根系集	set of simple roots

同态与函子

tr –	取 – 的迹	trace
$\ker$ –	态射 – 的核	kernel
im –	态射 – 的像	image
$\Re$ –	取 – 实部	real part
$\Im$ –	取 – 虚部	imaginary part
Res	限制函子	restriction functor
Ind	诱导函子	induction functor
S –	– 的对称代数	symmetric algebra
S^n –	– 的 n 次齐次对称积	symmetric product
$\wedge$ –	– 的外代数	exterior algebra
$\wedge^n$ –	– 的 n 次齐次外积	wedge product
$-\mathbb{C}$	– 的复化	complexification
$\mathcal{U}$ –	– 的包络 (代数)	enveloping algebra

作用与表示

ρ	群作用	group action
θ	Lie 代数作用	Lie algebra action
Wt –	表示 – 的权集	set of weights
λ	权	weight
V_λ	表示 V 中权 λ 对应的权空间	weight space
$(\text{Wt} -, m)$	表示 – 的权图	weight diagram
Ad	群的伴随作用/表示	adjoint action/representation
ad	Lie 代数的伴随作用/表示	adjoint action/representation
X^G	作用 $G \curvearrowright X$ 的不变集	set of invariants
X/G	作用 $G \curvearrowright X$ 的商空间, 也就是轨道集	quotient space
$R(-)$	– 的表示环	representation ring

阶的比较

$O(g)$	阶上界不高于 g	big O
$\Omega(g)$	阶下界不低于 g	big omega

其他

Conv	— 的凸包	convex hull
M_t	t 阶截断矩量矩阵	truncated moment matrix
M	矩量矩阵	moment matrix
$\mathcal{K}$	优化问题可行域	feasible domain
$\text{res}(f, c)$	亚纯函数 f 在 c 处的留数	residue
$X \geq 0$	对称矩阵 X 半正定	semi-positive definite
$\langle A, B \rangle$	内积空间中两向量 A, B 的内积	inner product
$\overline{X}^Z$	集合 X 的 Zariski 闭包	Zariski closure
$\ v\ _0$	向量 v 的 0 范数, 即非零元个数	0-norm
$\ v\ _p$	向量 v 的 L^p 范数, $p \geq 1$	L^p -norm

缩写

缩写	全称	描述
SoS	Sum of Squares	平方和
SDP	Semi-definite Programming	半定规划
POP	Polynomial Optimization Problem	多项式优化
SVD	Singular Value Decomposition	奇异值分解
USP	Unlabeled Sensing Problem	无标记传感问题
LPR	Lemire-Popov-Reichstein	

第1章 绪论

1.1 研究背景

对称性作为数学研究的核心主题之一,在代数结构分析与几何对象表征中具有重要作用. 群和群的表示理论为复杂系统的对称性分析提供了基础工具. 流形上的优化计算是应用数学关心的核心问题之一. 流形上优化面临非凸, 约束条件复杂, 参数空间维数高等挑战. 一个自然的问题是对于具备良好对称性的流形, 能否在优化计算中有效地利用对称性, 以达到简化计算的目的.

本文以两个具体问题无标记传感问题 (Unlabeled Sensing Problem, USP) 和 Cayley 变换为切入点, 探讨计算问题中的群作用, 通过代数几何与 Lie 群表示理论的结合, 为解决两类典型问题提供新的研究思路.

多项式优化问题历史悠久且应用广泛, 其标准形式为:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

多项式优化问题的理论源头是对实数域上非负多项式的研究^[1]. 奥地利数学家 Artin 论证了利用平方和表示非负实多项式的可行性^[2], 这使得利用半定规划技术计算非负多项式表示成为可能^[3]. 特别地, 利用多项式优化的半定松弛^[4,5]可以求零维多项式系统的实根和实根理想^[6-8]. 本文中我们利用这一技术求解无标记传感问题.

无标记传感问题^[9,10]要求求解带有未知置换作用的线性方程组 $Ax = \pi y$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, 而 $\pi \in \mathfrak{S}_m$, 这里 $\mathfrak{S}_m$ 表示 m 个元素的置换群. 该问题广泛存在于自然科学与工程领域, 例如计算机视觉^[11-15]和通信网络^[16-18]等. 给定 A, y , 如果 π 已知, 那么 x 可以利用线性代数理论求解. 未知的置换 π 使得本问题高度非线性. 一般地通过穷举 $\mathfrak{S}_m$ 中的元素可能会导致需要求解 $m!$ 个线性方程, 当 m 较大时这一策略是不可行的. 在实际问题中 n 通常较小. 帮助我们攻克这一问题的思路是利用群作用 $\mathfrak{S}_m \curvearrowright \mathbb{R}[y_1, \dots, y_m]$ 的不变量, 即对称多项式^[19]:

$$p_k(y_1, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^m y_j^k, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

通过考察方程组 $p_k(Ax) - p_k(\pi y) = p_k(Ax) - p_k(y) = 0$, 我们将枚举并求解 $m!$ 个线性方程组的问题转化成求解 1 个高次数的多项式方程组, 并利用多项式优化的技术最终求解这一方程组.

在 Lie 群等齐性空间上的计算是另一类典型的计算问题^[20]. 其中最常见的是在特殊正交群 $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ 上的计算^[21]. 通常的流形优化方法采用如下的路径追踪框架:

- (1) 确定 x_k 处下降方向 $v_k \in T_{x_k} M$,
- (2) 确定步长 $\gamma_k \in \mathbb{R}$,
- (3) 沿下降方向步进至 $y_k = x_k + \gamma_k v_k$,
- (4) 投影回到流形 $x_{k+1} = P_k(y_k)$ 上,
- (5) 判断终止条件 (如微分范数条件等), 返回结果或回到第一步.

优化迭代循环

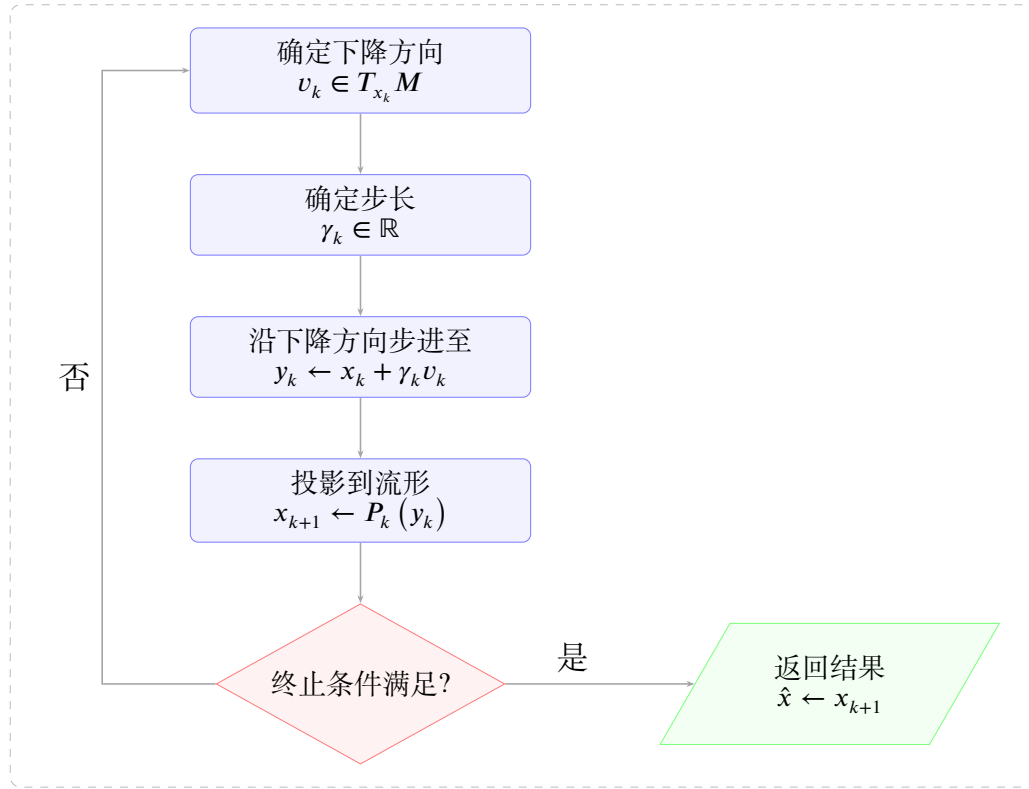


图 1-1 流形优化算法框架

对于一般的流形而言, 投影映射 P_k 需要进行专门设计^[22]. Lie 群 G 的流形结构上天然存在有收缩映射 $\exp : \text{Lie } G \rightarrow G$. $\exp$ 具备优良的几何性质, 例如 Lie 群上的测地线可以通过 $\exp$ 得到, 但是 $\exp$ 的精确计算涉及无穷级数, 因此在实际应用中通常使用 $\exp$ 的逼近 — Cayley 变换. Cayley 观察到^[23] 可以利用有理逼近

$$C\left(\frac{x}{2}\right) := \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) \dashrightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R}), \quad x \mapsto \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}$$

作为收缩映射. 本文考虑 Cayley 变换的表示论推广, 从而可以应用到更一般的 Lie 群上优化的问题中.

1.2 论文结构及主要结果

本文的结构与主要结果如下.

本文第 2 章简要介绍所需的预备知识: 初等代数几何, 群作用与表示论基础, 以及多项式优化的基本知识. 包括代数簇的概念, 正则映射, 代数簇的局部性质,

对称多项式与置换群作用, Lie 理论基本定理, 多项式优化的 Moment-SoS 松弛分层等内容. 特别地, 定理 2.2.11 关于商簇商映射的有限性, 为第 3 章双有理等价模型中的映射 β 的有限性提供依据.

第 3 章的主要结果如下. 在第 3.3 节我们通过对于解性质的理论研究, 建立双有理等价模型: 对一般矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 证明无标记传感问题的解可以被 $n+1$ 个等幂和给出的方程

$$p_k(y_1, \dots, y_m) = \sum_{j=1}^m y_j^k = p_k(Ax), \quad k = 1, \dots, n+1,$$

唯一确定 (定理 3.3.1). 算法设计方面, 在 3.4.1 节, 利用解的唯一性, 我们设计了基于 Gröbner 基的符号计算方法 3.2 和基于半定规划的数值计算方法 3.3. 在第 3.4.2 节, 我们证明了数值算法 3.3 的正确性, 并比较了这几种算法的复杂度. 在第 3.4.3 小节, 我们测试了算法 3.2 相对于直接计算的算法 3.1 有显著加速, 原因在于算法 3.2 有效地排除了增根, 从而 Gröbner 基具备简单的线性形式. 我们的数值实验还表明对于较小的 $n = 3, \dots, 6$, 算法 3.3 在最低阶松弛 $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 恢复了 USP 的唯一解.

第 4 章中我们探索经典 Cayley 变换的表示论推广. 在 4.3 节中我们定义 Cayley 表示, Cayley 变换适用等基本概念, 并从 Lie 群-Lie 代数对应角度给出一般的 Cayley 表示的刻画: Cayley 表示等价于满足幂扩张性质的表示 (定理 4.3.9). 通过考察交换 Lie 代数的包络代数, 我们得到 Cayley 表示的刻画 (命题 4.3.12). 我们还考虑了 Cayley 表示在 Lie 群自同构群作用下的表现 (定理 4.3.14), 说明 Cayley 变换的适用性是在自同构群作用下稳定的性质.

在第 4.4 节中, 我们把半单 Lie 代数的性质与一般的 Cayley 表示的刻画定理 4.3.9 结合起来, 得到了关键的 Cartan 子代数判据 (定理 4.4.9). 在 4.4.3 小节中, 我们引入了关键的 Cayley 构型 (定义 4.4.1), 这使得我们在第 4.5.2 小节中分类所有经典单 Lie 群的 Cayley 表示. 我们的分类表明, 对于经典单 Lie 群, 除了二次矩阵群直接诱导的 Cayley 表示, 唯一的例外只有 $\text{Spin}_8(\mathbb{C})$ 的半旋量表示.

在 4.6 节中, 我们考察使用不同的 $\exp$ 的有理逼近对于 Cayley 表示的影响, 提出 f -型 Cayley 表示, 类似地发展了 f -型 Cayley 表示的一般刻画以及半单性理论. 我们发现 f -型 Cayley 表示与 Lemire-Popov-Reichstein (LPR) 问题有密切的关系, 在忠实性假设下构造出 LPR 问题的肯定性例子 (命题 4.6.4). f -型 Cayley 表示的半单性理论反映了 Cayley 构型和 Cayley 给出的有理逼近 $C(t) = \frac{1+t}{1-t}$ 的中心性 (定理 4.6.24 和定理 4.6.23).

第 5 章中我们对全文进行总结, 对本文中留下的问题进行简要说明, 并展望未来进一步研究的方向.

第2章 预备知识

2.1 初等代数几何

代数几何是研究多项式求解问题的重要理论工具. 本节简要介绍代数几何的一些基本想法. 本节中用 $\mathbb{F}$ 表示一个特征 0 的代数闭域, $\mathbb{F}$ 上的 n 元多项式环记为 $\mathbb{F}[x] := \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. 用 I 表示交换环中的一个理想. 如果不特别说明, 代数簇定义在代数闭域上. 本小节的内容可以参考任何标准的代数几何教程 (例如^[24]).

2.1.1 理想与簇

定义 2.1.1 (仿射簇, 坐标环, 零化理想). 称多项式环 $\mathbb{F}[x]$ 中理想 I 的公共零点集为 (仿射) 代数簇:

$$\mathcal{V}(I) = \{x \in \mathbb{F}^n : f(x) = 0, \quad \forall f \in I\}.$$

$X \subseteq \mathbb{F}^n$, 在 X 上取值为 0 的多项式构成一个理想 $I(X)$, 称为 X 的零化理想:

$$I(X) = \{f \in \mathbb{F}[x] : f(x) = 0, \quad \forall x \in X\}.$$

称仿射簇 X 的多项式函数环为 X 的坐标环, 记作 $\mathbb{F}[X]$, $\mathbb{F}[X] \simeq \mathbb{F}[x]/I(X)$.

定义 2.1.2 (不可约簇, 函数域). 如果代数簇 X 不能写成两个非空真闭子簇的并, 则称 X 不可约. 称不可约簇 X 的坐标环的分式域为 X 的函数域, 记作 $\mathbb{F}(X)$.

定义 2.1.3 (正则映射, 有理映射). 称代数簇 X 和 Y 之间由多项式诱导的映射为正则映射; 如果 f 是代数簇 X 和 Y 之间由有理分式诱导的映射, 且存在 $U \subseteq X$ 是 X 中的稠密开集, 使得 f 在 U 上正则, 则称 f 是有理映射.

定理 2.1.1 (Zariski 主定理). ^[25] [7.2 节 Zariski's Main Theorem] $\mathbb{F}$ 是代数闭域, $\varphi : X \rightarrow Y$ 是 $\mathbb{F}$ -簇的可分态射. 如果 φ 是双射, 且 Y 正规, 那么 φ 是同构.

定义 2.1.4 (代数簇的维数). 仿射簇 X 的坐标环 $\mathbb{F}[X]$ 的 Krull 维数称为 X 的维数.

定义 2.1.5 (零维理想). 称交换环 R 中的理想 I 是零维理想, 如果商环 R/I 的 Krull 维数等于 0.

定义 2.1.6 (代数簇的奇点, 光滑性). 称代数簇 X 中的点 $x \in X$ 为奇点, 如果 x 处的局部环 $\mathbb{F}[X]_{\mathfrak{m}_x}$ 不是正则局部环. 如果 X 上没有奇点, 则称 X 是光滑的 (或非奇异的) 簇.

代数几何的基本观点是代数对象与几何对象的对应.

定理 2.1.2 (零点定理). 对于代数闭域 $\mathbb{F}$ 和簇 X 的坐标环中的理想 I , 根理想 $\sqrt{I} = I(\mathcal{V}(I))$. 其中 $\sqrt{I} := \{f \in \mathbb{F}[X] : \exists k \in \mathbb{N}, f^k \in I\}$.

对于非代数闭域 $\mathbb{R}$, 也可以发展相应的实代数几何理论.

定义 2.1.7 (实仿射簇, 实根理想). 实仿射簇 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是指某个理想 $I \subseteq \mathbb{R}[x]$ 给出的复代数簇的实点. $X = \mathcal{V}(I) \cap \mathbb{R}^n =: \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$. 实多项式环中的理想 $I \subseteq \mathbb{R}[x]$ 的实根理想定义为

$$\sqrt[e]{I} := \left\{ f \in \mathbb{R}[x] : f^{2k} + g \in I \text{ 对某个多项式 } g \in \sum \mathbb{R}[x]^2 \text{ 可写作平方和, } k \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

如果 $I = \sqrt[e]{I}$, 则简称 I 是实根理想.

定理 2.1.3 (实零点定理). 对于理想 $I \subseteq \mathbb{R}[x]$, $\sqrt[e]{I} = I_{\mathbb{R}}(\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I))$, 其中

$$I_{\mathbb{R}}(X) = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(x) = 0, \quad \forall x \in X\}.$$

2.1.2 行列式簇

定义 2.1.8 (行列式簇). 称 $\mathbb{F}$ 上 $m \times n$ 的矩阵空间中秩不超过 $r \leq \min\{m, n\}$ 的矩阵构成的代数簇为行列式簇, 记作 $Y_r(\mathbb{F}^{m \times n})$.

定理 2.1.4. ^[26] [命题 1.1] 行列式簇 $Y_r(\mathbb{F}^{m \times n})$ 是不可约代数簇.

2.1.3 双有理等价

定义 2.1.9 (双有理等价). 称代数簇 X 与 Y 双有理等价, 如果存在有理映射 $f : X \dashrightarrow Y$ 和 $g : Y \dashrightarrow X$ (本文用 $f : X \dashrightarrow Y$ 表示有理映射, $\dashrightarrow$ 是指 f 并不定义在整个 X 上), 使得 $f \circ g = \text{Id}_Y, g \circ f = \text{Id}_X$.

定理 2.1.5. 对于不可约代数簇 X 和 Y 以下条件等价:

- (1) X 与 Y 双有理等价.
- (2) 函数域 $\mathbb{F}(X) \simeq \mathbb{F}(Y)$ 作为 $\mathbb{F}$ -域同构.
- (3) 存在开集 $U \subseteq X, V \subseteq Y$, 使得 $U \simeq V$ 作为 $\mathbb{F}$ -簇同构.

2.2 群与群作用

2.2.1 置换群与对称多项式

定义 2.2.1 (不变集, 不变量). 对群 G 在集合 X 上的作用 $G \curvearrowright X$, 称 X 的子集

$$X^G := \{x \in X : gx = x, \forall g \in G\}$$

为群作用的不动点集或不变集. X^G 中的元素称为群作用的不动点或不变量.

用 $\mathfrak{S}_n$ 表示 n 个元素的置换群. $\mathfrak{S}_n$ 在多项式环 $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ 上有自然的作用

$$(\sigma f)(X_1, \dots, X_n) = f(X_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(n)}).$$

在分式域 $\mathbb{F}(X_1, \dots, X_n)$ 上可定义相似的作用.

定义 2.2.2 (对称多项式环, 对称多项式, 对称有理分式域, 对称有理分式). 称群作用 $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ 的不变集为对称多项式环, 不变量为对称多项式. 对 $1 \leq k \leq n$.

在分式域 $\mathbb{F}(X_1, \dots, X_n)$ 上可定义相应的对称有理分式域 $\mathbb{F}(X_1, \dots, X_n)^{\mathfrak{S}_n}$ 和对称有理分式.

定义 2.2.3 (初等对称多项式, 幂和). 对群作用 $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, 定义

$$e_k := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{1 \leq j \leq k} X_{i_j} \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

为第 k 个 n 元初等对称多项式; 定义

$$p_k := \sum_{r=1}^n X_r^k \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

为第 k 个幂和或第 k 个牛顿多项式.

定理 2.2.1 (对称多项式基本定理). ^[19] 自然同态

$$\begin{aligned} \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} \\ X_i &\mapsto e_i \end{aligned}$$

是环同构, 从而可以将 $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ 与 $\mathbb{F}[e_1, \dots, e_n]$ 等同.

对于对称有理分式域, 类似地有 $\mathbb{F}(X_1, \dots, X_n)^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{F}(e_1, \dots, e_n)$.

定理 2.2.2 (Newton 公式). ^[19] 幂和与初等对称多项式相互表出

$$\sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i \leq n \\ j \leq 1}} (-1)^{j+1} e_i p_j = \begin{cases} (-1)^k p_k e_k, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

推论 2.2.3. ^[19] $\mathbb{F}[e_1, \dots, e_n] = \mathbb{F}[p_1, \dots, p_n] = \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} \simeq \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$.

2.2.2 Lie 理论基础

Lie 理论是研究连续群和连续对称性的重要理论工具. 本小节简介 Lie 理论的一些概念和基本原理: Lie 群-Lie 代数对应. 本小节的内容可以参考 Lie 理论的标准教程 (比如^[25]).

2.2.2.1 Lie 群与 Lie 代数

定义 2.2.4 (Lie 群, 复 Lie 群, 代数群). 称群 G 是 (实) Lie 群如果群 G 上带有流形结构使得群运算 (乘法和取逆)

$$\begin{aligned}\varphi : G \times G &\rightarrow G & \psi : G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 & g &\mapsto g^{-1}\end{aligned}$$

是 (实) 流形的光滑映射. (实) Lie 群 G, H 之间的态射是指 G 到 H 的光滑群同态.

特别地, 如果 G 带有复流形结构, 且群运算是复解析的, 则称 G 是复 Lie 群. 复 Lie 群 G, H 之间的态射是指 G 到 H 的复解析群同态; 如果 G 带有 $\mathbb{F}$ -簇结构, 且群运算是 $\mathbb{F}$ -簇正则的, 则称 G 是 $\mathbb{F}$ -代数群, 代数群 G, H 之间的态射是指 G 到 H 的正则群同态.

定理 2.2.4 (代数群是光滑代数簇). ^[27] 代数群的代数簇结构是光滑的.

定义 2.2.5 (Lie 代数). ^[28] 称 $\mathbb{F}$ 上的向量空间 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{F}$ -Lie 代数如果 $\mathfrak{g}$ 上带有 Lie 方括号运算

$$[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

是 $\mathfrak{g}$ 上的 $\mathbb{F}$ 双线性映射, 满足

(1) 反对称

$$[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

(2) Jacobi 恒等式

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

称 $\mathbb{F}$ -线性映射 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 间的态射如果 θ 保持 Lie 方括号:

$$\theta([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [\theta(x), \theta(y)]_{\mathfrak{h}}.$$

定理 2.2.5 (Lie 群的 Lie 代数). ^[28] Lie 群 G (相应地, 复 Lie 群, 代数群) 在单位元 e 处的切空间 $T_e G$ 构成一个 Lie 代数, 称为该 Lie 群的 Lie 代数, 记为 $\text{Lie } G$. 通过取切空间和切映射, Lie 给出了从 Lie 群 (相应地, 复 Lie 群, 代数群) 范畴到 Lie 代数范畴的一个函子.

定义 2.2.6 (Lie 子群, 代数子群). 称子群 $H < G$ 是 Lie 群 (相应地, 代数群) G 的 Lie 子群 (相应地, 代数子群) 如果 H 作为拓扑空间是嵌入到 G 中的闭集 (相应地, Zariski 闭集).

注 2.2.1. 放松嵌入条件可能会导致拓扑问题, 见例 4.3.1. 不妨称 H 是 G 的浸入 Lie 子群如果有 Lie 群间的单态射 $\rho : H \rightarrow G$.

2.2.2.2 Lie 理论基本定理: Lie 群 Lie 代数对应

定理 2.2.6 (Lie 群 Lie 代数第一对应原则). ^[28] 设 G, H 为 Lie 群, 有 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. 如果 G 是连通的, 则 G 到 H 的 Lie 群同态由其切映射唯一决定:

$$\begin{aligned} \text{Lie} : \text{Hom}(G, H) &\hookrightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \\ \rho &\mapsto d\rho. \end{aligned}$$

在以上定理 2.2.6 中, 考虑 G 是 H 的浸入 Lie 子群, 借助指数映射, 立即得到 Lie 理论第一基本定理:

定理 2.2.7 (Lie 理论第一基本定理). ^[28] Lie 群 H 的 Lie 代数为 $\mathfrak{h}$, H 连通的浸入 Lie 子群 G (Lie 代数为 $\mathfrak{g}$) 与 $\mathfrak{h}$ 的 Lie 子代数一一对应.

定理 2.2.8 (Lie 理论第二基本定理: Lie 群 Lie 代数第二对应原则). ^[28] 设 G, H 为 Lie 群, 有 Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. 如果 G 是单连通的, 则 G 到 H 的 Lie 群同态与 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的 Lie 代数同态一一对应:

$$\begin{aligned} \text{Lie} : \text{Hom}(G, H) &\xrightarrow{\simeq} \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \\ \rho &\mapsto d\rho. \end{aligned}$$

定理 2.2.9 (Ado 定理). ^[28] 有限维实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 有有限维忠实表示 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 使得 θ 将 $\mathfrak{g}$ 的极大幂零理想 $\text{Nil}(\mathfrak{g})$ 映射到 $\mathfrak{gl}(V)$ 中的幂零元.

由定理 2.2.9 和 2.2.7, 立即得到 Lie 理论第三基本定理.

定理 2.2.10 (Lie 理论第三基本定理). ^[28] 任何有限维实 Lie 代数都是 Lie 群的 Lie 代数: $\mathfrak{g}$ 是有限维实 Lie 代数, 则存在实 Lie 群 G 使得 $\text{Lie } G \simeq \mathfrak{g}$.

2.2.2.3 Lie 代数的包络代数

定义 2.2.7 (包络). ^[25] 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数, 定义其包络代数为一个 $\mathbb{F}$ -代数 $\mathcal{U}\mathfrak{g}$:

$$\mathcal{U}\mathfrak{g} := (\mathcal{T}\mathfrak{g}) / (a \otimes_{\mathbb{F}} b - b \otimes_{\mathbb{F}} a - [a, b])_{a, b \in \mathfrak{g}}.$$

其中 $\mathcal{T}\mathfrak{g}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的张量代数. Lie 代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 间的同态, 自然地拓展成包络代数间的同态:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) &\hookrightarrow \text{Hom}(\mathcal{U}\mathfrak{g}, \mathcal{U}\mathfrak{h}) \\ \theta &\mapsto \mathcal{U}\theta. \end{aligned}$$

2.2.3 作用与表示

注 2.2.2. 除非特殊说明, 本文中的表示均表示在复向量空间上. 本小节中的代数簇定义在特征 0 的代数闭域上. 本小节中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

2.2.3.1 有限群在代数簇上的作用

定义 2.2.8 (代数群作用). 设 G 是代数群, X 是代数簇, 称群作用 $G \curvearrowright X$ 称为代数的, 如果群作用是由代数簇的正则映射给出:

$$\begin{aligned}\varphi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \varphi(g, x).\end{aligned}$$

设 G 是有限群, 作用在代数簇 X 上. 赋予 G 离散的代数群结构, 则这一作用 $G \curvearrowright X$ 是代数的. 用 X/G 表示这一作用的商空间, $\pi : X \rightarrow X/G$ 表示商映射.

定理 2.2.11 (商簇). ^[27] G 是有限群, 作用在仿射代数簇 X . 则商空间 X/G 上可以赋予自然的商代数簇结构, 使得商映射 $\pi : X \rightarrow X/G$ 是有限映射.

2.2.3.2 表示

定义 2.2.9 (线性表示). 称在向量空间上的线性作用为线性表示.

(1) 群 G 的有限维表示是指群 G 在有限维向量空间 V 上的线性作用

$$\varphi : G \times V \rightarrow V.$$

群表示也可以由以下群同态描述:

$$\begin{aligned}\rho : G &\rightarrow \mathrm{GL}(V) \\ g &\mapsto \varphi(g, -) : V \rightarrow V.\end{aligned}$$

特别地:

- (a) 如果 G 是 (实) Lie 群, φ 是光滑映射, 则称此表示为 (实) Lie 群表示,
 - (b) 如果 G 是复 Lie 群, φ 是复解析映射, 则称此表示为复 Lie 群表示,
 - (c) 如果 G 是代数群, φ 是正则映射, 则称此表示为代数群的正则表示.
- (2) $\mathbb{F}$ 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示是指 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在有限维向量空间 V 上的线性作用

$$\varphi : \mathfrak{g} \times V \rightarrow V,$$

满足:

- (a) $\varphi(kx, v) = k\varphi(x, v), \forall k \in \mathbb{F}, x \in \mathfrak{g}, v \in V,$
- (b) $\varphi(x + y, v) = \varphi(x, v) + \varphi(y, v), \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V,$
- (c) $\varphi(x, \varphi(y, v)) - \varphi(y, \varphi(x, v)) = \varphi([x, y], v), \forall x, y \in \mathfrak{g}, v \in V.$

Lie 代数表示也可以由以下 Lie 代数同态描述:

$$\begin{aligned}\theta : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ x &\mapsto \varphi(x, -) : V \rightarrow V.\end{aligned}$$

通过 φ , Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示和 $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -模的定义是等价的; 群 G 的表示和群代数 $\mathbb{C}[G]$ -模的定义是等价的. 在没有歧义的时候, 常简称 $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -模为 $\mathfrak{g}$ -模, 简称 $\mathbb{C}[G]$ -模为 G -模.

定义 2.2.10 (表示间的态射). 群 G 的表示间态射是指 G -模同态, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示间的态射是指 $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -模同态.

注 2.2.3. 本文之后提及的复 Lie 群在向量空间上的表示, 都是指复 Lie 群表示.

定义 2.2.11 (表示环). ^[28] 如果 G -模 (相应地, $\mathfrak{g}$ -模) 完全可约. 则定义 G (相应地, $\mathfrak{g}$) 的不可约模的同构类生成的环, 记作 $R(G)$ (相应地, $R(\mathfrak{g})$). 在生成元不可约表示上定义加法为直和:

$$V_1 + V_2 := V_1 \oplus V_2, \quad V_1, V_2 \in R(G) \text{ (相应地, } R(\mathfrak{g}) \text{) 是不可约表示;}$$

乘法由张量积给出:

$$V_1 \cdot V_2 := \sum_i c_i V_i, \quad V_1 \otimes V_2 = \bigoplus_i (V_i)^{\oplus c_i} \text{ 是不可约分解.}$$

2.3 优化理论

2.3.1 多项式优化

这一小节简要介绍多项式优化问题 (Polynomial Optimization Problem, 简称 POP) 的基本理论.

定义 2.3.1 (POP). 给定实多项式 $p, g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[x]$, 称如下的优化问题:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & p(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2-1)$$

为 POP 的一个实例. 优化问题 (2-1) 的可行域记为

$$\mathcal{K}_{\text{POP}} := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m\}$$

一些组合优化问题, 比如 0-1 整数规划, 可以建模成如下形式的 POP:

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \langle c, x \rangle \\ \text{s.t.} & x_i^2 - x_i = 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

其中 $c \in \mathbb{R}^n$ 给出目标函数, 众所周知 0-1 整数规划的判定形式是 NP-完全问题.

由于 POP 强大广泛的建模能力, 求解一般的 POP 可能是十分困难的. 通常的思路是考虑求解相对简单的凸松弛问题, 对于 POP 广泛采用的是半定松弛, 即松弛成半定规划问题 (Semi-definite Programming, 简称 SDP).

SDP 的一般形式是:

$$\begin{cases} \max_{X \in S^2 \mathbb{R}^n} & \langle C, X \rangle \\ \text{s.t.} & X \geq 0 \\ & \langle A_j, X \rangle = b_j, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (2-2)$$

其中 $C \in S^2 \mathbb{R}^n$ 是对称矩阵, 对称矩阵空间 $S^2 \mathbb{R}^n$ 上的内积定义为 $\langle A, B \rangle := \text{tr}(AB)$. SDP 是具有良好的性质的凸优化问题, 许多成熟的优化技术 (例如内点法, 原始-对偶理论) 可以应用来求解 SDP. SDP (2-2) 的对偶问题形式如下:

$$\begin{cases} \min_{y \in \mathbb{R}^m} & \langle b, y \rangle \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^m y_j A_j \geq 0. \end{cases}$$

其中 $b = (b_j)_{j=1}^m$.

2.3.2 Moment-SoS 松弛分层

下面简单描述如何将 POP 松弛成一系列易于求解的 SDP 问题, 即 Moment-SoS 松弛分层技术^[3]. 为简便起见这里使用无约束 POP 说明 Moment-SoS 松弛分层技术的思想. 更具体的细节请见第 3.2 小节. 无约束 POP $\min_{x \in \mathbb{R}^n} p(x)$ 等价于如下优化问题:

$$\begin{cases} \max_{\mu \in \mathbb{R}} & \mu \\ \text{s.t.} & p(x) - \mu \geq 0. \end{cases}$$

条件 $p(x) - \mu \geq 0$ 在计算上不易判定, 将 $p(x) - \mu \geq 0$ 松弛为条件 $p(x) - \mu \in \sum \mathbb{R}[x]^2$, 得到一个 (无穷维) 优化问题:

$$\begin{cases} \max_{\substack{\mu \in \mathbb{R} \\ W \in S^2 \mathbb{R}^{|T^n|}}} & \mu \\ \text{s.t.} & p(x) - \mu = [T^n]^\top W [T^n] \\ & W \geq 0, \end{cases} \quad (2-3)$$

其中 $T^n := \{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$ 收集了 $\mathbb{R}[x]$ 的单项式, $[T^n]$ 把 T^n 排成列向量. (2-3) 是无穷维优化问题, 考虑在有限维 $W_t \in S^2 \mathbb{R}^{|T_t^n|}$ 处截断:

$$\begin{cases} \max_{\substack{\mu \in \mathbb{R} \\ W_t \in S^2 \mathbb{R}^{|T_t^n|}}} & \mu \\ \text{s.t.} & p(x) - \mu = [T_t^n]^\top W_t [T_t^n] \\ & W_t \geq 0, \end{cases} \quad (2-4)$$

其中 $T_t^n := \{x^\alpha \in T^n : |\alpha| \leq t\}$. 注意到 $p(x) - \mu = [T_t^n]^\top W [T_t^n]$ 本质上是一个线性约束条件, (2-4) 可以被转写成一个标准的 SDP, 从而可以利用若干已有的凸优化算法求解.

第3章 无标记传感问题的计算

3.1 引言: 无标记传感问题 (USP)

给定满秩矩阵 $A^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和满足 $m \geq s > n > 0$ 的向量 $y^* \in \mathbb{R}^s$, 无标记传感问题^[9,10] 要求: 当仅知 $y^* \in \mathbb{R}^s$ 由 $A^* \xi^*$ 的 s 个乱序条目组成时, 如何判定未知向量 $\xi^* \in \mathbb{R}^n$ 的唯一性并高效恢复它. 该问题广泛存在于自然科学与工程领域, 例如生物学^[29–32], 神经科学^[33], 计算机视觉^[11–15] 和通信网络^[16–18].

文献^[9] 的定理 1 断言: 当 $s \geq 2n$ 且 A^* 为一般矩阵时, 无标记传感问题的解具有唯一性. 对于 $m = s$ 的情形, Song, Choi 和 Shi^[18] 提出如下恢复向量 ξ^* 的新方法: 令

$$q_i(x) = p_i(A^* x) - p_i(y^*),$$

其中 $x = [x_1, \dots, x_n]$, 且

$$p_k(y) = \sum_{i=1}^m y_i^k \in \mathbb{R}[y]$$

为变量 $y = [y_1, \dots, y_m]$ 的 k 次等幂和. 由于 p_k 是 y 的对称多项式, 其值不依赖于变量 $y_1, \dots, y_m$ 的排列顺序. 设 π 为置换群 $\mathfrak{S}_m$ 中的元素, 若 ξ^* 是方程

$$A^* x = \pi(y^*) \quad (3-1)$$

的解, 则它必为多项式 $q_i(x)$ 的根, 即对 $i = 1, \dots, m$ 有

$$q_i(\xi^*) = p_i(A^* \xi^*) - p_i(y^*) = p_i(\pi(y^*)) - p_i(y^*) = 0.$$

根据文献^[18] 的定理 1 以及文献^[9,10], 对于给定矩阵 $A^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (其元素为独立同分布随机变量, 采样自 $\mathbb{R}$ 上的任意连续概率分布), 当 $m \geq 2n$ 时, 概率为 1 地, ξ^* 是多项式系统

$$Q_m = \{q_1(x) = 0, \dots, q_m(x) = 0\} \quad (3-2)$$

的唯一解. 数值实验表明: 求解前 $n+1$ 个方程即可恢复解 ξ^* , 即 ξ^* 是 Q_{n+1} 的唯一解. 因此, 文献^[18] 提出如下问题 (参见^[34] 的猜想 6):

问题 3.1. 对于一般的矩阵 $A^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n+1$) 以及位于 A^* 列空间的一般的向量的坐标置换 y^* , 多项式系统

$$Q_{n+1} = \{q_1(x) = 0, \dots, q_n(x) = 0, q_{n+1}(x) = 0\} \quad (3-3)$$

具有唯一解 ξ^* , 满足 $A^* \xi^* = \pi(y^*)$.

文献^[35]证明了对于一般矩阵 $A^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和任意向量 y^* , 变量 $x = x_1, \dots, x_n$ 上的 n 元多项式系统

$$\mathcal{Q}_n = \{q_1(x) = 0, \dots, q_n(x) = 0\} \quad (3-4)$$

至多有 $n!$ 个解. 进一步地, 若 y^* 是 A^* 列空间中一般向量的坐标置换, 则在 $\mathcal{Q}_n$ 的解中仅存在唯一向量 ξ^* 满足 $A^* \xi^* = \pi(y^*)$. 可通过符号计算或同伦连续法求解 $\mathcal{Q}_n$, 再通过数值优化方法从 $n!$ 个解中筛选出 ξ^* .

例 3.1.1. 给定矩阵 A^* 和向量 y^*

$$A^* := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad y^* := \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

求满足以下带有未知置换线性方程组的解 ξ^*

$$A^* \xi^* = \pi(y^*).$$

其中 π 是 y^* 坐标的未知置换.

根据 A^* 和 y^* 可计算多项式组:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 3x_1 + 3x_2 + 9, \\ q_2(x) &= 21x_1^2 + 28x_1x_2 + 17x_2^2 - 145, \\ q_3(x) &= 57x_1^3 + 150x_1^2x_2 + 120x_1x_2^2 + 27x_2^3 + 1053, \\ q_4(x) &= 16x_1^3x_2 + 44x_1^2x_2^2 + 24x_1x_2^3 - 400. \end{aligned}$$

多项式系统 $\{q_1(x) = 0, q_2(x) = 0, q_3(x) = 0, q_4(x) = 0\}$ 存在唯一解

$$\xi^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

经验证, 该解满足式 (3-1), 其中置换 $\pi = [1, 2, 4, 3]$ (即交换第 3, 4 位置坐标).

特别地, ξ^* 是子系统 $\{q_1(x) = 0, q_2(x) = 0, q_3(x) = 0\}$ 的唯一解, 此结果支持开放问题 (3.1) 的肯定性回答.

子系统 $\{q_1(x) = 0, q_2(x) = 0\}$ 存在两个解:

$$\eta^* = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ -\frac{11}{5} \end{pmatrix}, \quad \xi^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

其中 η^* 不满足式 (3-1) 的条件.

相较于现有解决无标记传感问题 (不含特殊假设如文献^[36]中考虑的稀疏性等) 的各类方法: RANSAC^[37], 期望最大化^[38], 分支定界法^[39], 同伦连续与 Gröbner 基方法^[35], 我们提出通过将多项式系统 $\mathcal{Q}_{n+1}$ 约化为秩一矩矩阵补全问题来高效求取其唯一解, 该问题可借助多种高效数值算法求解.

3.2 预备知识: 半定松弛求解零维理想

对于变量 $x = [x_1, \dots, x_n]$ 的零维多项式系统 (3-5) 的求解, 存在许多符号或数值算法及软件包

$$\{g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}, \quad (3-5)$$

例如^[40-45]. 我们关注的方法是 Parrilo^[4,5] 与 Lasserre^[3] 提出的半定松弛方法, 该方法通过求解一系列具有常值目标函数 1 的 SDP 问题实现:

$$\begin{cases} \min & 1 \\ \text{s.t.} & y_0 = 1, \\ & M_t(y) \geq 0, \\ & M_{t-d_j}(g_j y) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (3-6)$$

其中 $d_j := \left\lceil \frac{\deg(g_j)}{2} \right\rceil$, $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n}$, 且 $M_t(y)$ 是 t 阶截断矩量矩阵

$$M_t(y) := (y_{\alpha+\beta})_{|\alpha|, |\beta| \leq t} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_t^n \times \mathbb{N}_t^n},$$

这里 $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$, $|\beta| = \sum_i \beta_i$. 该矩阵是完整 (无限维) 矩量矩阵

$$M(y) = (y_{\alpha+\beta}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$$

的主子矩阵.

假设 $g_j(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} g_{j,\alpha} x^\alpha \in \mathbb{R}[x]$. 若 $M_t(y)$ 的第 (k, l) 项为 y_β , 则关于 y 和 g_j 的局部化矩阵 $M_{t-d_j}(g_j y)$ 的第 (k, l) 项定义为

$$M_{t-d_j}(g_j y)(k, l) := \sum_{\alpha} g_{j,\alpha} y_{\alpha+\beta}.$$

Lasserre, Laurent 和 Rostalski 明确给出了秩条件, 这些条件保证我们通过半定松弛方法找到多项式系统 (3-5) 的所有实解^[6-8].

命题 3.2.1 (平坦延拓条件). ^[6] [命题 4.4] 设 $t \geq d := \max_j d_j$ 且 $y \in \mathcal{K}_t^{\mathbb{R}} := \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_t^n} : y_0 = 1, M_t(y) \geq 0, M_{t-d_j}(g_j y) = 0, j = 1, \dots, m \right\}$ 满足 $\text{rank } M_t(y)$ 达到最大值. 若存在某个满足 $2d \leq s \leq t$ 的 s 使得

$$\text{rank } M_s(y) = \text{rank } M_{s-1}(y) \quad (3-7)$$

成立, 或存在某个满足 $d \leq s \leq t$ 的 s 使得

$$\text{rank } M_s(y) = \text{rank } M_{s-d}(y) \quad (3-8)$$

成立. 则有 $I(\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)) = \langle \ker M_s(y) \rangle$, 其中 $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$. 此外, $\text{rank } M_s(y) = |\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)|$.

推论 3.2.2. 若多项式系统 $\{g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}$ 存在唯一实解, 且假设 $y \in \mathcal{K}_d^{\mathbb{R}}$ 满足平坦延拓条件 (3-8), 则该唯一实解可从截断矩量矩阵 $M_d(y)$ 的第一列中读取, 其中 $d = \max_{j=1, \dots, m} \left\lceil \frac{\deg(g_j)}{2} \right\rceil$.

证明. 由于平坦延拓条件 (3-8) 成立, 文献^[46] 中推论 1.4 表明向量 $y \in \mathcal{K}_d^{\mathbb{R}}$ 可延拓至 $\tilde{y} \in \mathcal{K}^{\mathbb{R}} := \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} : y_0 = 1, M(y) \geq 0, M(g_j y) = 0, j = 1, \dots, m \right\}$, 且满足

$$\text{rank}(M(\tilde{y})) = \text{rank}(M_d(y)) = \text{rank}(M_0(y)) = 1.$$

当多项式系统存在唯一解时, 由 $\text{rank}(M(\tilde{y})) = 1 = |\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)|$ 及文献^[6] 中命题 1.1 可知, $I(\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)) = \ker(M(\tilde{y}))$, 这里用一个向量空间表示一个理想是指该理想中的多项式的系数向量构成的向量空间恰好是 $\ker(M(\tilde{y}))$. 进一步地, 根据文献^[6] 命题 3.6, 有 $\ker(M(\tilde{y})) = \langle \ker(M_d(y)) \rangle$. 结合文献^[6] 定理 3.3 与命题 1.1, 唯一解 ξ^* 可从矩量矩阵 $M_d(y)$ 的首列恢复: 其 $(1, 1)$ 元为 1, 且坐标分量满足

$$\xi_i^* = M(\tilde{y})(1, i+1) = M_d(y)(1, i+1), \quad i = 2, \dots, n.$$

□

注 3.2.1. 对于零维多项式系统的求解, 已知命题 3.2.1 中的平坦条件将在某个 $s \geq d$ 时满足. 推论 3.2.2 中满足条件 (3-8) 的 $y \in \mathcal{K}_s^{\mathbb{R}}$ 存在且唯一, 其本质上是由 Dirac 测度 δ_{ξ^*} 生成的矩序列, 具体形式为 $y_\alpha = (\xi^*)^\alpha$. 当条件 (3-8) 在 $t = s$ 处达成时, 即可从 $M_s(y)$ 恢复解, 此时 SDP 求解器中矩量矩阵的规模由 $\binom{n+s}{s}$ 控制.

3.3 解的唯一性

3.3.1 双有理等价

以下定理表明, 对于一般矩阵 $A^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 及其列空间中一般向量 y^* 的坐标置换, 通过求解多项式系统 $\mathcal{Q}_{n+1}$ 可得到所需的唯一的解向量 ξ^* . 本小节中代数簇上的拓扑取 Zariski 拓扑, 用 $\overline{X}$ 表示 X 的 Zariski 闭包.

定理 3.3.1. 如下的映射

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^{n+1} \\ (A^*, \xi^*) &\mapsto (A^*, p_1(A^* \xi^*), \dots, p_{n+1}(A^* \xi^*)) \end{aligned} \quad (3-9)$$

给出了定义域 $\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n$ 到像集的闭包 $\overline{f(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)} \subseteq \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^{n+1}$ 的双有理等价.

注 3.3.1. 态射 (3-9) 的双有理性意味着存在 $V = \overline{f(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)}$ 的稠密开子集 U_2 , 使得 f 诱导出从 $U_1 := f^{-1}(U_2)$ 到 U_2 的双射, 参见^[47] [章节 1, 推论 4.5].

因此, 若样本点 (A^*, y^*) 满足条件 $(A^*, p_1(y^*), \dots, p_{n+1}(y^*)) \in U_2$, 则存在唯一向量 ξ^* 使得 $(A^*, \xi^*) \in U_1$ 且

$$(A^*, p_1(A^* \xi^*), \dots, p_{n+1}(A^* \xi^*)) = (A^*, p_1(y^*), \dots, p_{n+1}(y^*)).$$

此结论对上述问题 3.1 给出了肯定性解答.

为方便计, 我们将 $m = s > n > 0$ 情形下的无标记传感问题简称为 USP (Unlabeled Sensing Problem), 并将 USP 中的数据集 (A^*, y^*) 称为样本点.

态射 f 可分解为以下两个态射的复合 $f = \gamma \circ g$, 其中

$$g : \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \overline{g(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)} \subseteq \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m \quad (3-10)$$

$$\begin{aligned} (A^*, \xi^*) &\mapsto (A^*, p_1(A^* \xi^*), \dots, p_m(A^* \xi^*)), \\ \gamma : \overline{g(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)} &\rightarrow \overline{f(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)} \subseteq \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m \quad (3-11) \\ (A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_m(\eta^*)) &\mapsto (A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_{n+1}(\eta^*)). \end{aligned}$$

由于双有理等价的复合仍为双有理等价, 定理 3.3.1 的证明可分解为两部分:

- 证明态射 g 的双有理性,
- 证明态射 γ 的双有理性.

当 $m = n+1$ 时, 态射 g 等同于定理 3.3.1 中的态射 f . 本节将证明态射 g 的双有理性, 从而导出 $m = n+1$ 情形下定理 3.3.1 的结论: 对于一般矩阵 $A^* \in \mathbb{C}^{(n+1) \times n}$ 及其列空间中一般向量的置换 y^* , 可通过求解多项式系统 Q_{n+1} 得到所需的唯一的解向量 ξ^* .

进一步地, 由于 g 的双有理性, 对于无标记传感问题 (USP) 的一般样本点 (A^*, y^*) , 系统 (3-2) 中的多项式组 Q_m 具有唯一解 $x = \xi^*$, 此解同时也是 USP 的唯一解.

考虑到实际应用中 m 可能远大于 n , 我们需要证明当 $m \geq n+1$ 时态射 f 的双有理性. 这将保证较小规模的多项式系统 Q_{n+1} 在 (3-3) 中对于一般 (A^*, y^*) 存在唯一解. 证明 f 双有理性的关键在于建立以下域扩张次数关系:

$$\begin{aligned} [\mathbb{C}(A, x) : \mathbb{C}(A, p_1(Ax), \dots, p_n(Ax))] &= n!, \\ [\mathbb{C}(A, p_1(Ax), \dots, p_{n+1}(Ax)) : \mathbb{C}(A, p_1(Ax), \dots, p_n(Ax))] &= n!. \end{aligned}$$

第一个次数对应于由正则序列 $p_1(Ax), \dots, p_n(Ax)$ 给出的完全交的 Bézout 数, 第二个次数恰为 $p_{n+1}(Ax)$ 在域 $\mathbb{C}(A, p_1(Ax), \dots, p_n(Ax))$ 上的极小多项式次数.

本节将证明以下定理, 其表明对于一般矩阵 $A^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 及其列空间中一般向量的置换 y^* , 通过求解多项式系统 Q_m 可得到唯一的所求的解向量 ξ^* .

定理 3.3.2. 当 $m > n > 0$ 时, 态射

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m \\ (A^*, \xi^*) &\mapsto (A^*, p_1(A^* \xi^*), \dots, p_m(A^* \xi^*)) \end{aligned}$$

给出了从定义域 $\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n$ 到像闭包 $\overline{g(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)}$ 上的双有理等价.

当 $m = n+1$ 时, 态射 g 与 f 等价, 即在此特殊情形下定理 3.3.2 蕴含定理 3.3.1.

我们将态射 g 分解为由 (3-12) 和 (3-15) 分别定义的两个支配态射 α 与 β 的复合. 为证明 g 的双有理性, 只需证明 α 和 β 均为双有理等价.

定义 3.3.1. 定义态射 α 如下:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n &\rightarrow Y_{n+1}(A|y) \subseteq \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m \\ (A^*, \xi^*) &\mapsto (A^*, A^* \xi^*), \end{aligned} \quad (3-12)$$

其中 $Y_{n+1}(A|y)$ 是矩阵 $(A|y)$ 所有 $(n+1)$ 阶子式的零点集, 此处 $A = [a_{ij}]$ 为 $m \times n$ 变量矩阵, $y = [y_i]$ 为 m 维变量列向量 ($i \in [m], j \in [n]$). 具体而言, $Y_{n+1}(A|y)$ 是由秩小于 $n+1$ 的 $m \times (n+1)$ 矩阵构成的行列式簇.

根据定理 2.1.4, 该行列式簇不可约, 即不能表示为两个真闭子簇的并集.

引理 3.3.3. 态射 α 是双有理的.

证明. 行列式簇 $Y_{n+1}(A|y)$ 不可约, 且态射 α 将 $\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n$ 的非空开子集 S_0 映射至 $Y_{n+1}(A|y)$ 的非空开子集 $S_1 = \alpha(S_0)$, 其中

$$S_0 := \{(A^*, \xi^*) \in \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n : \text{rank}(A^*) = n\}, \quad (3-13)$$

$$S_1 := \{(A^*, \eta^*) \in Y_{n+1}(A|y) : \text{rank}(A^*) = n\}, \quad (3-14)$$

分别对应 USP 的解集和正确排序的样本点集. 因此 α 是支配态射. 进一步地, 对任意 $(A^*, \eta^*) \in S_1$, 利用线性代数中的 Cramer 法则, α^{-1} 由 S_1 到 S_0 的正则映射给出. 由此可得 α 的双有理性. $\square$

定义 3.3.2. 第二个待证明双有理性的支配态射定义为:

$$\begin{aligned} \beta : Y_{n+1}(A|y) &\rightarrow \overline{\beta(Y_{n+1}(A|y))} \subseteq \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m \\ (A^*, \eta^*) &\mapsto (A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_m(\eta^*)). \end{aligned} \quad (3-15)$$

注意 β 是有限态射:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m, \\ (A^*, \eta^*) &\mapsto (A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_m(\eta^*)) \end{aligned} \quad (3-16)$$

的限制, 因此 β 也是有限闭态射 (参见^[47] [章节 II, 练习 3.5]), 且满足

$$\beta(Y_{n+1}(A|y)) = \overline{\beta(Y_{n+1}(A|y))} = \overline{g(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)}.$$

为证明引理 3.3.4, 首先明确对称群 $\mathfrak{S}_m$ 在 $\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m$ 和 $\mathbb{C}[A, y]$ 上的作用.

置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ 通过 $\sigma(y_i) = y_{\sigma(i)}$ 作用于 $\mathbb{C}[A, y]$, 保持 A 不变. 对任意 $f \in \mathbb{C}[A, y]$ 和 $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*) \in \mathbb{C}^m$, 有

$$(\sigma(f))(y^*) = f(y_{\sigma(1)}^*, \dots, y_{\sigma(m)}^*).$$

$\mathfrak{S}_m$ 在 $\mathbb{C}^m$ 上的作用定义为:

$$\sigma(y_1^*, \dots, y_m^*) = (y_{\sigma^{-1}(1)}^*, \dots, y_{\sigma^{-1}(m)}^*). \quad (3-17)$$

此作用诱导 $\mathfrak{S}_m$ 在 $\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m$ 纤维上的作用:

$$\sigma(A^*, y^*) = (A^*, \sigma(y^*)). \quad (3-18)$$

对于变量向量 $y = [y_1, \dots, y_m]$, 置换作用 $\sigma(y) := [y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(m)}]$ 生成新的变量向量. 我们记 $Y_{n+1}(A|\sigma(y))$ 为使得矩阵 $(A|\sigma(y))$ 的所有 $(n+1)$ -阶子式取零的行列式簇, 则有等式

$$Y_{n+1}(A|\sigma(y)) = \sigma(Y_{n+1}(A|y)).$$

引理 3.3.4. 态射 β 是双有理的.

证明. 定义 W_1 是 $Y_{n+1}(A|y)$ 在 $\mathfrak{S}_m$ 作用下自由的子集.

$$W_1 := Y_{n+1}(A|y) \setminus \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_m \setminus \{1\}} Y_{n+1}(A|\sigma(y)). \quad (3-19)$$

那么 W_1 在 $Y_{n+1}(A|y)$ 中是开集. 依据^[35] [定理 1], 对于一般矩阵 $A^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 一般列向量 $\xi^* \in \mathbb{C}^n$ 及任意非单位置换 $\sigma \neq 1$, 有

$$\text{rank}(A^*|\sigma(A^*\xi^*)) = n + 1.$$

故 W_1 非空且在 $Y_{n+1}(A|y)$ 中稠密开.

下面验证 $\beta^{-1}(\beta(W_1)) = W_1$, 且 β 在 W_1 上的限制 β' 是从 W_1 到 $\beta(W_1)$ 的双射. 首先注意到: 对任意 $(A^*, \eta^*) \in W_1$, η^* 的所有分量互异. 应用 Vieta 定理可知, 对任意 $(A^*, \zeta^*) \in \beta^{-1}(\beta(W_1))$, 存在唯一置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ 使得 $\sigma(\zeta^*) = \eta^*$. 由此推出 $\sigma = 1$ 且 $(A^*, \zeta^*) = (A^*, \eta^*) \in W_1$. 进一步可证 β' 是单射.

显然 β' 是满射, 故得双射性. 最后注意到 $\beta(W_1)$ 是 $\beta(Y_{n+1}(A|y))$ 中稠密开集. 定理 2.2.11 表明 β 是有限态射, 因此 β 为闭态射. 由于 W_1 在 $Y_{n+1}(A|y)$ 中开且 $\beta^{-1}(\beta(W_1)) = W_1$, 可推出 $\beta(W_1)$ 在 $\beta(Y_{n+1}(A|y))$ 中亦开.

综上可知 β 是双有理映射.

□

注 3.3.2. 在本注记中, 我们显式地构造代数簇 $\mathcal{X}$ 的开子集 W , 使得当 USP 的样本点 (A^*, y^*) 属于 W 时, 存在唯一的 m -置换 π 和唯一向量 $\xi^* \in \mathbb{C}^n$ 满足 $A^*\xi^* = \pi(y^*)$.

(1) USP 的样本点集合 S 定义为

$$S := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma(S_1) \subseteq \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m,$$

其中 S_1 由 (3-14) 定义, 且 $\mathfrak{S}_m$ 在 $\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m$ 上的作用由 (3-17) 和 (3-18) 定义. 该集合 S 是 $\mathfrak{S}_m$ -不变闭子簇

$$\mathcal{X} := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma(Y_{n+1}(A|y)) \subseteq \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^m$$

的稠密开子集. 关键观察是: (3-16) 中的有限态射参数化了 $\mathcal{X}$ 的 $\mathfrak{S}_m$ -轨道.

(2) 由于 (3-19) 中的 W_1 非空, 对任意 $\tau \in \mathfrak{S}_m$, 集合

$$\tau(W_1) = \tau(Y_{n+1}(A|y)) \setminus \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_m \setminus \{\tau\}} \sigma(Y_{n+1}(A|y))$$

同样在 $\tau(Y_{n+1}(A|y))$ 中非空且稠密开. 因此, 代数簇 $\mathcal{X}$ 恰有 $|\mathfrak{S}_m| = m!$ 个不可约分支 $\sigma(Y_{n+1}(A|y))$ ($\sigma \in \mathfrak{S}_m$).

(3) 记 (3-19) 中的 W_1 , 则集合

$$W := \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma(W_1)$$

在 $\mathcal{X}$ 中稠密开, 从而 $S \cap W \neq \emptyset$. 由于 W 中任意点属于 $\mathcal{X}$ 的唯一不可约分支, 我们得出结论: 当 USP 的样本点 (A^*, y^*) 属于 W 时, 存在唯一的 m -置换 π 和唯一向量 $\xi^* \in \mathbb{C}^n$ 使得 $A^* \xi^* = \pi(y^*)$. 因此, 对于一般的样本点, USP 的解 (A^*, ξ^*) 是唯一的, 此时 (A^*, ξ^*) 正是 (3-2) 中系统 Q_m 的解.

为证明态射 γ (参见 (3-11)) 的双有理性, 我们构造两个投影

$$\begin{aligned} \delta : \overline{f(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)} &\rightarrow \mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n \\ (A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_{n+1}(\eta^*)) &\mapsto (A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_n(\eta^*)). \\ \epsilon : \overline{\beta(Y_{n+1}(A|y))} &\rightarrow \overline{\text{im } f} \\ (A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_m(\eta^*)) &\mapsto (A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_{n+1}(\eta^*)). \end{aligned} \quad (3-20)$$

显然有 $\delta \circ \gamma = \epsilon$. 注意到 $(A^*, p_1(\eta^*), \dots, p_{n+1}(\eta^*))$ 是 $f(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)$ 中的点, 因此投影 δ 由 (3-20) 唯一确定. 证明的思路是考虑由投影诱导的域扩张:

$$\begin{aligned} \delta^* : \mathbb{C}(\overline{\text{im } \delta}) &\hookrightarrow \mathbb{C}(\overline{\text{im } f}), \\ \epsilon^* : \mathbb{C}(\overline{\text{im } \delta}) &\hookrightarrow \mathbb{C}(\overline{\beta(Y_{n+1}(A|y))}), \\ \gamma^* : \mathbb{C}(\overline{\text{im } f}) &\hookrightarrow \mathbb{C}(\overline{\beta(Y_{n+1}(A|y))}), \end{aligned}$$

从而 $\epsilon^* = \gamma^* \circ \delta^*$. 考虑域扩张次数则

$$\deg(\epsilon^*) = \deg(\gamma^*) \deg(\delta^*).$$

文献^[48]中证明了

$$\deg(c^*) = \deg(\delta^*) = n!, \quad \deg(\gamma^*) = 1.$$

从而表明 γ 给出了 $\overline{\beta(Y_{n+1}(A|y))}$ 到 $\overline{\text{im } f}$ 的双有理映射.

定理 3.3.1 的证明. 考虑 $f = \gamma \circ g$, 由于 g, γ 都给出相应定义域到像闭包之间的双有理映射. 所以 f 给出了定义域 $\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n$ 到像闭包 $\overline{g(\mathbb{C}^{m \times n} \times \mathbb{C}^n)}$ 上的双有理等价.

□

3.4 解的计算

3.4.1 算法设计

为简化起见, 我们假设数据 $A^* \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y^* \in \mathbb{R}^n$ 满足定理 3.3.1 及文献^[35] [定理 2] 中的一般性条件. 本节提出两种符号算法和一种符号-数值算法以求解无标记传感问题 3.1.

3.4.1.1 基于 Gröbner 基的符号算法

恢复 ξ^* 的直接尝试是通过计算 Gröbner 基^[49-51] 求解多项式系统 Q_n , 该方法对应以下的算法 3.1.

已知求解 n 个变量的零维多项式系统的复杂度对 n 呈单指数级增长^[40,52,53], 即使对于一些很规则的算例亦如此^[54]. 通过快速排序算法检验 $A^*\xi$ 的坐标是否为 y^* 的置换排列的复杂度对 m 呈拟线性, 当 m 不是太大时 (不是 n 的指数多). 整体算法的复杂度主要由步骤 4 计算 Gröbner 基控制.

根据定理 3.3.1, 多项式系统 Q_{n+1} 仅有一个解. 实验 3.4.3.1 的结果表明, 计算仅含单解的多项式系统 Q_{n+1} 的 Gröbner 基的效率相较于求解含有 $n!$ 多解的系统 Q_n 显著更高. 这一观察引出了以下算法 3.2.

上述两种算法均采用符号计算方法. 当输入数据精确且测量无噪声干扰时, 通过这两种算法获得的解是精确的. 若给定数据受噪声污染, 扰动后的多项式系统 Q_{n+1} 将成为超定系统而无解. 然而在实际应用场景中, 所有测量数据都不可避免地受噪声影响. 因此, 需要一种稳健且高效的符号-数值混合算法来处理无标记传感问题中观测到的含噪测量数据 y^* .

3.4.1.2 基于 SDP 的数值算法

如第 3.2 节所述, 零维多项式系统 Q_{n+1} 的解可通过求解半定松弛问题获得. 本小节给出一个利用秩 1 矩量矩阵补全的算法, 用于数值求解多项式系统 Q_{n+1} (3-3).

文献^[35] 提出的期望最大化 (EM) 方法是一种用于精化从数值多项式系统求解器中提取解的代数技巧. 通过对 $A^*\xi_{\text{sdp}}$ 和 y^* 进行排序, 若所提取的解具有足够

算法 3.1 基于 Gröbner 基符号求解系统 Q_n (3-4) 的算法

输入: (A^*, y^*)

- 有理数矩阵 $A^* \in \mathbb{Q}^{m \times n}$
- 向量 $y^* \in \mathbb{Q}^n$, 满足存在置换 $\pi \in \mathfrak{S}_m$ 使得 $\pi(y^*) \in \text{im}(A^*)$

输出: 解 $\xi^* \in \mathbb{Q}^n$ 使得 $A^* \xi^* = \pi(y^*)$

```

1: for  $i = 1, \dots, n$  do
2:    $q_i \leftarrow \text{PowerSum}(A^*x, i) - \text{PowerSum}(y^*, i);$            ▷ 构造幂和多项式
3: end for
4:  $GB \leftarrow \text{GroebnerBasis}(q_1, \dots, q_n);$            ▷ 计算  $I_n = \langle Q_{n+1} \rangle$  的 Gröbner 基
5:  $roots \leftarrow \text{Solve}(GB);$                                ▷ 利用 Gröbner 基提取根:
    $roots = \{\xi \in \mathbb{C}^n : q_i(\xi) = 0, i = 1, \dots, n\}$ 
6:  $y_{sort}^* \leftarrow \text{Sort}(y^*);$                                ▷ 将  $y^*$  的坐标排序
7: for  $\xi \in roots$  do
8:   if  $\xi \notin \mathbb{R}^n$  then
9:     continue;                                           ▷ 舍去复根
10:  end if
11:   $y_0 \leftarrow \text{Sort}(A^*\xi);$                                ▷ 将  $A^*\xi$  的坐标排序
12:  if  $y_0 = y_{sort}^*$  then                                   ▷ 检查  $A^*\xi$  的坐标是否为  $y^*$  坐标的置换排列
13:    return  $\xi^* \leftarrow \xi;$ 
14:  end if
15: end for

```

算法 3.2 基于 Gröbner 基符号求解超定系统 Q_{n+1} (3-3) 的算法

输入: (A^*, y^*)

- 有理数矩阵 $A^* \in \mathbb{Q}^{m \times n}$
- 向量 $y^* \in \mathbb{Q}^n$, 满足存在置换 $\pi \in \mathfrak{S}_m$ 使得 $\pi(y^*) \in \text{im}(A^*)$

输出: 解 $\xi^* \in \mathbb{Q}^n$ 使得 $A^* \xi^* = \pi(y^*)$

```

1: for  $i = 1, \dots, n+1$  do
2:    $q_i \leftarrow \text{PowerSum}(A^*x, i) - \text{PowerSum}(y^*, i);$            ▷ 构造幂和多项式
3: end for
4:  $GB \leftarrow \text{GroebnerBasis}(q_1, \dots, q_{n+1});$            ▷ 计算  $I_{n+1} = \langle Q_{n+1} \rangle$  的 Gröbner 基
5:  $roots \leftarrow \text{Solve}(GB);$                                ▷ 由 Gröbner 基提取根:
    $roots \leftarrow \{\xi \in \mathbb{Q}^n \mid q_i(\xi) = 0, i = 1, \dots, n+1\}$ 
6:  $\xi^* \leftarrow roots[0];$                                    ▷ 提取解集中唯一的解:  $roots = \{\xi^*\}$ 
7: return  $\xi^*;$ 

```

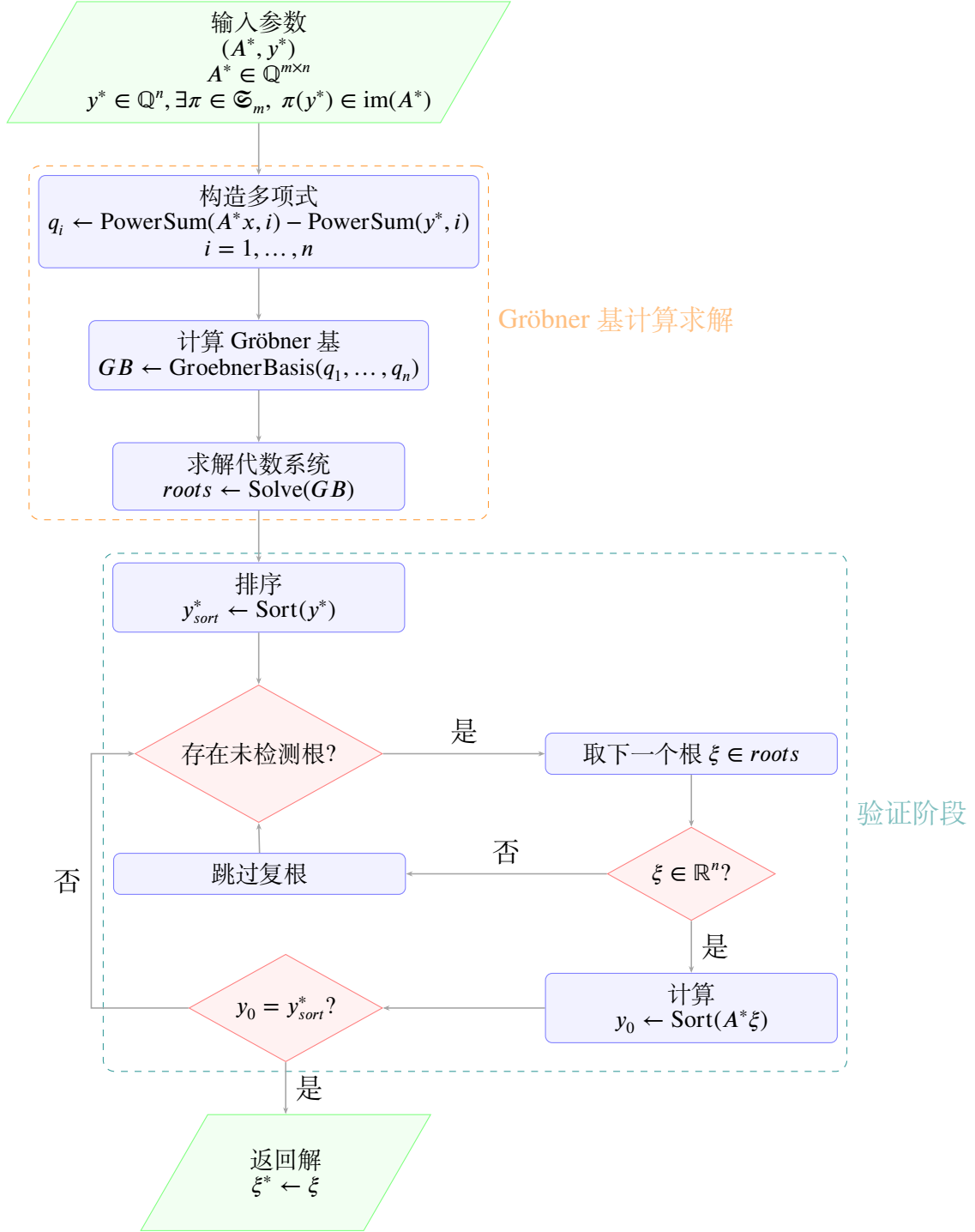


图 3-1 基于 Gröbner 基的符号求解算法 3.1

精度, 则可预期排序后的 $A^* \xi_{\text{sdp}}$ 与 y^* 将匹配, 从而恢复置换 π 并将问题约化为经典线性回归问题. 经典线性回归的数值精度由 A^* 的条件数和 y^* 的精度决定, 这些量在数值算法中通常可被更好地控制.

除了我们提出的以上基于半定松弛方法数值求解零维多项式系统 Q_{n+1} 的算法 3.3, 前人^[35]提出了基于同伦连续^[56]方法求解零维多项式系统 Q_n 的算法 AIEM. 同伦连续方法通过构造从易解系统到目标系统 Q_n 的连续路径进行求解,

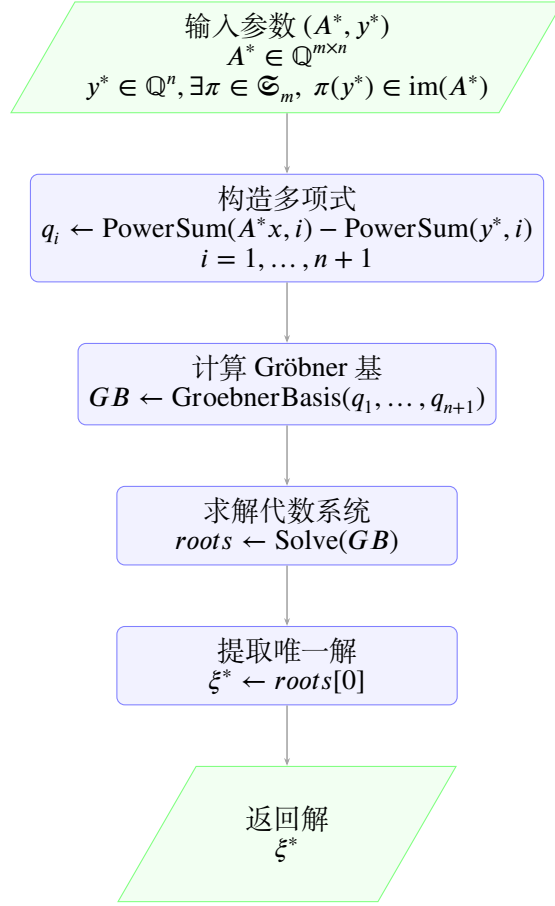


图 3-2 基于 Gröbner 基的超定系统符号求解算法 3.2

具体流程如下: 引入辅助参数 t , 建立同伦方程组

$$H(x, t) = 0 \quad (t \in [0, 1]),$$

其中当 $t = 1$ 时对应目标系统, $t = 0$ 时对应已知解的初始系统, 当 t 从 0 逐渐增大到 1 时, 我们得到一条多项式系统空间中的路径. 同伦求解器按照某种步长在这条路径上追踪, 每一步按照依照 Newton 方法求解系统, 以上一步系统的解作为下一步系统迭代求解的初始点. 同伦求解器返回至多 $n!$ 个根, 再通过 EM 排序选取真实解.

3.4.2 算法分析

3.4.2.1 算法原理

本小节我们论证在上一小节 3.4.1.2 中提出的算法 3.3 的正确性. 设 $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$, $d_j = \deg g_j$, 令 $d = \max_j d_j$, 对于 $t \geq d$, 定义凸集

$$\mathcal{K}_t^{\mathbb{R}}(I) := \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_t^n} : y_0 = 1, M_t(y) \geq 0, M_{t-d_j}(g_j y) = 0, j = 1, \dots, m \right\}, \quad (3-21)$$

$$\mathcal{K}^{\mathbb{R}}(I) := \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^n} : y_0 = 1, M(y) \geq 0, M(g_j y) = 0, j = 1, \dots, m \right\}. \quad (3-22)$$

算法 3.3 基于 SDP 数值求解超定系统 Q_{n+1} (3-3) 的松弛算法**输入:** (A^*, y^*)

- 有理数矩阵 $A^* \in \mathbb{Q}^{m \times n}$
- 向量 $y^* \in \mathbb{Q}^n$, 满足存在置换 $\pi \in \Sigma_m$ 使得 $\pi(y^*) \in \text{im}(A^*)$

输出: 松弛解 $\xi^* \in \mathbb{R}^n$

```

1: for  $i = 1, \dots, n+1$  do
2:    $q_i \leftarrow \text{PowerSum}(A^*x, i) - \text{PowerSum}(y^*, i);$  ▷ 构造幂和多项式
3: end for
4:  $sdp \leftarrow \text{GenerateOptimizationSystem}(q_1, \dots, q_{n+1});$  ▷ 生成(3-25)中的 SDP 系统
5:  $t \leftarrow \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil;$  ▷ 设置松弛阶
6:  $M_t \leftarrow \text{SdpSolve}(sdp, t);$  ▷ 求解 SDP 问题 (3-25), 获取  $s$  阶松弛的矩量矩阵
7:  $[U, S, V] \leftarrow \text{SVD}(M_t);$  ▷ 计算  $M_t$  的奇异值分解  $M_t = USV^{-1}$ 
8:  $x_1 \leftarrow U(1 : n+1, 1);$  ▷ 选取  $U$  的前  $n+1$  行
9:  $\xi_{\text{sdp}} \leftarrow \left( \frac{x_1(k+1, 1)}{x_1(1, 1)} \right)_{k=1, \dots, n};$  ▷ 归一化向量恢复近似解
10:  $\xi_{\text{EM}} \leftarrow \text{EM}(\xi_{\text{sdp}});$  ▷ 使用[55]的 EM 方法精化解
11: return  $\xi^* \leftarrow \xi_{\text{EM}}$ 

```

使用如下的多重指标记号表示 n 个变元的单项式的集合: $T^n := \{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, $T_t^n := \{x^\alpha \in T^n : |\alpha| \leq t\}$.

引理 3.4.1. 设 $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ 为 $\mathbb{R}[x]$ 中的理想, 且 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I) \neq \emptyset$. 若 $v \in \mathbb{R}^n$ 是 I 的实根 (即 $v \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$), 则对任意 $t \geq d$, 截断矩序列

$$y_t^{\delta_v} = (v^\alpha)_{\alpha \in T_{2t}^n}$$

是以下优化问题的最优解:

$$\begin{cases} \min & \text{rank}(M_t(y)) \\ \text{s. t.} & y_0 = 1, \\ & M_t(y) \geq 0, \\ & M_{t-d_j}(g_j y) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3-23)$$

证明. 由于 $y_t^{\delta_v}$ 来源于 Dirac 测度 δ_v , 根据定义有 $(y_t^{\delta_v})_0 = v^0 = 1$, 且

$$M_t(y_t^{\delta_v}) = \zeta_{v,t} \zeta_{v,t}^\top \geq 0,$$

其中 $\zeta_{v,t} = (v^\alpha)_{\alpha \in T_t^n}$ 为列向量. 对于 $g_j(x) = \sum_{\alpha \in T^n} g_{j,\alpha} x^\alpha$, 定义 $\text{vec}(g_j) = (g_{j,\alpha})_\alpha$. 因此

$$\text{vec}(g_j)^\top M_t(y_t^{\delta_v}) \text{vec}(g_j) = g_j(v)^2 = 0,$$

结合 $M_t(y_t^{\delta_v}) \geq 0$ 可得

$$M_t(y_t^{\delta_v}) \text{vec}(g_j) = 0 \implies \text{vec}(g_j) \in \ker M_t(y_t^{\delta_v}) \implies M_{t-d_j}(g_j y) = 0. \quad (3-24)$$

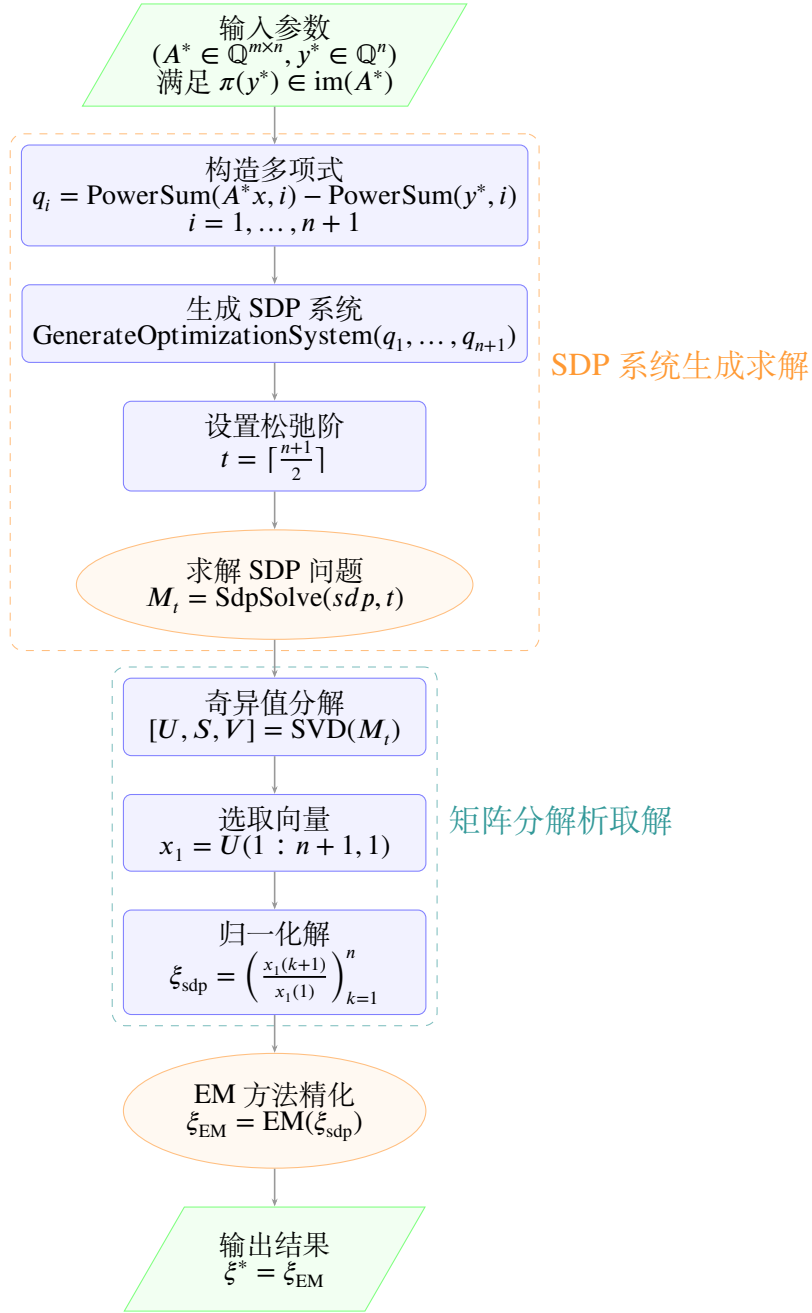


图 3-3 基于 SDP 松弛的算法 3.3

我们已证明 $y_t^{\delta_v} \in K_t^{\mathbb{R}}$ 是优化问题(3-23)的可行解, 且满足 $\text{rank } M_t(y_t^{\delta_v}) = 1$. 对于任意 $y \in K_t^{\mathbb{R}}$, 由 $y_0 = 1$ 可知 $\text{rank}(M_t(y)) \geq 1$, 因此(3-23)的最优值为 1, 且该值可由 $y_t^{\delta_v}$ 实现. $\square$

引理 3.4.2. 设 $I = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ 为 $\mathbb{R}[x]$ 中的理想, 且 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I) \neq \emptyset$. 对任意 $t \geq d$, 若 $\hat{y}_t \in K_t^{\mathbb{R}}$ 是优化问题 (3-23) 的最优解, 则存在 $v \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$ 使得 $\hat{y}_t = y_t^{\delta_v}$.

证明. 由于 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I) \neq \emptyset$, 可取 $\xi_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$ 并构造 $y_t^{\delta_{\xi_0}}$. 根据命题 3.4.1, 优化问题 (3-23) 的最优值为 1, 且可被 $y_t^{\delta_{\xi_0}}$ 实现.

因 $\hat{y}_t \in K_t^{\mathbb{R}}$ 是 (3-23) 的最优解, 有 $\text{rank}(M_t(\hat{y}_t)) = 1$. 注意到 $M_0(\hat{y}_t) = (1)$, 可得:

$$1 = \text{rank}(M_0(\hat{y}_t)) \leq \text{rank}(M_s(\hat{y}_t)) \leq \text{rank}(M_t(\hat{y}_t)) = 1, \quad 0 \leq s \leq t.$$

这说明 $M_t(\hat{y}_t)$ 满足平坦延拓条件. 因此, $\hat{y}_t$ 可唯一延拓至 $\tilde{y} \in K^{\mathbb{R}}$, 使得

$$\text{rank}(M(\tilde{y})) = \text{rank}(M_t(\hat{y}_t)) = 1.$$

根据^[6]中定理 3.3, 存在 $v \in \mathbb{R}^n$ 和矩序列 $y = y^{\delta_v} = (v^\alpha)_{\alpha \in T^n}$, 使得 $\ker(M(\tilde{y}))$ 给出零化理想 $I(\{v\})$. 由 $M(g_j \tilde{y}) = 0$ 可得

$$g_j \tilde{y} = M(\tilde{y})\text{vec}(g_j) = 0 \implies \text{vec}(g_j) \in \ker(M(\tilde{y})).$$

因此 $g_j(v) = 0$ 对 $j = 1, \dots, m$ 成立, 这证明 $v \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$. □

定理 3.4.3. 设 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I) \neq \emptyset$ 且 $t \geq d$, 则映射

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I) &\rightarrow \text{Opt}(I) := \{y \in K_t^{\mathbb{R}}(I) : y \text{ 是优化问题 (3-23) 的最优解}\} \\ v &\mapsto y_t^{\delta_v} \end{aligned}$$

建立了 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(I)$ 中实根与优化问题 (3-23) 最优解 (即矩量矩阵秩为 1 的解) 之间的一一对应.

以下结果通过将命题 3.4.3 应用于具有唯一实解的多项式系统得到:

根据推论 3.2.2, 为获得系统 I 的唯一解, 需要找到秩为 1 的截断矩序列 $y \in K_d^{\mathbb{R}}$. 因此, 寻找多项式系统的唯一实解可转化为求解秩 1 矩量矩阵补全问题. 然而由于 rank 函数既非光滑同时有着复杂的组合本性, 直接优化目标函数 $\text{rank}(M_t(y))$ 是十分困难的. 存在的诸多用于低秩矩阵补全问题的方法^[57–70] 大多需要考虑松弛问题.

矩阵的核范数 (nuclear norm) 定义为其奇异值之和. 若矩阵对称且半正定, 则其核范数等于矩阵的迹. 在^[60] [定理 2.2] 中, Recht、Fazel 和 Parrilo 证明了核范数是在谱范数不超过 1 的矩阵集合上对秩函数的最佳凸下逼近. 因此, 寻找秩 1 矩量矩阵的问题可松弛为以下形式:

$$\begin{cases} \min & \text{tr}(M_t(y)) \\ \text{s.t.} & y_0 = 1, \\ & M_t(y) \geq 0, \\ & M_{t-d_j}(g_j y) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3-25)$$

在^[65,66]中, Cossic 和 Demanet 进一步证明: 当秩 1 矩阵补全问题存在唯一解时, 最小化核范数的二阶半定松弛足以找到该唯一解. 我们在^[71–73]中已证明, 通

过求解核范数优化问题 (3-25), 可更高效地找到多项式系统的部分实解 (非全部解).

根据定理 3.3.1, 一般的多项式系统 Q_{n+1} 存在唯一实解. 因此, 在第 3.4.1 小节我们提出的算法 3.3 中我们通过求解核范数最小化问题 (3-25) (而非 (3-6) 中的常值目标函数优化) 来寻找 Q_{n+1} 的唯一实解.

基于和推论 3.2.2 相同的原理, 有如下结果.

推论 3.4.4. 对于一般的多项式系统 Q_{n+1} , 假设 $y \in \mathcal{K}_d^{\mathbb{R}}$ 满足平坦延拓条件 (3-8), 则算法 3.3 返回的向量 ξ^* 就是 Q_{n+1} 的唯一解, 其中 $d = \max d_j = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

3.4.2.2 复杂度分析

通过 Gröbner 基求解零维多项式系统的复杂度为单指数 $d^{O(n)}$ [74], 其中 d 表示多项式次数, n 为变量个数. 在无标记传感问题及算法 3.1 ($d = n$), 3.2 ($d = n+1$) 的具体场景中, 符号算法 3.2 的整体复杂度应为

$$n^{O(n)} = O(\exp(n \log n)).$$

对于一般的输入, 基于同伦连续的算法 AIEM 存在 $n!$ 个解, 而 EM 过程从这 $n!$ 个解中选取其一 [35]. 固定结果精度时, 同伦连续算法的复杂度与解的数量成正比, 这提供了下界 $\Omega(n!)$.

半定规划问题可通过内点法 [75] 求解, 允许误差的情况下其时间复杂度可以用矩阵大小的多项式控制. 现有成熟的 SDP 求解软件包, 例如 Sedumi [76] 和 SDPNAL+ [77]. 内点法的时间复杂度为 $O(N\sqrt{M})$, 其中 N 表示迭代中求解牛顿系统的成本, M 表征半定约束的规模 [78]. 令 m_t 表示矩量矩阵的维度. 在无标记传感问题及算法 3.3 的场景中, 有

$$N = O(m_t^6), \quad M = O(m_t n), \quad \text{且} \quad m_t \leq \binom{n+d}{d} = \binom{2n+1}{n}.$$

当固定结果精度时, 算法 3.3 的复杂度上界可估计为:

$$O\left(\binom{2n+1}{n}^{\frac{13}{2}} \sqrt{n}\right).$$

比较同伦连续算法与算法 3.3 的复杂度:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{cost}(\text{HC})}{\text{cost}(\text{SDP})} &= \Omega \left(\frac{n!}{\binom{2n+1}{n}^{\frac{13}{2}} \sqrt{n}} \right) \\
&\subseteq \Omega \left(\exp \left(\log(n!) - \log \left(\binom{2n+1}{n}^{\frac{13}{2}} \right) - \frac{1}{2} \log n \right) \right) \\
&= \Omega \left(\exp \left(n \log n - 13n \log 2 - \frac{1}{2} \log n \right) \right) \\
&\subseteq \Omega \left(\exp \left(\frac{\log n}{2} n \right) \right) \subseteq \Omega(\exp(n)),
\end{aligned}$$

可知从计算复杂度角度分析, 算法 3.3 相比同伦连续算法应具有指数级加速.

3.4.3 算法实现

实验在一台配备 Intel(R) Core(TM) i9-10900X CPU @ 3.70GHz 处理器和 128 GB 内存的台式机上进行. 在这些实验中, 矩阵 A^* 的矩阵元从标准高斯分布中随机生成, ξ^* 的矩阵元从单位开区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布生成. 随后基于 A^* , ξ^* 及可能的噪声构造方程组 $(q_i = 0)_{i=1, \dots, n+1}$. 算法 3.3 中的 SDP 问题使用 Sedumi^[76] 求解. 符号算法在 Maple 符号计算软件中运行, Maple 自动选择了单项式序 (通常为逆分次字典序). 源代码已上传至 GitHub 仓库 unlabeled-sensing-ISSAC-2024, 访问地址: <https://github.com/lujingyv/unlabeled-sensing-ISSAC-2024>.

3.4.3.1 符号算法 3.1 与 3.2 在 $\mathbb{Q}$ 上无噪声输入的算法性能对比

实验 3.4.3.1 比较了算法 3.1 和算法 3.2 在不同 $n = 3, 4, \dots, 8$ 及 $m = 2n$ 无噪声测量下的运行时间 (T_1/s) 和 (T_2/s). 算法 3.1 使用多项式系统 $Q_n = \{q_1(x) = 0, \dots, q_n(x) = 0\}$, 而算法 3.2 使用超定系统 $Q_{n+1} = \{q_1(x) = 0, \dots, q_n(x), q_{n+1}(x) = 0\}$. 所有 Gröbner 基计算均在 Maple 中完成.

表 3-1 表明: 当变量个数与多项式系统次数增加时, 计算 Q_n 或 Q_{n+1} 的 Gröbner 基将更加困难. 由于 Q_{n+1} 仅有唯一解, 其在字典序下的 Gröbner 基由 n 个线性多项式 $x_1 - \xi_1^*, \dots, x_n - \xi_n^*$ 组成. 另一方面, 多项式系统 Q_n 至多有 $n!$ 个解, 其 Gröbner 基包含更高次数与更大系数的多项式. 因此, 求解超定多项式系统 Q_{n+1} 比求解方系统 Q_n 快得多. 当 $n \geq 6$ 时, 算法 3.1 无法在 24 小时内返回结果而被手动终止.

3.4.3.2 数值算法 3.3 在 $\mathbb{R}$ 上无噪声输入的算法性能分析

以下实验检验数值算法 3.3 的性能. 由于该算法通过数值方法求解矩量优化问题, 即使使用无噪声数据也可能导致计算结果的数值误差. 定义从矩量矩阵中提取解的相对误差为

$$\text{err}_{\text{sdp}} := \frac{\|\xi^* - \xi_{\text{sdp}}\|_2}{\|\xi^*\|_2},$$

表 3-1 不同 n 值下算法 3.1 与 3.2 的 CPU 时间

n	T_1/s	T_2/s
3	0.05	0.08
4	1.95	0.24
5	153.05	0.56
6	–	3.30
7	–	200.39
8	–	72549.63

注: $m = 2n$, 使用无噪声数据.

其中 ξ_{sdp} 表示通过算法 3.3 半定规划部分提取的解.

实验 3.4.3.2 测试了算法 3.3 (T_3/s) 在不同 $n = 3, 4, 5, 6$ 及 $m = 2n$ 参数下的运行时间, t 记录半定规划使用的松弛阶数, ranks 记录截断矩量矩阵 M 的秩序列, size 表示对应松弛阶下矩量矩阵的维度. 本实验未对 y 施加噪声.

表 3-2 不同 n 值下算法 3.3 的 CPU 时间、相对误差、秩序列及矩量矩阵维度

n	t	T_3/s	err_{sdp}	ranks	size
3	2	0.20	2.73e-08	1,1,1	10
4	3	1.88	6.53e-07	1,1,1,1	35
5	3	5.58	1.62e-06	1,1,1,1	56
6	4	290.95	4.93e-06	1,1,1,1,1	210

注: $m = 2n$, 使用无噪声数据.

表 3-2 显示: 当变量个数与多项式次数增加时, 计算矩量矩阵的时间显著增长. 矩量矩阵秩序列稳定于 1 表明半定规划在最低所需松弛阶 $\lceil (n+1)/2 \rceil$ 处满足平坦延拓准则, 因此定理 3.2.2 保证从 M_t 中提取的解即为多项式系统 Q_{n+1} 的唯一解. 当使用无噪声测量数据 y 时, err_{sdp} 表现良好且随 $n = 3, 4, 5, 6$ 增大仅缓慢上升.

3.4.3.3 数值算法 3.3 在含噪声测量 y 下的性能分析 (不同 m 值对比)

以下实验考虑含噪声测量情形. 对于真实解 ξ^* 及无噪声测量 $y^* := A^* \xi^*$, 假设噪声 y_c 服从期望为 0、协方差矩阵为 $\sigma^2 I$ 的高斯随机向量, 其中 I 为 $n \times n$ 单位矩阵. 噪声强度通过信噪比 SNR (单位: dB) 度量, 计算公式为

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{n}{3\sigma^2} \right).$$

使用含噪声测量 $y := y^* + y_c$ 构造方程:

$$q_{ic} := p_i(A^* x) - p_i(y) = 0.$$

我们进一步报告经 EM 算法^[35] 精化后的解的相对误差:

$$\text{err}_{\text{EM}} := \frac{\|\xi^* - \xi_{\text{EM}}\|_2}{\|\xi^*\|_2}.$$

EM 方法本质上是排序过程: 将测量值 y 按坐标排序为 y_{sort} , 对候选解 $(x_i)_i$ 计算 Ax_i 并排序为 $(Ax_i)_{\text{sort}}$, 最优解应满足 $(Ax_i)_{\text{sort}}$ 最接近 y_{sort} , 从而确定置换 π 并将问题约化为线性方程组求解.

实验 3.4.3.3 在固定 $n = 4$ 且 $\text{SNR} = 60\text{dB}$ 噪声条件下, 分析算法 3.3 在不同 m 值下的运行时间与相对误差. T_{EM} 和 T_{sdp} 分别记录 EM 精化与求解 SDP 的时间, 总时间 $T_3 = T_{\text{EM}} + T_{\text{sdp}}$.

表 3-3 不同 m 值下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差

m	err_{EM}	err_{sdp}	T_{EM}/s	T_{sdp}/s	T_3/s
500	0.010%	0.141%	0.003	2.477	2.450
1000	0.006%	0.102%	0.003	2.586	2.589
2000	0.005%	0.125%	0.016	2.602	2.617
5000	0.006%	0.250%	0.188	2.672	2.859

注: $n = 4$, $\text{SNR} = 60\text{dB}$, 20 次试验中位数.

注 3.4.1. 算法 3.3 可能无法通过半定规划求解器找到良好近似解, 且 EM 精化过程可能无法从 ξ_{sdp} 中恢复正确置换, 导致算法返回解的相对误差显著偏离多数试验结果. 此处以典型异常案例说明: 当 $n = 4$, $m = 500$, $\text{SNR} = 60\text{dB}$ 时, 试验相对误差中位数为 $\text{err}_{\text{EM}} = 0.016\%$ 和 $\text{err}_{\text{sdp}} = 0.396\%$, 而我们观测到的异常值为 $\text{err}_{\text{EM}} = 165.957\%$ 和 $\text{err}_{\text{sdp}} = 167.938\%$. 对于小规模 $n = 4$ 及高信噪比 $\text{SNR} = 80\text{dB}$ 或 100dB , 异常值比例低于 5%. 对于其他 n 和 SNR 参数, 异常值比例介于 5% 至 35% 之间, 并随变量个数与噪声强度增加而上升.

异常值主要由噪声干扰半定规划算法导致. 在唯一解假设下, 无噪声时半定松弛的数值秩序列应稳定于 1, 但异常案例中数值秩序列在特定误差阈值下超过 1. 以 $n = 4, m = 50, \text{SNR} = 60\text{dB}$ 及数值秩误差阈值 0.01 进行 50 次试验, 记录到 2 个异常案例: 其数值秩序列分别为 1, 3, 5, 5 和 1, 2, 3, 3. 异常成因可能包含多个因素, 我们观察到真实解 ξ^* 的坐标尺度在异常案例中剧烈波动. 具体而言:

- 数值秩序列 1, 3, 5, 5 对应真实解 $\xi^* = (0.753, 0.081, 0.326, 0.879)^\top$
- 数值秩序列 1, 2, 3, 4 对应真实解 $\xi^* = (0.414, 0.515, 0.004, 0.624)^\top$

表 3-3 表明: 算法 3.3 的精度 err_{sdp} 和 err_{EM} 在不同 m 值下保持稳定. 随着 m 增大, 总时间 T_3 轻微上升, 这源于 EM 精化时需排序更多矩阵元. 但相较于排序过程, 算法主要计算量集中于与 m 无关的半定规划求解. 因此当 m 增大时, T_3 仅缓慢增长. 表 3-3 同时揭示: 当 $m = 500$ 或 1000 时, EM 精化耗时在总时间中占比可忽略, 故后续实验将仅报告算法总时间, 表格中不再单独列出 EM 精化时间.

3.4.3.4 数值算法 3.3 在含噪声测量 y 下的性能分析 (不同信噪比 SNR 与变元个数 n 对比)

实验 3.4.3.4 在固定 $m = 500$ 条件下, 分析算法 3.3 对不同噪声强度 SNR 及 $n = 3, 4, 5, 6$ 的运行时间与相对误差.

表 3-4 $n = 3$ 时不同噪声强度下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差

SNR/dB	T_3/s	err_{sdp}	err_{EM}
100	0.27	1.74E-05	1.74E-05
80	0.29	0.029%	0.016%
60	0.31	0.266%	0.017%
50	0.31	0.748%	0.058%
40	0.31	4.508%	0.328%
30	0.35	10.417%	2.447%

注: $m = 500$, 20 次试验中位数.

表 3-4 至 3-7 表明: 随着噪声增强, err_{sdp} 显著增大, 而 EM 精炼技术在所有实验中均有效提升解精度. 对于小噪声情形 ($\text{SNR} = 100\text{dB}$ 或 80dB), err_{EM} 对 n 不敏感. 此现象可解释如下: err_{EM} 的精度主要取决于排序过程. 当噪声较小时, EM 方法大概率能恢复正确置换 π , 此时解精度仅依赖于矩阵 A 的条件数及相对噪声 $\frac{\|y_c\|_2}{\|A^*\xi^*\|_2}$.

对于常规参数 $n = 3, 4, 5, 6$, 矩阵元取标准正态分布的随机矩阵 A 的条件数

表 3-5 $n = 4$ 时不同噪声强度下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差

SNR/dB	T_3/s	err_{sdp}	err_{EM}
100	2.85	2.14E-05	2.14E-05
80	3.04	0.021%	0.019%
60	2.85	0.280%	0.021%
50	3.02	0.603%	0.057%
40	2.74	3.916%	0.431%
30	2.72	11.993%	5.170%

注: $m = 500$, 20 次试验中位数.

表 3-6 $n = 5$ 时不同噪声强度下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差

SNR/dB	T_3/s	err_{sdp}	err_{EM}
100	5.46	0.003%	0.003%
80	5.58	0.043%	0.021%
60	6.50	0.220%	0.010%
50	6.97	1.430%	0.058%

注: $m = 500$, 20 次试验中位数.

表 3-7 $n = 6$ 时不同噪声强度下算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差

SNR/dB	T_3/s	err_{sdp}	err_{EM}
100	185.83	0.002%	0.002%
80	184.59	0.023%	0.019%
60	253.38	0.546%	0.011%
50	220.52	1.224%	0.044%

注: $m = 500$, 20 次试验中位数.

表现良好, 且相对噪声强度对 n 敏感性较低. 因此在小噪声环境下, err_{EM} 始终保持良好表现.

3.4.3.5 算法 AIEM^[35] 与算法 3.3 的对比实验

定义 AIEM 算法中经排序选取的解 ξ_{homo} 的相对误差为:

$$\text{err}_{\text{homo}} := \frac{\|\xi^* - \xi_{\text{homo}}\|_2}{\|\xi^*\|_2}.$$

表 3-8 不同 n 值下 AIEM 与算法 3.3 的 CPU 时间及相对误差

	AIEM(同伦法)			算法 3.3(SDP)		
n	T_{AIEM}/s	err_{homo}	err_{EM}	T_3/s	err_{sdp}	err_{EM}
3	0.12	0.043%	0.012%	0.29	0.029%	0.016%
4	0.23	0.037%	0.016%	3.04	0.021%	0.019%
5	0.79	0.040%	0.014%	5.58	0.043%	0.021%
6	9.06	0.039%	0.019%	184.80	0.053%	0.011%

注: $m = 500$, $\text{SNR} = 80\text{dB}$, 20 次试验中位数.

表 3-8 表明: 随着 n 增大, 使用 HOM4PS2 同伦求解器的 AIEM 比使用 Sedumi 求解器的算法 3.3 更高效. 算法 3.3 中采用的 Sedumi 求解器基于传统内点法实现, 数值稳定性较强但效率低于现代求解器如 SDPNAL+. 文献^[35]中使用 Bertini 同伦求解器处理 $n = 6$ 情形时需 2243 秒, 而本实验显示不同软件实现将显著影响算法效率与精度, 这需要未来更系统的对比研究.

当 $n = 5$ 时, Bertini 中的同伦连续算法耗时半小时找到 120 个解^[35], 而 Sedumi 中的 SDP 算法仅用 5.58 秒便找到唯一解. 在我们的实验中, 使用 HOM4PS2 求解多项式系统仅需 0.79 秒即找到 120 个解. 不同实现方式显著地影响算法的实际运行时间. 对于低秩矩阵补全问题, 还存在其他实用算法; 未来研究应测试更多实现方案.

第4章 Cayley 变换的表示理论

4.1 引言: 经典 Cayley 变换

除非特殊说明, 设域 $\mathbb{F}$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 或实数域 $\mathbb{R}$.

定义 4.1.1 (经典 Cayley 变换). 经典 Cayley 变换定义为双有理映射

$$C : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \dashrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$$

$$u \mapsto \frac{\mathrm{Id}_n + u}{\mathrm{Id}_n - u}.$$

称经典 Cayley 变换对 Lie 子群 $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 适用, 若存在 $\mathfrak{g}$ 在点 0 的邻域 U 使得 $C(U) \subseteq G$, 其中 $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数.

例 4.1.1 (二次矩阵群). ^[23,79-81] 设 V 为 $\mathbb{F}$ -向量空间, $\sigma : \mathrm{GL}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为 $\mathbb{R}$ -线性对合. 对满足 $\sigma(B) = \pm B$ 的 $B \in \mathrm{GL}(V)$, Cayley 变换适用于

$$G_B := \{g \in \mathrm{GL}(V) : B(gx, gy) = B(x, y), \forall x, y \in V\}.$$

通过选取不同 σ 和 B , 可得经典矩阵群 $O_n(\mathbb{F})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F})$ 及 $U_n(\mathbb{C})$. 例如考虑 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, 取 $B = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \sigma = \mathrm{Id}$, 对应 Lie 群 $O_n(\mathbb{R})$. 其 Lie 代数满足:

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \{a \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) : a + a^\top = 0\},$$

$$(1 + a^\top)(1 + a) - (1 - a^\top)(1 - a) = 0.$$

如果 $1 - a, 1 - a^\top$ 可逆, 则可以直接验算

$$B(C(a)x, C(a)y) = x^\top \frac{1 + a^\top}{1 - a^\top} \frac{1 + a}{1 - a} y = x^\top y \implies C(a) \in O_n(\mathbb{R}).$$

根据连通性, 可以判定 $C(a) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, 另外这个计算表明在定义域上都有 $C(a) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

例 4.1.2. 从典型群出发还可以构造许多其他例子.

- (1) 对角矩阵群^[82] [例 1.20]: Cayley 变换适用于 T_n , 其中 $T_n \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 为所有可逆对角矩阵构成的群.
- (2) 幂么群^[83,84]: 令 $R_n \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 为上三角幂么矩阵子群. Cayley 变换适用于 R_n . 事实上由 $I_n + \mathfrak{r}_n = R_n$ 可得

$$C(\mathfrak{r}_n) \subseteq I_n + \mathfrak{r}_n = R_n,$$

此处 $\mathfrak{r}_n$ 表示由严格上三角矩阵构成的幂零 Lie 代数.

(3) 上三角矩阵群: 设 $B_n \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 为所有可逆上三角矩阵构成的群. 可直接验证 Cayley 变换适用于 B_n .

若 C 适用于 $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, 则我们可在 $\mathfrak{g}$ 中 0 点的邻域与 G 中 I_n 点的邻域之间获得一个简单显式的微分同胚. 这一简单观察使得经典 Cayley 变换在纯粹数学与应用数学中均产生了大量应用. 例如: 二次矩阵群的 LS 范畴可通过 Cayley 变换计算^[85]; Cayley 变换与超向量丛的拓扑几何不变量 (包括子丛、超联络特征形式和 Bott 映射) 存在深刻联系^[86,87]; 对称 Siegel 域的几何特性可通过 Cayley 变换像的几何结构进行刻画^[88-90].

另一方面, $C\left(\frac{u}{2}\right)$ 作为矩阵指数函数 $\exp(u)$ 的最佳 (1, 1) 型 Padé 逼近^[91], 其提供的二阶近似特性在数值计算中具有重要价值. 这一优势广泛应用于数值线性代数^[92-94]、数值微分方程与积分^[95-98] 以及黎曼优化^[99,100] 等领域. 工程实践中, Cayley 变换亦被统计学家^[101]、机器学习研究者^[102,103] 和信号处理工程师^[104,105] 广泛采用.

由于经典 Cayley 变换在理论研究和实际应用中的核心作用, 过去 40 年间出现了多种推广 Cayley 变换的尝试. 我们概述以下三种主要路径:

- (1) 基于 H 型群 Iwasawa 分解的解析构造^[106-110], 但该推广不再保持 Lie 群与其 Lie 代数之间的对应关系.
- (2) 针对二次矩阵群齐次空间的推广^[85,100], 专为在这些商流形上进行高效计算而设计.
- (3) 代数群框架下的推广, 将广义 Cayley 变换定义为代数群与其 Lie 代数之间的等变双有理等价^[83,84].

所有现有工作^[82,84,111-113] 的终极目标都是解决以下问题, 该问题可视为 Luna 问题^[114] 在 SL_n 之外的自然延伸:

问题 4.1 (Lemire-Popov-Reichstein 问题). ^[82] [问题 1.7] 哪些线性代数群拥有广义 Cayley 变换?

本章旨在研究经典 Cayley 变换在表示论层面的推广. 注意到经典 Cayley 变换 C 的适用性依赖于群的表示方式. 例如: 可直接验证 C 适用于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, 同时也适用于其伴随表示 $\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \simeq \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$. 事实上, 若将 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 与 $\mathbb{C}^3$ 等同, 则 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 是 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ 的双重覆盖且 $\mathrm{Ad}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$. 然而, C 不适用于 $\rho(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \subseteq \mathrm{GL}(\mathcal{S}^3\mathbb{C}^2) \simeq \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, 其中 ρ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 在三次对称幂 $\mathcal{S}^3(\mathbb{C}^2)$ 上的不可约表示. 基于此观察, 可以提出如下问题:

问题 4.2. 对怎样的 Lie 群 G 及其表示 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, 定义于 4.1.1 的经典 Cayley 变换 C 是适用的?

本章核心结果如下: 定理 4.3.9 建立了 C 对 ρ 的适用性与 $d\rho(\mathfrak{g})$ 的幂扩张性质间的等价性 (定义 4.3.2). 进一步地, 当限制于紧半单 Lie 群时 (第 4.4 节), 定理 4.4.9 证明该适用性等价于 $d\rho(\mathfrak{h})$ 的幂扩张性质, 其中 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

对不可约表示情形, 定理 4.4.13 表明: 当 C 适用时, ρ 的权图具备明显的对称性 (Cayley 构型, 定义 4.4.1), 其必为 Weyl 群作用下最高权轨道的并集 (可能包含原点).

在 4.5.2 节中, 我们完成了对经典复单 Lie 群及其紧致实形式的不可约 Cayley 表示的分类, 其中 C 适用的情形为:

- ◇ G 为 A_1 型, B_n 型 ($n \geq 2$), C_n 型 ($n \geq 3$) 或 D_n 型 ($n \geq 4$), 且 ρ 为标准表示.
- ◇ G 为 D_4 型, 且 ρ 为两个旋量表示之一.

该分类结果可视为^[82] [定理 1.31] 在表示论层面的自然推广. 在本章的最后一节 4.6.4, 我们讨论放松对于映射 C 的限制, 考虑更一般的广义 f -型 Cayley 表示, 并说明 Cayley 构型的唯一性.

4.2 预备知识: 半单 Lie 代数

在 Lie 理论的研究中, Lie 代数的半单性理论是其中的一个重要方面. 半单 Lie 代数的表示理论相对于一般 Lie 代数而言有十分清楚的描述和刻画. 本节内容可参考表示论方面的标准教程^[28].

4.2.1 半单 Lie 代数的结构

4.2.1.1 复半单 Lie 代数的结构

定义 4.2.1 (半单 Lie 代数). $\mathfrak{g}$ 是有限维 Lie 代数, 称 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数, 如果 $\mathfrak{g}$ 无非平凡可解理想.

定义 4.2.2 (单 Lie 代数). 称半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为单 Lie 代数, 如果 $\mathfrak{g}$ 没有非平凡理想.

定理 4.2.1. ^[28] $\mathfrak{g}$ 是实或复有限维 Lie 代数, 以下事实等价:

- (1) $\mathfrak{g}$ 的有限维复表示是完全可约的.
- (2) $\mathfrak{g}$ 无非平凡交换理想.
- (3) $\mathfrak{g}$ 半单.
- (4) $\mathfrak{g}$ 是单 Lie 代数的直和.

定义 4.2.3 (Cartan 子代数). $\mathfrak{g}$ 是复有限维半单 Lie 代数, 通过伴随作用 $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ 看做自身上的表示. 称 $\mathfrak{g}$ 的交换 Lie 子代数 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 如果 $\text{ad}(\mathfrak{h})$ 由半单算子构成且, $\forall x \in \mathfrak{g}$ 满足 $\text{ad}(x)$ 是半单算子且 $[\mathfrak{h}, x] = 0$ 则有 $x \in \mathfrak{h}$, 即 $\mathfrak{h}$ 是极大的由半单元素构成的交换子代数.

定义 4.2.4 (根系, 根子空间, 根系格). 复有限维半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示可根据 $\mathfrak{h}$ 的作用分解成特征子空间的直和:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right),$$

$\Phi \subseteq \mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非零权集, 称其中的元素 $\alpha \in \Phi$ 为 $\mathfrak{g}$ 的一个根系, 对应的权空间 $\mathfrak{g}_\alpha$ 称为 α 对应的根子空间. 称 Φ 为 $\mathfrak{g}$ 的根系集. 称根系集生成的自由交换群 $\Lambda_R := \mathbb{Z}\Phi \subseteq \mathfrak{h}^*$ 为 $\mathfrak{g}$ 的根系格.

定义 4.2.5 (权, 权格, 正权, 正根系). 对于复有限维半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的任意根系 $\alpha \in \Phi$, $\exists! h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subseteq \mathfrak{h}$ 使得 $\alpha(h_\alpha) = 2$, 称 $\Lambda := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Phi\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的权格, 其中的元素 $\lambda \in \Lambda$ 称为权. 指定 Λ 上的线性序 $<$, 称大于 0 的权为正权. 用 Φ^+ 表示 $\mathfrak{g}$ 在序 $<$ 下的正根系集合, 其中的元素 $\alpha \in \Phi^+$ 称为正根.

定义 4.2.6 (单根, 正单根). 对于复有限维半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 称一个正根 $\alpha \in \Phi^+$ 是正单根如果 α 不能分解成两个正根的和. 用 Δ^+ 表示 $\mathfrak{g}$ 在序 $<$ 下的正单根集合.

4.2.1.2 实化与复化

注 4.2.1. 在本小节中, 除非特殊说明, $\mathfrak{g}$ 表示一个半单 Lie 代数. G 表示一个半单 Lie 群, 其 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

定义 4.2.7 (实化与复化). Lie 代数和 Lie 群上可以定义实化与复化, 这些操作给出典范态射并满足泛性质:

- (1) 设 $\mathfrak{g}_r$ 是实 Lie 代数, 称 $\mathfrak{g}_r$ 是复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的实形式如果 $\mathfrak{g}_r^\mathbb{C} = \mathfrak{g}_r \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g}$.
- (2) 给定实 Lie 群 G_r , 其复化是一个复 Lie 群 $G_r^\mathbb{C}$ 以及一个光滑同态 $\phi : G_r \rightarrow G_r^\mathbb{C}$, 使得对于任何从 G_r 到另一个复 Lie 群 H 的连续同态 $f : G_r \rightarrow H$, 存在唯一的复解析同态 $F : G_r^\mathbb{C} \rightarrow H$, 满足 $f = F \circ \phi$.
- (3) 给定复 Lie 群 G , 称 G 的实 Lie 子群 G_r 是 G 的实形式如果嵌入 $\iota : G_r \hookrightarrow G$ 给出了 G_r 的复化.

定义 4.2.8 (分裂形式). 实 Lie 代数 $\mathfrak{g}_s$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实形式, 称 $\mathfrak{g}_s$ 是 $\mathfrak{g}$ 的分裂形式如果存在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的权空间分解以及 $\mathfrak{g}_s$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_s = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_s$, $\mathfrak{h}_s^\mathbb{C} = \mathfrak{h}$, 使得 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}_s$ 上的伴随作用只有实特征值.

定理 4.2.2 (分裂形式的权空间分解). [28] 设实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_s$ 是复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的分裂形式. $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式是 B , 权集为 Φ , 那么分裂形式的权空间分解为

$$\mathfrak{g}_s = \mathfrak{h}_s \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} (\mathfrak{g}_s)_\alpha \right). \quad (4-1)$$

其中 $(\mathfrak{g}_s)_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_s$, $(\mathfrak{g}_s)_\alpha^\mathbb{C} = \mathfrak{g}_\alpha$.

定义 4.2.9 (紧形式). 实 Lie 代数 $\mathfrak{g}_c$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实形式, 称 $\mathfrak{g}_c$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧形式如果存在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha \right)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的权空间分解以及 $\mathfrak{g}_c$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_c = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_c$, $\mathfrak{h}_c^\mathbb{C} = \mathfrak{h}$, 使得 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}_c$ 上的伴随作用只有纯虚特征值.

定理 4.2.3 (紧形式的性质). [28] 设实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_c$ 是复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的紧形式. $\mathfrak{g}$ 的 Killing 形式是 B , 权集为 Φ , 那么

- (I) B 在 $\mathfrak{g}_c$ 上的限制是负定的.

(2) 紧形式的权空间分解为

$$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{h}_c \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} (\mathfrak{g}_c)_\alpha \right). \quad (4-2)$$

其中 $(\mathfrak{g}_c)_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g}_c$, $(\mathfrak{g}_c)_\alpha^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}$.

4.2.2 单 Lie 代数的分类

定理 4.2.4 (复单 Lie 代数的分类). ^[28] 给定复单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 恰同构表 4-1 中的一类.

表 4-1 复单 Lie 代数的分类

型别	参数范围	注释
A_n	$n \geq 1$	$\mathfrak{sl}_{n+1}$
B_n	$n \geq 2$	$\mathfrak{so}_{2n}$
C_n	$n \geq 3$	$\mathfrak{sp}_{2n}$
D_n	$n \geq 4$	$\mathfrak{so}_{2n+1}$
E_n	$n = 6, 7, 8$	例外单 Lie 代数
F_4	-	
G_2	-	

定义 4.2.10. 称 A_n, B_n, C_n, D_n 型单 Lie 代数是经典单 Lie 代数. 称 E_n, F_4, G_2 型单 Lie 代数为例外单 Lie 代数.

定理 4.2.5 (经典单 Lie 代数的实形式). ^[28] 经典单 Lie 代数的分裂形式与实形式如下表 4-2 所示.

表 4-2 复单 Lie 代数的实形式

复化	紧形式	分裂形式
$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{su}_{n+1}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_{n+1}(\mathbb{R})$
$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}_{n+1,n}(\mathbb{R})$
$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{u}_n(\mathbb{H})$	$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$
$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}_{n,n}(\mathbb{R})$

4.2.3 半单 Lie 代数的表示

4.2.3.1 基本性质

定理 4.2.6 (权空间分解). 设 $\mathfrak{g}$ 是实或复半单 Lie 代数, $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的有限维复表示, 则 V 有权空间分解:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda, \quad V_\lambda := \{v \in V : \theta(h)v = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

定义 4.2.11. $\mathfrak{g}$ 是实或复半单 Lie 代数, $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示. 定义表示的权集为

$$\text{Wt } V := \{\lambda \in \Lambda : \dim V_\lambda \neq 0\}.$$

定义表示的权图为二元对 $(\text{Wt } V, m)$, 其中 $m : \text{Wt } V \rightarrow \mathbb{N}, m(\lambda) := \dim V_\lambda$.

定理 4.2.7 (半单 Lie 代数表示的基本定理). ^[28] $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, 有权格 Λ , 根系格 Λ_R , Weyl 群 $\mathcal{W}$, 基本 Weyl 腔 C , 以及根系集 Φ . 则

- (1) $C \cap \Lambda$ 中的权与 $\mathfrak{g}$ 的不可约复表示的同构类一一对应. 给定 $\omega \in C \cap \Lambda, \exists V$ 是不可约 $\mathfrak{g}$ -模, 使得 V 的最高权为 ω , 这样的 V 在同构意义下唯一.
- (2) 设 V 是不可约 $\mathfrak{g}$ -模, 有最高权 ω , 权空间分解 $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Wt } V} V_\lambda$. 则

$$\text{Wt } V = \text{Conv}(\mathcal{W}\omega) \cap (\omega + \Lambda_R).$$

4.2.3.2 限制和诱导

定义 4.2.12 (限制). 给定复半单 Lie 群 G 和表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, 以及实形式 G_r . ρ 在 G_r 上的限制是表示

$$\text{Res}(\rho) := \rho|_{G_r} : G_r \rightarrow \text{GL}(V), \quad \text{Res}(\rho)(g) = \rho(g).$$

同样地, 定义 Lie 代数表示的限制. 给定复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 和表示 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 以及实形式 $\mathfrak{g}_r$. θ 在 $\mathfrak{g}_r$ 上的限制是表示

$$\text{Res}(\theta) := \theta|_{\mathfrak{g}_r} : \mathfrak{g}_r \rightarrow \mathfrak{gl}(V), \quad \text{Res}(\theta)(x) = \theta(x).$$

通过自明的方式与表示的同态复合, Res 给出表示间态射的映射, 从而成为 $\mathfrak{g}$ -模到 $\mathfrak{g}_r$ -模的函子.

定义 4.2.13 (诱导). $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的表示. θ 诱导了 $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ 的表示

$$\text{Ind}(\theta) : \mathfrak{g}^\mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{gl}(V), \quad \text{Ind}(\theta)(x_1 + ix_2) := \theta(x_1) + i\theta(x_2), x_1, x_2 \in \mathfrak{g}.$$

通过自明的方式与表示的同态复合, Ind 给出表示间态射的映射, 从而成为 $\mathfrak{g}$ -模到 $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ -模的函子. 若连通实 Lie 群 G 是 $G^\mathbb{C}$ 的实形式, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是 G 的表示, 则 ρ 诱导了 $G^\mathbb{C}$ 的表示

$$\text{Ind}(\rho) : G^\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}(V), \quad \text{Ind}(\rho)(\exp(x)) = \exp(\text{Ind}(\rho)(x)), x \in \mathfrak{g}^\mathbb{C}.$$

4.2.4 代数 Lie 理论

定义 4.2.14 (对称线性代数群). 称线性代数群 $G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是对称的, 若 $G^* = G$, 其中 $G^* = \{\bar{g}^\top : g \in G\}$.

定义 4.2.15 (线性约化). 称线性代数群 $G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是线性约化的, 若 G 的正则表示是完全可约的.

引理 4.2.8. ^[115] 线性代数群 $G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是线性约化的, 当且仅当 $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. 使得 PGP^{-1} 是对称的.

定理 4.2.9 (极化分解定理). ^[115] 设线性代数群 $G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是对称的. 令 $K := G \cap \mathrm{U}_n$, 其中 U_n 是酉群. 设 $\mathfrak{k}$ 为 K 的 Lie 代数. 则映射

$$\begin{aligned} p : K \times i\mathfrak{k} &\rightarrow G \\ (k, Z) &\mapsto k \exp(Z) \end{aligned}$$

是微分同胚. 特别地, K 连通当且仅当 G 连通.

定理 4.2.10. ^[115] 复线性代数群 $G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是连通的, 当且仅当 G 是不可约的.

定理 4.2.11 (Cartan 分解定理). ^[115] 连通线性代数群 $G < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是对称的. 令 $K := G \cap \mathrm{U}_n$, 其中 U_n 是酉群. 设 $\mathfrak{k}$ 为 K 的 Lie 代数. 则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \bigoplus_{\mathbb{R}} i\mathfrak{k}.$$

进一步, 若 T 是 G 的极大紧环面, Lie 代数 $\mathfrak{t}$, 则 $\mathfrak{t}$ 是 K 的 Cartan 子代数, 且

$$\mathfrak{k} = \mathrm{Ad}(K)\mathfrak{t}. \quad (4-3)$$

定理 4.2.12 (复半单 Lie 代数是代数群的 Lie 代数). ^[116] $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 是 $\mathbb{F}$ 上线性半单 Lie 代数, 其中 V 是 $\mathbb{F}$ 向量空间, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 则 $\exists G < \mathrm{GL}(V)$ 是不可约线性代数群, 使得 G 的 Lie 代数恰为 $\mathfrak{g}$.

4.3 Cayley 表示

4.3.1 经典 Cayley 变换的表示论推广

令 G 为 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为其表示. 记 $\mathfrak{g}$ 为 G 的 Lie 代数. 设 $C : \mathfrak{gl}(V) \dashrightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为由 $C(u) = (1+u)/(1-u)$ 定义的经典 Cayley 变换.

定义 4.3.1 (Cayley 表示). 称 ρ 为 Cayley 表示, 若存在原点邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$ 和 $\mathrm{im} \rho$ 作为浸入 Lie 子群单位元处的邻域 U' 使得 C 在 $d\rho(U)$ 上有定义且 $C(d\rho(U)) \subseteq U'$. 此时亦称 Cayley 变换适用于 ρ .

一般而言, Lie 群同态 $\rho : G \rightarrow H$ 的像未必是 H 中的 Lie 子群. 这一问题源于流形的拓扑.

例 4.3.1. 环面 T^2 中一条直线的像

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow T^2 = S^1 \times S^1 \\ t &\mapsto (\exp(it), \exp(ikt)) \end{aligned}$$

是 T^2 的子 Lie 群当且仅当 $k \in \mathbb{Q}$.

对于代数群的态射, 不会出现例 4.3.1 中的病态情况.

引理 4.3.1 (代数群的同态像是代数子群). ^[117] [推论 1.13] 设 $\mathbb{F}$ 是特征 0 的代数闭域. G, H 是代数群, $\rho : G \rightarrow H$ 是代数群的态射. 那么 $\text{im } \rho$ 是代数子群.

注 4.3.1 (代数群的 Cayley 表示). 这一性质使得定义 4.1.1 的条件 $\exists U'$ 是 $\text{im } \rho$ 作为浸入 Lie 子群单位元附近邻域满足 $C(d\rho(U)) \subseteq U'$ 等价于条件 $C(d\rho(U)) \subseteq \text{im } \rho$.

定理 4.3.2 (半单 Lie 群的代数群结构). ^[118] $\mathbb{C}$ 上的连通半单 Lie 群 G 可以装备唯一的代数群结构与其复 Lie 群结构兼容, 使得对于任意的复表示 V , 存在与 V 作为复表示同构的代数群 G 的正则表示 V' . 即有表示环的同构:

$$R_{\text{holo}}(G) \simeq R_{\text{reg}}(G).$$

其中 $R_{\text{holo}}(G)$ 表示复 Lie 群 G 的全纯表示生成的表示环, $R_{\text{reg}}(G)$ 表示复 Lie 群 G 作为代数群的正则表示生成的表示环.

从而对于半单 Lie 代数的复表示, 总是可以应用注 4.3.1 简化 Cayley 表示的条件.

容易验证, 对矩阵 Lie 群 $G \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{F})$, 自然的含入映射 $\iota : G \hookrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F})$ 为 Cayley 表示当且仅当 C 在经典意义下适用于 G . 下述基本性质对经典 Cayley 变换成立.

命题 4.3.3 (基本性质). 设 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为 Cayley 变换适用的表示. 对任意满足 C 在 $d\rho(x)$ 处有定义的 $x \in \mathfrak{g}$, 有:

- (1) $C(-d\rho(x))C(d\rho(x)) = \text{Id}_V$.
- (2) 令 $f(x) := C\left(\frac{d\rho(x)}{2}\right)$, $g(x) := \exp(d\rho(x))$, 则 f 在原点处为 g 的二阶逼近.
- (3) 若 $\pi : G \rightarrow \text{GL}(W)$ 为 Cayley 表示, 则 $\rho \times \pi : G \rightarrow \text{GL}(V) \times \text{GL}(W)$ 亦为 Cayley 表示.

证明. 性质(1)与(3)可由定义直接验证. 令 $u := d\rho(x)$, 则(2)可由下式推得:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= C\left(\frac{u}{2}\right) - \exp(u) \\ &= 1 + u \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{2^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} = O(|x|^3). \end{aligned} \quad \square$$

命题 4.3.4 (Independence). 设 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为 Lie 群表示, G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$, ρ 是 Cayley 表示当且仅当其诱导的万有单连通形式 $\tilde{G}$ 的表示 $\tilde{\rho}$ 是 Cayley 表示.

证明. 由定理 2.2.8, Lie 代数表示 $d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 与 Lie 群表示 $\tilde{\rho} : \tilde{G} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 一一对应, 其中 $\tilde{G}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的万有单连通形式. 不失一般性假设 G 连通, 则 G 是 $\tilde{G}$ 的商群, 设商映射是 $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$. G 的表示 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 均可提升为 $\tilde{\rho} = \rho \circ \pi$. π 是覆盖映射, 所以 $d\pi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, $\pi(\tilde{G}) = G$.

如果 $\tilde{\rho}$ 是 Cayley 表示, 则存在 0 的邻域 U , $C(d(\rho \circ \pi)(U)) \subseteq (\rho \circ \pi)(\tilde{G})$. 这推出 $C \circ d\rho(U) \subseteq \mathrm{im} \rho$.

反之, 如果 ρ 是 Cayley 表示, 则存在 0 的邻域 U , $C(d\rho(U)) \subseteq \rho(G)$. 取相同的邻域 U , 考察 $\pi^{-1}(U)$ 中包含 $e \in \tilde{G}$ 的连通分支, 即有 $\tilde{\rho}$ 是 Cayley 表示. $\square$

4.3.2 Cayley 表示的刻画

4.3.2.1 幂扩张性质

引理 4.3.5. 对任意满足 $\|u\| < \frac{1}{3}$ 的 $u \in d\rho(\mathfrak{g})$, Cayley 变换 $C(u)$ 有定义. 且 $C(u) \in \mathrm{im} \rho$ 当且仅当 $\log(1+u) - \log(1-u) \in d\rho(\mathfrak{g})$.

证明. 考虑指数映射 $\exp : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 在原点 $0 \in \mathfrak{gl}(V)$ 的邻域 U 与单位元 $\mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(V)$ 的邻域 U' 之间建立的同胚关系. 对应的对数映射 $\log : \mathrm{GL}(V) \dashrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 在满足 $\|a - \mathrm{Id}\| < 1$ 的 $a \in \mathrm{GL}(V)$ 处有定义, 且在定义域内为 $\exp$ 的逆映射. 此时可取

$$U' = \{a \in \mathrm{GL}(V) : \|a - \mathrm{Id}\| < 1\}, \quad U = \log(U').$$

因 $\|u\| < \frac{1}{3}$, 由定义知 Cayley 变换 $C(u)$ 有定义. 进一步有 $\|C(u) - \mathrm{Id}\| < 1$, 这表明 $C(u) \in U'$ 且 $\log$ 在 $C(u)$ 处有定义. 由此可得 $C(u) \in \mathrm{im} \rho$ 的充要条件为

$$\log(1+u) - \log(1-u) = \log(C(u)) \in \log(U \cap \mathrm{im} \rho) = U' \cap d\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{im} d\rho. \quad \square$$

为刻画 Cayley 变换适用的 G -表示, 我们需要如下定义.

定义 4.3.2 (幂扩张性质). 设 $\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数. 若元素 $u \in \mathfrak{u}$ 满足对任意整数 $k \geq 0$ 有 $u^{2k+1} \in \mathfrak{u}$, 则称其具有幂扩张性质. 线性子空间 $W \subseteq \mathfrak{u}$ 若满足对任意 $x \in W$ 和整数 $k \geq 0$ 有 $x^{2k+1} \in W$, 则称其具有幂扩张性质. 称 Lie 代数的表示 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 具备幂扩张性质如果 $\mathrm{im} \theta \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 具备幂扩张性质

推论 4.3.6. 设 $u \in d\rho(\mathfrak{g})$ 且 $\|u\| < \frac{1}{3}$. 若 u 具有幂扩张性质, 则 $C(u) \in \mathrm{im} \rho$.

证明. 根据定义, 存在实数 $c_1, c_3, \dots$ 使得

$$\log(1+u) - \log(1-u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} u^{2k+1},$$

且该级数收敛. 由于 $u \in d\rho(\mathfrak{g})$ 具有幂扩张性质, 对每个 $k \geq 0$ 有 $u^{2k+1} \in d\rho(\mathfrak{g})$. 注意到 $d\rho(\mathfrak{g})$ 是有限维空间, 因此

$$\log(1+u) - \log(1-u) \in d\rho(\mathfrak{g}).$$

由引理 4.3.5 即得 $C(u) \in \mathrm{im} \rho$. $\square$

注 4.3.2. 在 4.6.2 小节, 会详细考察这一性质的更加精细版本.

引理 4.3.7. 设 $\mathfrak{u}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的 Lie 子代数, 则下列条件等价:

- (1) $\mathfrak{u}$ 具有幂扩张性质.
- (2) 对任意 $a, b \in \mathfrak{u}$ 有 $aba \in \mathfrak{u}$.
- (3) 对任意 $a, b, c \in \mathfrak{u}$ 有 $abc + cba \in \mathfrak{u}$.

证明. 归纳可得蕴含关系 (3) $\implies$ (2) $\implies$ (1). 下证 (1) $\implies$ (2): 若 $a, b \in \mathfrak{u}$ 且 $\mathfrak{u}$ 具有幂扩张性质, 定义

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{F} &\rightarrow \mathfrak{u} \\ \mu &\mapsto (a + \mu b)^3.\end{aligned}$$

特别地, 计算导数得 $\varphi'(0) = a^2b + aba + ba^2 \in \mathfrak{u}$. 由于 Lie 代数对 Lie 括号运算封闭, $[a, [a, b]] \in \mathfrak{u}$, 故有 $3aba = \varphi'(0) - [a, [a, b]] \in \mathfrak{u}$, 因此 $aba \in \mathfrak{u}$.

最后推导 (3): 对任意 $a, b, c \in \mathfrak{u}$ 和 $\mu \in \mathbb{F}$, 定义

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{F} &\rightarrow \mathfrak{u} \\ \mu &\mapsto (a + \mu c)b(a + \mu b).\end{aligned}$$

由条件 (2) 知 $\psi(\mu) \in \mathfrak{u}$, 其导数 $\psi'(0) = abc + cba \in \mathfrak{u}$ 即得所需结论. $\square$

以下我们将建立 Cayley 变换适用性与幂扩张性质的等价关系. 为此需要以下引理.

引理 4.3.8. 设 G 为 Lie 群, ρ 为其表示. 若 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是 Cayley 表示, 则 $\mathrm{im} d\rho \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 具有幂扩张性质.

证明. 由假设存在 $0 \in \mathfrak{g}$ 的邻域 U , 使得 Cayley 变换 C 在 $d\rho(U)$ 上有定义且 $C(d\rho(U)) \subseteq \mathrm{im} \rho$. 必要时缩小 U 范围, 可设对任意 $x \in U$ 有 $\|d\rho(x)\| < 1/3$. 对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 存在常数 $c > 0$ 使得 $cx \in U$. 注意到 $d\rho(x)$ 具有幂扩张性质当且仅当 $d\rho(cx)$ 具有该性质, 故只需考虑 $x \in U$ 的情形.

令 $u := d\rho(x)$. 根据定义, 对任意满足 $|\mu| \leq 1$ 的 $\mu \in \mathbb{F}$, 有 $C(\mu u) \in \mathrm{im} \rho$. 由引理 4.3.5 可知当 $|\mu| \leq 1$ 时, 可定义映射

$$\begin{aligned}\varphi : B_0(1) &\rightarrow \mathrm{im} d\rho \\ t &\mapsto \log(1 + \mu u) - \log(1 - \mu u),\end{aligned}$$

这里 $B_0(1)$ 表示 $\mathbb{F}$ 中以 0 为球心, 1 为半径的欧式开球. 对 φ 求导可得对任意整数 $k \geq 0$ 有

$$\varphi^{(2k+1)}(0) = 2(2k)!u^{2k+1} \in \mathrm{im} d\rho. \quad \square$$

例 4.3.2 (例 4.1.1重访). 仍考虑二次矩阵群 $G = \mathrm{SO}_n(\mathbb{F})$ 以及标准表示 $V = \mathbb{F}^n$, 其 Lie 代数

$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{F}) = \{a \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : a + a^\top = 0\},$$

显然满足

$$a^{2k+1} = (-a^\top)^{2k+1} = -(a^{2k+1})^\top \implies a^{2k+1} \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{F}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

定理 4.3.9 (刻画 I). 设 G 为 Lie 群, ρ 为其表示, 则下列条件等价:

- (1) ρ 是 Cayley 表示.
- (2) 存在 $0 \in \mathfrak{g}$ 的邻域 U , 使得对任意 $x \in U$ 有

$$\log(1 + d\rho(x)) - \log(1 - d\rho(x)) \in \mathrm{im} d\rho.$$

- (3) $\mathrm{im} d\rho \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 具有幂扩张性质.
- (4) 对任意 $a, b \in \mathrm{im} d\rho$ 有 $aba \in \mathrm{im} d\rho$.
- (5) 对任意 $a, b, c \in \mathrm{im} d\rho$ 有 $abc + cba \in \mathrm{im} d\rho$.

证明. 条件(1)与(2)的等价性直接由引理 4.3.5 可得, 而条件(3)–(5)的等价性源于引理 4.3.7.

由引理 4.3.8, 蕴含关系(1) $\implies$ (3) 成立. 反之若(3)成立, 则对满足 $\|u\| < 1/3$ 的任意 $u \in \mathrm{im} d\rho$, 由引理 4.3.6 可知 $C(u) \in \mathrm{im} \rho$, 由此可推出(1)成立. $\square$

利用定理 4.3.9, 立即可知如下推论.

推论 4.3.10 (Cayley 表示与复化兼容). 设 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为连通实 Lie 群 G 的表示. 如果 ρ 是 Cayley 表示, 则其诱导的复化 $G^\mathbb{C}$ 的表示 $\mathrm{Ind}(\rho)$ 是 Cayley 表示.

证明. 设 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$. 注意到 G 的连通性确保了 $\mathrm{Lie} G^\mathbb{C} = \mathfrak{g}^\mathbb{C}$. 从而我们有

$$\mathrm{im}(d(\mathrm{Ind}(\rho))) = (\mathrm{im} d\rho)^\mathbb{C} = \mathbb{C} \mathrm{im} d\rho.$$

$\forall a = a_1 + ia_2, b = b_1 + ib_2 \in \mathfrak{g}^\mathbb{C}$, 验证定理 4.3.9 的条件 (4):

$$\begin{aligned} aba &= a_1 b_1 a_1 - a_2 b_2 a_2 - (a_2 b_2 a_1 + a_1 b_2 a_2) \\ &\quad + i(a_1 b_1 a_2 + a_2 b_1 a_1 + a_1 b_2 a_1 - a_2 b_2 a_2) \in \mathbb{C} \mathrm{im} d\rho = \mathrm{im}(d(\mathrm{Ind}(\rho))). \end{aligned}$$

从而验证了定理 4.3.9 所需条件. $\square$

4.3.2.2 交换 Lie 代数

命题 4.3.11. 设 $\mathfrak{g}$ 是交换的 Lie 代数, 则 $\mathcal{U}\mathfrak{g} \simeq S\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(\mathfrak{g})$ 是多项式代数. 其中 $S^n(\mathfrak{g}) = \overline{\mathrm{span}_{\mathbb{F}} \left\{ \bigotimes_{k=1}^n x_k : x_k \in \mathfrak{g} \right\}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 n 次对称积, 可以把其中的元素看作 n 次齐次多项式.

为了记号的简便,下面会把 $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ 中的乘法 $\overline{x_1 \otimes x_2}$ 简记作相乘 $x_1 x_2$. $\mathfrak{g}$ 的表示以自明的方式看做 $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ -模, 相应的表示同态 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 由泛性质诱导了代数的同态 $\tilde{\theta} : \mathcal{U}\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

命题 4.3.12 (刻画 II). 设 G 为阿贝尔 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 为其 Lie 代数, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为群表示, 则下列条件等价:

- (1) ρ 是 Cayley 表示.
- (2) $\tilde{d\rho}(S^3(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{im} d\rho$.
- (3) 对任意整数 $k \geq 0$ 有 $\tilde{d\rho}(S^{2k+1}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{im} d\rho$.

其中 $\tilde{d\rho} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \simeq S(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 为由 $d\rho$ 诱导的代数同态.

证明. 若 $\tilde{d\rho}(S^3(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{im} d\rho$, 通过归纳法可推得对任意 $k \geq 0$ 有

$$\tilde{d\rho}(S^{2k+1}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{im} d\rho,$$

这确立了条件(2)与(3)的等价性.

当条件(2)成立时, 对任意 $x, y \in \mathfrak{g}$ 有

$$d\rho(x)d\rho(y)d\rho(x) = \tilde{d\rho}(xyx) \in \tilde{d\rho}(S^3(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{im} d\rho.$$

根据定理 4.3.9 可知 ρ 是 Cayley 表示.

反之若条件(1)成立, 对任意 $x, y, z \in \mathfrak{g}$, 由定理 4.3.9 可得

$$\tilde{d\rho}(xyz) = \frac{1}{2}\tilde{d\rho}(xyz + zyx) = \frac{1}{2}(d\rho(x)d\rho(y)d\rho(z) + d\rho(z)d\rho(y)d\rho(x)) \in \mathrm{im} d\rho,$$

这验证了(1)与(2)的等价. □

例 4.3.3 (1 维 Lie 群的 Cayley 表示). 本例研究 1 维连通 Lie 群 G 的 Cayley 表示. 设 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$, 那么问题归结于研究 $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{F}$ 的具备幂扩张性质的表示. 假设 $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{F} \xrightarrow{\theta} \mathfrak{gl}(V)$, 该嵌入表示使得 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{gl}(V)$ 中成为具有幂扩张性质的一维 Lie 子代数, $\dim V = n$. θ 仅由 $\theta(1) = a$ 唯一确定. 如果 a 中仅有一个 Jordan 块, 则 θ 必同构以下情况之一:

- (1) $n = 1, a = x \in \mathbb{C}^\times$.
- (2) $n = 2, a = E_2$.
- (3) $n = 3, a = E_3$.

其中 E_k 定义如式 (4-4).

证明. 考虑 $a = U^{-1}JU$, 其中 $U \in \mathrm{GL}(V)$ 而 J 是 a 的 Jordan 标准型. 此时有生成关系 $\mathrm{span}(J^{2k+1})_{k \geq 1} \subseteq U^{-1}\mathfrak{g}U = U^{-1}\mathrm{span}(J)U$.

若 a 是半单的, 则 J 亦为半单. 此时 $n = 1$. 因 $a \neq 0$, 所以 $J = (x), x \in \mathbb{F}^\times$.

当 a 非半单时, 设 $n > 1$ 且 $J = x \text{Id}_n + E_n$ (此处 E_k 表示 k 维幂零 Jordan 块), 对应的矩阵形式为

$$E_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (4-4)$$

此时存在 $\alpha \in \mathbb{F}$ 使得 $J^3 = \alpha J$. 若 $x \neq 0$, 则

$$x^2 = \alpha x, \quad 2x = \alpha, \quad E_n^2 = 0, \quad x \neq 0. \quad (4-5)$$

以上方程组 (4-5) 无解, 出现矛盾. 因此 $x = 0$, 即 $E_n^3 = \alpha E_n$, 可推得 $n \leq 3$ 且 $\alpha = 0$. 满足此条件的 Jordan 块为 $n = 2, 3$ 时的 $J = E_n$. $\square$

一般的 Cayley 表示可以由这些 Jordan 块拼成. 一个具体的例子是 $S^1 \simeq \text{SO}_2(\mathbb{R})$ 的标准表示.

$$\begin{aligned} \rho : S^1 &\rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R}) \\ \exp(is) &\mapsto \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

这个表示是由两个特征值分别为 $i, -i$ 的一维块拼出的.

4.3.2.3 自同构群作用

本节简要讨论自同构群作用下 Cayley 变换适用性的稳定性. 令 $\text{Aut } G$ 为 G 的自同构群, 对任意 $\sigma \in \text{Aut } G$ 和表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, 可构造新表示 $\rho^\sigma := \rho \circ \sigma^{-1} : G \rightarrow \text{GL}(V)$. 事实上这给出了自同构群在表示上的作用 $\text{Aut } G \curvearrowright G\text{-模}$.

命题 4.3.13. 表示 ρ^σ 满足以下性质:

- (1) ρ^σ 不可约当且仅当 ρ 不可约.
- (2) 若 $\rho = \bigoplus_{i=1}^m \rho_i$, 则 $\rho^\sigma = \bigoplus_{i=1}^m \rho_i^\sigma$, 其中 $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ 且 $\bigoplus_{i=1}^m V_i = V$.
- (3) 若 $\sigma \in \text{Inn } G$, 则 ρ^σ 与 ρ 同构.
- (4) ρ^σ 是 Cayley 表示当且仅当 ρ 是 Cayley 表示.
- (5) $\rho_1^\sigma \otimes \rho_2^\sigma = (\rho_1 \otimes \rho_2)^\sigma$.

证明. 上述性质均可由定义直接验证. $\square$

根据命题 4.3.13 中条目 (2) 和条目 (5), 作用 $\text{Aut } G \curvearrowright G\text{-模}$ 自然地诱导了在表示环上的作用 $\text{Aut } G \curvearrowright R(G)$, 且内自同构群在 $R(G)$ 上的作用是平凡的, 从而外自同构群 $\text{Out } G := \text{Aut } G / \text{Inn } G$ (相应地, $\text{Out } \mathfrak{g} := \text{Aut } \mathfrak{g} / \text{Inn } \mathfrak{g}$) 作用于 $R(G)$ (相应地, $R(\mathfrak{g})$). 事实上 $\bar{\sigma} \in \text{Out } G$ (相应地, $\bar{\sigma} \in \text{Out } \mathfrak{g}$) 给出了 $R(G)$ (相应地, $R(\mathfrak{g})$) 的环自同构. 进一步由命题 4.3.13 条目 (4) 可知, Cayley 变换的适用性在 $\text{Out } G$ 作用下保持稳定.

推论 4.3.14 (稳定性 I). 若 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是 Cayley 表示, 则其在 $R(G)$ 中 $\mathrm{Out}(G)$ -轨道上的所有表示均为 Cayley 表示. 相应地, 若表示 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 满足幂扩张性质, 则其在 $R(\mathfrak{g})$ 中 $\mathrm{Out}(\mathfrak{g})$ -轨道上的所有表示均满足幂扩张性质.

推论 4.3.15. 参见文献^[28] [20.3 节], $\mathrm{Out}(\mathrm{Spin}_8(\mathbb{C}))$ 在表示 $\{\mathbb{C}^n, \mathbb{S}^+, \mathbb{S}^-\}$ 上的作用与置换群 $\mathfrak{S}_3$ 相同. 此处 $\mathbb{S}^+, \mathbb{S}^-$ 为两个旋量表示. 由于 $\mathbb{C}^n$ 是 Cayley 表示, 推论 4.3.14 直接导出 $\mathbb{S}^+$ 和 $\mathbb{S}^-$ 同为 Cayley 表示.

4.4 Cayley 表示的半单性理论

4.4.1 基本事实

在本节中, 我们建立两个关于半单 Lie 群和半单 Lie 代数的有用性质. 这些性质在之后的证明中会起到重要作用.

4.4.1.1 限制与诱导函子的基本性质

命题 4.4.1 (限制与诱导函子的基本性质). 设 $\mathfrak{g}$ (相应地, $\mathfrak{u}$) 是实 (相应地, 复) 半单 Lie 代数, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (相应地, $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$) 为其复化 (相应地, 实形式). 若 $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ (相应地, $\rho : \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{gl}(W)$) 是 $\mathfrak{g}$ (相应地, $\mathfrak{u}$) 的表示, 则满足以下性质:

(1) Res 与 Ind 是互逆的:

$$\mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\pi)) = \pi, \quad \mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(\rho)) = \rho.$$

(2) π (相应地, ρ) 不可约当且仅当 $\mathrm{Ind}(\pi)$ (相应地, $\mathrm{Res}(\rho)$) 不可约.

(3) 存在不可约表示 $\pi_j : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_j)$, $1 \leq j \leq s$, 使得

$$V = \bigoplus_{j=1}^s V_j, \quad \pi = \prod_{j=1}^s \pi_j.$$

证明. 性质 (1) 直接由定义可得.

假设 π 不可约且 $0 \neq V' \subseteq V$ 是满足 $\mathrm{Ind}(\pi)(\mathfrak{g})(V') \subseteq V'$ 的子空间, 则

$$V = \pi(\mathfrak{g})(V') = \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\pi))(\mathfrak{g})(V') = \mathrm{Ind}(\pi)(\mathfrak{g})(V') \subseteq V' \subseteq V,$$

这说明 $\mathrm{Ind}(\pi)$ 不可约. 取 $\pi = \mathrm{Res}(\rho)$, $\mathrm{Res}(\rho)$ 的不可约性导致 $\rho = \mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(\rho))$ 的不可约性.

反之, 若 ρ 不可约且 $0 \neq W' \subseteq W$ 是满足 $\mathrm{Res}(\rho)(\mathfrak{u}')(W') \subseteq W'$ 的子空间, 则

$$W = \rho(\mathfrak{u})(W') = \mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(\rho))(\mathfrak{u}'^{\mathbb{C}})(W') = \mathbb{C} \mathrm{Res}(\rho)(W') \subseteq W' \subseteq W,$$

因此 $\mathrm{Res}(\rho)$ 不可约. 取 $\rho = \mathrm{Ind}(\pi)$, 可知 $\mathrm{Ind}(\pi)$ 的不可约性蕴含 $\pi = \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\pi))$ 的不可约性, 这完成了 (2) 的证明.

为证 (3), 注意到存在不可约表示 $\rho_j : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_j)$, $1 \leq j \leq s$, 使得

$$V = \bigoplus_{j=1}^s V_j, \quad \text{Ind}(\pi) = \prod_{j=1}^s \rho_j.$$

对每个 $1 \leq j \leq s$, 定义 $\pi_j := \text{Res}(\rho_j)$, 由 (2) 知其不可约. $\pi = \text{Res}(\text{Ind}(\pi)) = \prod_{j=1}^s \text{Res}(\rho_j)$, 这证明了 (3). $\square$

4.4.1.2 紧半单 Lie 代数的生成性质

引理 4.4.2 (连通的半单代数群是线性约化的). 设 $G < \text{GL}(V)$ 是连通线性代数群, 且其 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数, 则 G 是线性约化的.

证明. 设 W 是 G 的有限维正则表示, 则代数群的作用 $G \curvearrowright W$ 诱导了相应的 $\mathfrak{g}$ -模结构. 由于 $\mathfrak{g}$ 是半单的, 所以 W 作为 $\mathfrak{g}$ -模完全可约. $W = \bigoplus W_i$, 每个 W_i 是一个不可约 $\mathfrak{g}$ -模. 我们利用如下引理:

引理 4.4.3. ^[28] 设 G 是连通 Lie 群, Lie 代数 $\mathfrak{g}$, V 是有限维 G -模并因此成为 $\mathfrak{g}$ -模. 设 $V' \subseteq V$ 是 V 的子 $\mathfrak{g}$ -模, 则 V' 是 V 的子 G -模.

由于 W 的 $\mathfrak{g}$ -模结构是由连通 Lie 群 G 的作用诱导, 引理表明 W_i 是 G 的表示, 定理 2.2.6 表明 W_i 恰是 W 作为 G -模的不可约分解. 由定义, G 是线性约化的. $\square$

引理 4.4.4 (半单 Lie 代数是对称群的 Lie 代数). $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数, $\mathfrak{g} \curvearrowright^{\text{ad}} \mathfrak{g}$ 是伴随作用. 则存在一个不可约对称代数群 $G < \text{GL}(\mathfrak{g})$, 使得 G 的 Lie 代数

$$\text{Lie } G \simeq \text{ad}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{g}.$$

证明. $\mathfrak{g}$ 是半单的, 从而 ad 是忠实表示, $\mathfrak{g} \simeq \text{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. 定理 4.2.12 表明 $\exists G' < \text{GL}(\mathfrak{g})$ 是不可约线性代数群, 且 $\text{Lie } G' = \text{im ad} \simeq \mathfrak{g}$. 引理 4.4.2 确保 G' 是线性约化的. 定理 4.2.12 推出 $\exists P \in \text{GL}(\mathfrak{g})$, 使得 $G := PG'P^{-1}$ 是对称的. 容易验证 G 即为所求. $\square$

引理 4.4.5. 设 G 为连通 Lie 群, 其 Lie 代数 $\mathfrak{g}$. 设 $p : \tilde{G} \rightarrow G$ 是 G 的万有覆盖, $q : G \rightarrow G_0 := G/Z(G)$ 为商映射, 其中 $Z(G)$ 是 G 的中心. 则存在如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{\text{Ad}}} & \text{Aut } \mathfrak{g} \\ p \downarrow & & \uparrow \text{Ad}_0 \\ G & \xrightarrow{q} & G_0, \end{array}$$

其中 $\tilde{\text{Ad}}$ (相应地, Ad_0) 是 $\tilde{G}$ (相应地, G_0) 的伴随表示.

证明. 注意到 $\ker(\widetilde{\text{Ad}}) = Z(\widetilde{G})$, $\ker(p) \subseteq Z(\widetilde{G})$, 且 $p(Z(\widetilde{G})) \subseteq Z(G) = \ker(q)$. 可得 $\ker(q \circ p) = p^{-1}(Z(G)) = Z(\widetilde{G})$. 具体而言, 包含关系 $Z(\widetilde{G}) \subseteq p^{-1}(Z(G))$ 由下式给出:

$$Z(\widetilde{G}) \subseteq p^{-1}(p(Z(\widetilde{G}))) \subseteq p^{-1}(Z(G)).$$

对于反向包含, 观察到对任意 $x \in p^{-1}(Z(G))$ 和 $y \in \widetilde{G}$, 有 $xyx^{-1}y^{-1} \in \ker(p)$. 由 $\ker(p) = \pi_1(G)$ 的离散性和 $\widetilde{G}$ 的连通性可知, $xyx^{-1}y^{-1} = h_x \in G$ 仅依赖于 x . 因此 $xyx^{-1}y^{-1} = 1$, 从而 $p^{-1}(Z(G)) \subseteq Z(\widetilde{G})$. 交换性由构造直接可得. $\square$

命题 4.4.6 (紧半单 Lie 代数由 Cartan 子代数共轭生成). 设 G 为紧半单 Lie 群, 其 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 则有 $\mathfrak{g} = \text{Ad}(G)(\mathfrak{h})$, 即 $\forall x \in \mathfrak{g}, \exists g \in G, h \in \mathfrak{h}$, 使得 $x = \text{Ad}(g)h$.

证明. 不失一般性, 假设 G 连通. 由引理 4.4.4, 存在对称的不可约代数子群 $G' \subseteq \text{GL}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, 其 Lie 代数同构于 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. 令 $U \subseteq \text{GL}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ 为由酉元构成的子群, $K := G' \cap U$. 根据定理 4.2.9, K 连通且 $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. 半单 Lie 代数紧形式的唯一性蕴含 $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}$. 进一步由定理 4.2.11 得 $\mathfrak{k} = \text{Ad}(K)(\mathfrak{h}_K)$, 其中 $\mathfrak{h}_K$ 为 $\mathfrak{k}$ 的 Cartan 子代数. 在 $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}$ 的同构下, 引理 4.4.5 给出 $\mathfrak{g} = \text{Ad}(G)\mathfrak{h}$. $\square$

4.4.2 Cartan 子代数判据

在这一节我们给出 Cayley 表示的 Cartan 子代数判据.

4.4.2.1 实与复半单 Lie 代数的根系分解

本节并行料理实半单 Lie 代数和复半单 Lie 代数. 由于 $\mathbb{R}$ 不是代数闭域, 复半单 Lie 代数的某些分解在实 Lie 代数上会有不同的表现. 出于这样技术上的原因, 本小节对实半单 Lie 代数的根系分解做一个简短说明.

设 G 为域 $\mathbb{F}$ 上的半单 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 为其 Lie 代数. 取定表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 及 Cartan 子代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时, 根空间分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right), \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h},$$

其中 Φ 为 $\mathfrak{g}$ 的根系.

当 $\mathfrak{g}$ 为紧实形式时, 分解式为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} (\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g} \right), \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}.$$

对非紧实形式 $\mathfrak{g}$, 根据文献^[119] [命题 6.40 及公式 (6.48b)] 存在受限的根空间

分解 (restricted root space decomposition):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\sigma \in \Sigma} \mathfrak{g}_\sigma \right), \quad \mathfrak{g}_\mu = \mathfrak{g} \cap \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in \Phi \\ \alpha|_{\mathfrak{a}} = \mu}} \mathfrak{g}_\alpha^{\mathbb{C}} \right), \quad \mu \in \Sigma \sqcup \{0\},$$

其中 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ 为交换子空间, Σ 为受限的根系 (restricted roots). 此时 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ 一般不成立, 但当 $\mathfrak{g}$ 为分裂实形式时成立.

引理 4.4.7. 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbb{F}$ 上半单 Lie 代数, 其 Cartan 子代数是 $\mathfrak{h}$, 满足 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是不可约表示. 那么 $\text{im } \theta = \theta(\mathfrak{h}) \oplus_{\mathbb{F}} \theta(\mathfrak{l})$.

证明. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\mathbb{F}} \mathfrak{l}$. 设 $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Wt } V} V_\lambda$ 为权空间分解.

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$:

$$\theta(x)(V_\lambda) \subseteq \begin{cases} V_{\lambda+\alpha} & \text{若 } x \in \mathfrak{g}_\alpha \\ V_\lambda & \text{若 } x \in \mathfrak{h} \end{cases}.$$

在这个分解的矩阵表示下, 可见 $\theta(\mathfrak{h})$ 只在对角元处有非零分量, $\theta(\mathfrak{l})$ 只在非对角元处有非零分量. 从而 $\text{im } \theta = \theta(\mathfrak{h}) \oplus_{\mathbb{C}} \theta(\mathfrak{l})$.

(2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: 考虑复化 $\text{Ind}(\theta)$, 则知道 $\text{im } \theta^{\mathbb{C}} = \theta(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \oplus_{\mathbb{C}} \theta(\mathfrak{l}^{\mathbb{C}})$. 再实化, 则 $\text{im } \theta = \theta(\mathfrak{h}) \oplus_{\mathbb{R}} \theta(\mathfrak{l})$.

□

引理 4.4.8 (Cartan 子代数判据). 设 G 为域 $\mathbb{F}$ 上的半单 Lie 群且满足 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. 若 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是 Cayley 表示, 则 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.

证明. 不妨假设 ρ 是不可约表示. 由命题 4.3.12 和命题 4.3.4 可知 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq \text{im } d\rho$. 分两种情形讨论:

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 情形: 由根系分解

$$\text{im } d\rho = d\rho(\mathfrak{h}) \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} d\rho(\mathfrak{g}_\alpha) \right),$$

结合 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq \text{im } d\rho$ 可得 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.

(2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 情形: 考虑复化映射 $\text{Ind}(d\rho) : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. 因 $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ 是 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ 的 Cartan 子代数, 由 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 情形的论证得

$$\widetilde{\text{Ind}(d\rho)}(S^3\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \subseteq \text{Ind}(d\rho)(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}).$$

从而有包含关系

$$\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq \widetilde{\text{Ind}(d\rho)}(S^3\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \cap \text{im } d\rho \subseteq \text{Ind}(d\rho)(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \cap \text{im } d\rho.$$

由假设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{l}$ (其中 $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$ 为子空间), 再由引理 4.4.7 $\text{im } d\rho = d\rho(\mathfrak{h}) \oplus d\rho(\mathfrak{l})$. 因此

$$\text{Ind}(d\rho)(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \cap \text{im } d\rho = d\rho(\mathfrak{h}).$$

□

定理 4.4.9 (刻画 III). 设 G 为域 $\mathbb{F}$ 上的半单 Lie 群, 满足 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ 且 $\mathfrak{g} = \text{Ad}(G)(\mathfrak{h})$, 其中 $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ 为 G 的伴随表示. 设 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为群表示, 则 ρ 是 Cayley 表示当且仅当 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.

证明. 由定理 4.3.9 和引理 4.4.8, ρ 是 Cayley 表示 $\implies \widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.

下证明 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$ 能保证 $\mathfrak{g}$ 的幂扩张性质. 注意到每个 $x \in \mathfrak{g}$ 可表示为 $x = \text{Ad}(g)h$, 其中 $g \in G, h \in \mathfrak{h}$. 因此有

$$d\rho(x) = d\rho(\text{Ad}(g)h) = \rho(g)d\rho(h)\rho(g)^{-1},$$

结合命题 4.3.12 可得

$$d\rho(x)^{2k+1} = \rho(g)(d\rho(h))^{2k+1}\rho(g)^{-1} \in \rho(g)d\rho(\mathfrak{h})\rho(g)^{-1} = d\rho(\text{Ad}(g)(\mathfrak{h})) \subseteq \text{im } d\rho,$$

这验证了定理 4.3.9 要求的幂扩张性质. $\square$

4.4.3 不可约 Cayley 表示: Cayley 构型

本节考虑半单 Lie 群不可约表示上 Cayley 变换的适用性. 设 $\mathfrak{g}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的半单 Lie 代数, $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 为其表示. 假设 $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Wt } V} V_\lambda$ 为 V 的权空间分解, 权图为 $(\text{Wt } V, m)$, 记 Δ^+ 为 $\mathfrak{g}$ 的素根系.

4.4.3.1 几何条件

由于半单 Lie 群的有限维不可约表示由其最高权唯一确定, Cayley 变换在该表示上的适用性必然对最高权施加某种条件. 为明确表述这一条件, 我们首先建立以下三个引理.

引理 4.4.10 (权平衡). $\sum_{\lambda \in \text{Wt } V} m(\lambda)\lambda = 0$.

证明. 简记 $\omega := \sum_{\lambda \in \text{Wt } V} m(\lambda)\lambda$. 先考虑 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 情形, 用反证法. 假设 $\omega \neq 0$, 则存在 $h \in \mathfrak{h}$ 使得 $\omega(h) \neq 0$. 由 $\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{h_\alpha : \alpha \in \Delta^+\}$, 可选取 $\beta \in \Delta^+$ 满足 $\omega(h_\beta) \neq 0$, 这里 $h_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ 是根 $\alpha \in \Delta^+$ 的余根.

取 $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ 和 $x_{-\beta} \in \mathfrak{g}_{-\beta}$ 使得 $h_\beta = [x_\beta, x_{-\beta}]$, 则有

$$\omega(h_\beta) = \text{tr}(\pi(h_\beta)) = \text{tr}([\pi(x_\beta), \pi(x_{-\beta})]) = 0.$$

这与 $\omega \neq 0$ 矛盾.

对 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 情形, 将表示复化为 $\text{Ind } \pi : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 此时 ω 保持不变. 由 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 情形的论证可得 $\omega = 0$, 证毕. $\square$

对于诺特 $\mathbb{Z}$ -模 M 的子集 S , 记 $\mathbb{Z}S$ 为由 S 生成的子模. 定义 S 的秩为 $\text{rank}(S) := \text{rank}(\mathbb{Z}S)$. 特别地, 对任意特征为 0 的域 $\mathbb{K}$, $\text{rank}(S)$ 等于 S 在 $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ 中生成子空间的维数.

引理 4.4.11. 若不可约表示 $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 的最高权为 μ , 且满足 $\dim_{\mathbb{F}}(\pi(\mathfrak{h})) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})$, 则 $\text{rank}(\mathcal{O}_{\mu}) = \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})$. 此处 $\mathcal{W}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群, $\mathcal{O}_{\mu} := \{s(\mu) : s \in \mathcal{W}\}$ 是 μ 在 $\mathcal{W}$ 作用下的轨道.

证明. 令 $n := \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})$. 设权集 $\text{Wt } V := \{\lambda \in \Lambda : V_{\lambda} \neq 0\}$ 中的元素为 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. 构造矩阵

$$A = [\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{\dim(V_{\lambda_1})\text{份}}, \dots, \underbrace{\lambda_m, \dots, \lambda_m}_{\dim(V_{\lambda_m})\text{份}}] \in \Lambda^{\dim V}. \quad (4-6)$$

将每个权 $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathfrak{h}^*$ 视为 n 维列向量, 则 $A \in \mathbb{F}^{n \times \dim(V)}$. 由定理 4.2.7, $\text{Wt } V$ 中元素均为 $\mathcal{O}_{\mu}$ 的凸组合, 故 $\text{rank}(A) = \text{rank}(\text{Wt } V) = \text{rank}(\mathcal{O}_{\mu})$.

注意到 $\pi(\mathfrak{h}) = \{A(h) : h \in \mathfrak{h}\}$, 其中

$$A(h) := \text{diag}(\underbrace{\lambda_1(h), \dots, \lambda_1(h)}_{\dim(V_{\lambda_1})\text{份}}, \dots, \underbrace{\lambda_m(h), \dots, \lambda_m(h)}_{\dim(V_{\lambda_m})\text{份}}). \quad (4-7)$$

由此可得 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) = \dim_{\mathbb{F}}(\pi(\mathfrak{h})) \leq \text{rank}(A) = \text{rank}(\mathcal{O}_{\mu}) \leq \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})$. $\square$

引理 4.4.12. 若不可约表示 $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 满足 $\tilde{\pi}(S^3 \mathfrak{h}) \subseteq \pi(\mathfrak{h})$ 且 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) = \dim_{\mathbb{F}}(\pi(\mathfrak{h})) =: n$, 则存在线性无关的权 $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Lambda$ 使得

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subseteq \text{Wt } V \setminus \{0\} \subseteq \{\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_n\}.$$

证明. 设 $\Delta^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. 对每个 $1 \leq j \leq n$, 取 $\alpha_j \in \Delta^+$ 的余根 h_j . 由 $\{h_1, \dots, h_n\}$ 构成 $\mathfrak{h}$ 的基, 其对偶基记为 $\{\omega'_1, \dots, \omega'_n\}$. 设非零权集 $\{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\} : V_{\lambda} \neq 0\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. 根据定义存在整系数列向量 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}^n$ 使得

$$\begin{aligned} A &= \omega' A', \quad \omega' := [\omega'_1 \ \cdots \ \omega'_n] \\ A' &:= [\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{\dim(V_1)\text{份}}, \dots, \underbrace{a_m, \dots, a_m}_{\dim(V_m)\text{份}}], \end{aligned} \quad (4-8)$$

其中 A 如 (4-6) 定义. 易见 $\omega'(\mathfrak{h}) \subseteq \mathbb{C}^n$ 由向量 $\omega'(h) := [\omega'_1(h), \dots, \omega'_n(h)]$ 构成. 由于 $\text{rank}(\omega') = n$, 故 $\omega'(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}^n$. 令 $A_0 := [a_1, \dots, a_m] \in \mathbb{Z}^{n \times m}$.

(1) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 情形: 由引理 4.4.11 的证明, $\text{rank}(A_0) = n$. 重排 λ_j 使得 A_0 的前 $n \times n$ 子矩阵满秩. 通过高斯消元法得分解 $A_0 = GB$, 其中 $G \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ 且

$$B = \begin{bmatrix} I_n & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,1} & \cdots & c_{1,m-n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,1} & \cdots & c_{2,m-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,m-n} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{n \times m}.$$

构造 $B' \in \mathbb{Q}^{n \times \dim(V)}$ 使得 $A' = GB'$. 取 $\omega := \omega'G \in \Lambda^n$, 由式 (4-8) 知

$$A(h) = \text{diag}(\omega'(h)A') = \text{diag}(\omega(h)B'), \quad \forall h \in \mathfrak{h}.$$

结合条件 $S^3(\pi(\mathfrak{h})) = \tilde{\pi}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq \pi(\mathfrak{h})$ 及(4-7), 对任意 $h, h' \in \mathfrak{h}$ 有

$$A(h)^2 A(h') \in \pi(\mathfrak{h}).$$

取 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 的对偶基 $x_1, \dots, x_n$, 通过计算 $A(x_j)^2 A(x_k)$ 得约束条件

$$c_{js}^3 = c_{js}, \quad c_{js}^2 c_{ks} = 0, \quad 1 \leq s \leq m-n, \quad 1 \leq j < k \leq n.$$

由此推得 $c_{js} \in \{0, \pm 1\}$, 且每列 $1 \leq s \leq m-n$ 至多含一个非零元. 由引理 4.4.12中式 (4-8)知 $A = \omega B'$ 其中 $B' \in \{0, \pm 1\}^{n \times \dim(V)}$. 根据构造, 可取 $\omega = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 满足要求.

(2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 情形: 条件 $\tilde{\pi}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq \pi(\mathfrak{h})$ 蕴涵

$$\widetilde{Ind(\pi)}(S^3\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \tilde{\pi}(S^3\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C} \subseteq \pi(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C} = Ind(\pi)(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}).$$

由于 π 与 $Ind(\pi)$ 权系相同, 由复情形结论即得所需包含关系. $\square$

定理 4.4.13 (几何条件). 设 G 为 $\mathbb{F}$ 上的半单 Lie 群且 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. 若 $\rho : G \rightarrow GL(V)$ 是以 ω_1 为最高权的不可约表示, 满足 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) = \dim_{\mathbb{F}}(d\rho(\mathfrak{h})) =: n$, 且 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$, 则成立:

- (1) 权集 $\text{Wt } V$ 或等于 $\mathcal{O}_{\omega_1}$, 或等于 $\mathcal{O}_{\omega_1} \sqcup \{0\}$. 特别地, V 的非零权都是极权.
- (2) $\text{rank}(\mathcal{O}_{\omega_1}) = n$.
- (3) 存在 $\omega_2, \dots, \omega_n \in \Lambda$ 使得 $\mathcal{O}_{\omega_1} = \{\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_n\}$.

证明. 由引理 4.4.11 可直接得结论 (2). 现同步证明 (1)和 (3). 根据引理 4.4.8和 4-8, 存在 $\omega'_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Lambda$ 使得

$$\{\omega'_1, \dots, \omega_n\} \subseteq \text{Wt } V \setminus \{0\} \subseteq \{\pm\omega'_1, \dots, \pm\omega_n\}. \quad (4-9)$$

不妨设 ω'_1 或 $-\omega'_1$ 是 V 的最高权. 必要时交换正负根系 Δ^+ 和 Δ^- , 可进一步假设 $\omega'_1 = \omega_1$. 记 $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\omega_1}$.

首先验证 $\omega_j \in \mathcal{O}$ 对所有 $1 \leq j \leq n$ 成立. 如若不然, 反设存在 $\omega_j \notin \mathcal{O}$, 不妨取 $\omega_2 \notin \mathcal{O}$. 令 $\mathcal{O} = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ 其中 $\mu_1 = \omega_1$. 根据权集的结构定理, $\text{Wt } V = \text{Conv}(\mathcal{O}) \cap (\omega_1 + \Lambda_R)$:

$$\omega_2 \in \text{Wt } V \Rightarrow \omega_2 = \sum_{i=1}^m c_i \mu_i \quad \text{其中} \quad \sum c_i = 1, \quad 0 \leq c_i < 1.$$

若 $-\omega_2 \notin \mathcal{O}$, 则 $\mathcal{O} \subseteq \{\pm\omega_1, \pm\omega_3, \dots, \pm\omega_n\}$. 这将导致

$$\omega_2 \in \text{Wt } V \subseteq \text{span}\{\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_n\},$$

与 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 的线性无关性矛盾.

若 $-\omega_2 \in \mathcal{O}$, 则存在指标 j 使得 $-\omega_2 = \mu_j$:

$$(1 + c_j)\omega_2 = \sum_{i \neq j} c_i \mu_i \in \text{span}\{\mu_i : i \neq j\} \subseteq \text{span}\{\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_n\}.$$

同样与 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 的线性无关性矛盾.

其次证明存在 $1 \leq k \leq n$ 使得 $-\omega_k \in \mathcal{O}$. 若不然, 由式 (4-9) 可得 $\mathcal{O} = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. 所以 $\mathcal{O} \subseteq \text{Wt } V \subseteq \text{Conv}(\mathcal{O})$, 再由式 (4-9) 非零权集 $\text{Wt } V \setminus \{0\} = \mathcal{O}$. 由 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 的线性无关性, $\omega := \sum_{j=1}^n \omega_j \neq 0$. 由于所有的非零权都是极权, 所以 $m(\lambda) = \dim V_{\omega_j} = 1$. 引理 4.4.10 表明 $\omega = \sum \omega_j = 0$, 与 ω_j 的线性无关性矛盾.

最后根据 Weyl 群 $\mathcal{W}$ -轨道的对称性, $\pm\omega_k \in \mathcal{O}$ 当且仅当所有 $\pm\omega_j \in \mathcal{O}$. 结合式 (4-9) 可得 $\mathcal{O} = \{\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_n\} = \text{Wt } V \setminus \{0\}$, 证毕. $\square$

定义 4.4.1 (Cayley 构型). 称半单 Lie 群 G 或半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示 V 的权图 $(\text{Wt } V, m)$ 具有 Cayley 构型, 如果 $(\text{Wt } V, m)$ 满足如下条件:

- (1) 满秩: $\text{rank}(\text{Wt } V) = n = \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})$;
- (2) 中心对称: $\text{Wt } V = -\text{Wt } V$;
- (3) 轨道性质: $\text{Wt } V \setminus \{0\} = \mathcal{O}_{\omega_1} := \mathcal{W}\omega_1$, 其中 ω_1 是 V 的最高权;
- (4) 轨道数目: $\mathcal{O}_{\omega_1}$ 恰中有 $2n$ 个权.
- (5) 权的重数: $m|_{\mathcal{O}_{\omega_1}} = 1$.

定理 4.4.13 给出了 Cayley 表示的权图必须满足的条件. 利用上述定义 4.4.1, 我们立刻得到推论.

推论 4.4.14 (权图构型). Cayley 表示的权图具有 Cayley 构型.

推论 4.4.15 (自对偶性). 对任意具有 Cayley 构型的表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$, 有 G -模同构 $V \simeq V^*$. 特别地, 当 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ 且 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为满足 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) = \dim_{\mathbb{F}}(d\rho(\mathfrak{h}))$ 的不可约 Cayley 表示时, V 为自对偶表示.

证明. 根据定义以及 Cayley 构型要求权集满足中心的对称性可得:

$$\text{Wt } V = -\text{Wt } V = \text{Wt } V^*,$$

由定理 4.2.7, 半单 Lie 代数的不可约表示在同构意义下由权集唯一确定, 从而 $V \simeq V^*$. $\square$

根据第 4.3.2.3 小节所述, $\text{Out}(G)$ 作用于 $R(G)$. 由定理 4.2.7 可知, 该作用诱导出 $\text{Out}(G)$ 在 $(\mathcal{C} \cap \Lambda) = \Lambda/\mathcal{W}$ 上的作用. 特别地, $\text{Out}(G)$ 也作用于由不可约表示同构类生成的表示环 $R(G)$. 以下结论是显然的.

推论 4.4.16 (稳定性 II). 若 $V \in R(G)$ 为具有 Cayley 构型的表示, 则对任意 $\sigma \in \text{Out}(G)$, V^σ 仍保持 Cayley 构型.

4.4.3.2 几何条件的充分性

定理 4.4.13 和推论 4.4.14 给出了 Cayley 变换在不可约表示上适用的必要的几何条件. 接下来我们将研究几何条件的充分性, 从 Cayley 构型表示的存在性开始.

引理 4.4.17 (Cayley 构型表示的存在性). 设 G 为 $\mathbb{F}$ 上单连通半单 Lie 群, $\mathcal{O}$ 为 $\omega_1 \in \Lambda$ 的 $\mathcal{W}$ -轨道. 若 $\mathcal{O}$ 关于原点对称, 且满足 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) = \text{rank}(\mathcal{O}) = |\mathcal{O}|/2 = n$ 及 $\text{Conv}(\mathcal{O}) \cap (\omega_1 + \Lambda_R) \subseteq \mathcal{O} \cup \{0\}$, 则在同构意义下存在唯一不可约表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 满足:

- (1) 权集 $\text{Wt } V = \text{Conv}(\mathcal{O}) \cap (\omega_1 + \Lambda_R)$;
- (2) $\dim(d\rho(\mathfrak{h})) = n$;
- (3) 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$, 当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时 $d\widetilde{\text{Ind}}(\rho)(S^3\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) \subseteq d\text{Ind}(\rho)(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$.

证明. 若这样的不可约表示存在, 则其唯一性立即成立. 由于 $\mathcal{O}$ 关于原点对称且 $|\mathcal{O}| = 2n$, 我们可写 $\mathcal{O} = \{\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_n\}$. 由 $\text{rank}(\mathcal{O}) = n$ 的假设, $\omega_1, \dots, \omega_n$ 是线性无关的. 令 C 为 Λ 的包含 ω_1 的闭 Weyl 腔. 根据定义, $\Lambda = \mathcal{W}C$ 且 $\omega_1 \in \mathcal{O} \cap C$. 设 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为对应于 ω_1 的不可约表示. 我们有

$$\mathcal{O} \subseteq \text{Wt } V = \text{Conv}(\mathcal{O}) \cap (\omega_1 + \Lambda_R) \subseteq \mathcal{O} \cup \{0\}.$$

- (1) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. 令 $h_1, \dots, h_n \in \mathfrak{h}$ 为 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 的对偶基. 对任意 $1 \leq j, k \leq n$ 有 $\omega_j(h_k)^3 = \omega_j(h_k)$. 对每个 $h \in \mathfrak{h}$, 将其写为 $h = \sum_{j=1}^n c_j h_j$. 因此由引理 4.4.11 可得 $\dim(d\rho(\mathfrak{h})) = n$ 且

$$(d\rho(h))^3 = \begin{cases} \text{diag}(c_1^3, -c_1^3, \dots, c_n^3, -c_n^3) & \text{若 } \text{Conv}(\mathcal{O}) \cap (\omega_1 + \Lambda_R) = \mathcal{O} \\ \text{diag}(c_1^3, -c_1^3, \dots, c_n^3, -c_n^3, 0) & \text{其他情形} \end{cases}.$$

无论何种情况, 都有

$$(d\rho(h))^3 = \sum_{j=1}^n c_j^3 d\rho(h_j) \in d\rho(\mathfrak{h}).$$

这蕴含着 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.

- (2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. 令 $\rho^{\mathbb{C}} : G^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{GL}(V)$ 为满足 $G^{\mathbb{C}}$ 条件(1)–(3)的表示. 由构造可得 $\text{Wt } V = \text{Conv}(\mathcal{O}) \cap (\omega_0 + \Lambda_R)$. 利用 $\text{Ind}(\text{Res}(\rho^{\mathbb{C}})) = \rho^{\mathbb{C}}$, 可知 $\rho = \text{Res}(\rho^{\mathbb{C}}) : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 即为所求表示. $\square$

命题 4.4.18. 设 G 为复半单 Lie 群 $G^{\mathbb{C}}$ 的单连通紧或分裂实形式, $\mathcal{O}$ 为 $\omega_1 \in \Lambda$ 的 $\mathcal{W}$ -轨道. 假设 $\mathcal{O}$ 关于原点对称, 满足 $\dim(\mathfrak{h}) = \text{rank}(\mathcal{O}) = |\mathcal{O}|/2 = n$ 且 $\text{Conv}(\mathcal{O}) \cap (\omega_1 + \Lambda_R) \subseteq \mathcal{O} \cup \{0\}$. 则存在唯一的不可约表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 满足:

- (1) $\text{Wt } V = \text{Conv}(\mathcal{O}) \cap (\omega_1 + \Lambda_R)$.
- (2) $\dim(d\rho(\mathfrak{h})) = n$.

$$(3) \widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h}).$$

证明. 设 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为引理 4.4.17 中 G 的不可约表示. 则其满足(1), (2)及 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C} \subseteq d\rho(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}$.

(1) 当 G 为分裂形式时, 对任意 $\lambda \in \Lambda$ 和 $h \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, 有 $\lambda(h) \in \mathbb{R}$. 由式(4-7)可知 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h})$ 是 $d\rho(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}$ 的实子空间. 这蕴含 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.

具体地, 取 $\mathfrak{h}$ 的基 $h_1, \dots, h_n$. 对任意 $X \in S^3\mathfrak{h}$, 有 $\widetilde{d\rho}(X) = \sum_{j=1}^n c_j d\rho(h_j)$ 其中 $c_j \in \mathbb{C}$. 由于 $\widetilde{d\rho}(X)$ 和 $d\rho(h_1), \dots, d\rho(h_n)$ 的分量都是实数, 必有

$$\widetilde{d\rho}(X) = \sum_{j=1}^n \Re(c_j) d\rho(h_j) \in d\rho(\mathfrak{h}),$$

此处 $\Re(z)$ 表示 $z \in \mathbb{C}$ 的实部.

(2) 当 G 为紧形式时, 对任意 $\lambda \in \Lambda$ 和 $h \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, 有 $\lambda(h) \in i\mathbb{R}$. 再次应用4-7, $i\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h})$ 是 $d\rho(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}$ 的实子空间, $\widetilde{d\rho}(X)$ 和 $d\rho(h_1), \dots, d\rho(h_n)$ 的分量都是纯虚数, 同样的有

$$\widetilde{d\rho}(X) = \sum_{j=1}^n \Re(c_j) d\rho(h_j) \in d\rho(\mathfrak{h}).$$

这表明 $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$. □

虽然定理 4.4.13 中的几何条件仅是 Cayley 变换适用性的必要条件, 但对于紧致群该条件亦是充分的.

命题 4.4.19 (刻画 IV). 设 G 为紧半单 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为不可约表示且 $d\rho$ 忠实. 以下条件等价:

- (1) ρ 是 Cayley 表示.
- (2) $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.
- (3) ρ 具有 Cayley 构型.

特别地, 当 G 为紧单 Lie 群时, 上述条件 (1)–(3) 对 G 的所有非平凡不可约表示均等价.

证明. 由于 G 紧致, 可得 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. 进一步地, 当 G 为单 Lie 群时, 其所有非平凡表示均忠实. 根据命题 4.4.6, 条件 (1) 与条件 (2) 的等价性由定理 4.4.9 可得. 因此只需建立条件 (2) 与条件 (3) 的等价性.

若条件 (2) 成立, 则 ρ 为 Cayley 表示, 由定理 4.4.13 可得 (3). 反之, 考虑 G 的万有覆叠 $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$. 此时 $\rho \circ \pi$ 成为 $\tilde{G}$ 的具有 Cayley 构型的表示. 根据命题 4.4.18, 条件 (2) 从而条件 (1) 对 $\rho \circ \pi$ 成立. 应用命题 4.3.4 即得 ρ 为 Cayley 表示. □

我们注意到命题 4.4.19 对任意满足 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ 且 $\mathfrak{g} = \mathrm{Ad}(G)(\mathfrak{h})$ 的半单 Lie 群 G 成立. 若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 或 G 为分裂实形式, 则 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ 恒成立. 然而下述命题表明在这两种情形下不可能满足 $\mathfrak{g} = \mathrm{Ad}(G)(\mathfrak{h})$.

命题 4.4.20. 若 G 为复半单 Lie 群或分裂实形式, 则存在 $x \in \mathfrak{g}$, 使得 $x \notin \text{Ad}(G)(\mathfrak{h})$.

证明. 当 G 为复半单 Lie 群或分裂实形式时, 其 Lie 代数有根空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha} \right).$$

令 $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ (相应地 $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$) 为 G (相应地 $\mathfrak{g}$) 的伴随表示. 对任意 $\alpha \in \Phi$, 选取非零元 $x_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}$.

由于对任意 $\beta \in \Phi$ 有 $\text{ad}(x_{\alpha})(\mathfrak{g}_{\beta}) \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$, 且 $\mathfrak{g}$ 为有限维, 故存在整数 $N \geq 0$ 使得 $\text{ad}(x_{\alpha})^N(\mathfrak{g}_{\beta}) = 0$ 对所有 $\beta \in \Phi$ 成立.

假设 $x_{\alpha} = \text{Ad}(g)(h)$ 对某个 $g \in G$ 和 $h \in \mathfrak{h}$ 成立, 则有

$$0 = \text{ad}(x_{\alpha})^N = \text{ad}(\text{Ad}(g)(h))^N = (\text{Ad}(g) \text{ad}(h) \text{Ad}(g)^{-1})^N = \text{Ad}(g) \text{ad}(h)^N \text{Ad}(g)^{-1}.$$

这将导致 $\text{ad}(h) = 0$. 由于 ad 是单射, 可得 $x_{\alpha} = h = 0$, 这与 x_{α} 的选取矛盾. $\square$

例 4.4.1. 考虑 $G = \text{SL}_2(\mathbb{F})$, $\text{Lie } G = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$,

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

那么 $\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{F}}(h)$, 容易验证 $x, y \notin \text{Ad}(\text{SL}_2(\mathbb{F}))\mathfrak{h}$.

4.4.4 一般 Cayley 表示

在第 4.4.3 节的讨论中, 出于技术上的考虑, 我们限定表示是不可约且忠实的. 对于 Cayley 表示的刻画而言, 这些限制都不是本质的. 本节将讨论如何利用半单 Lie 代数的性质把对可约以及非忠实的表示的处理化归到不可约和忠实表示的情形.

关于可约性, 我们回顾, 有限维表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 有不可约分解

$$\rho = \prod_{j=1}^m \rho_j : G \rightarrow \prod_{j=1}^m \text{GL}(V_j),$$

其中 $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$, 且对每个 $1 \leq j \leq m$, $\rho_j : G \rightarrow \text{GL}(V_j)$ 是不可约表示.

关于忠实性, 我们注意到半单 Lie 代数的在同态下的核与像仍然是半单的.

命题 4.4.21. ^[28] $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ 是 Lie 代数同态, 则 $\mathfrak{g}$ 是半单的当且仅当 $\ker \theta, \text{im } \theta$ 都是半单的.

命题 4.4.22 (刻画 V). 设 $G, V, \rho, \rho_1, \dots, \rho_m$ 如上所述. 下列陈述等价:

- (1) ρ 是 Cayley 表示.
- (2) 对每个 $1 \leq j \leq m$, ρ_j 是 Cayley 表示.

- (3) 存在半单 Lie 群 G' 和表示 $\rho' : G' \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, 使得 $d\rho'$ 忠实, $d\rho'(\mathfrak{g}') = d\rho(\mathfrak{g})$, 且 ρ' 是 Cayley 表示.
- (4) 存在半单 Lie 群 G' 和忠实表示 $\rho' : G' \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, 使得 $d\rho'(\mathfrak{g}') = d\rho(\mathfrak{g})$ 且 ρ' 是 Cayley 表示.

证明. 根据定理 4.3.9, ρ 是 Cayley 表示当且仅当 $\mathrm{im} d\rho$ 具有幂扩张性质. 蕴含关系 (3) $\implies$ (1) 是显然的.

若 (1) 成立, 取 G' 为满足 $\mathfrak{g}' = \mathrm{im} d\rho \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 的单连通 Lie 群, 并令 $\rho' : G' \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为对应的表示. 那么 ρ' 是 Cayley 表示, 从而证得 (1) $\implies$ (3).

由于 $\rho = \bigoplus_{j=1}^m \rho_j$, 可得 $d\rho(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{j=1}^m d\rho_j(\mathfrak{g})$. 因此 $\mathrm{im} d\rho$ 具有幂扩张性质当且仅当对每个 $1 \leq j \leq m$, $d\rho_j(\mathfrak{g})$ 具有幂扩张性质, 这等价于 Cayley 变换对 ρ_j 的适用性 (再次应用定理 4.3.9). 由此证得 (1) 与 (2) 的等价性.

蕴含关系 (4) $\implies$ (3) 是平凡的. 设 G_1 和 $\theta : G_1 \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 满足 (3) 的条件. 由于 $d\theta$ 忠实, $\ker(\theta)$ 是 G_1 的离散正规子群. 令 $G' := G_1/\ker(\theta)$, 定义 $\rho' : G' \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为 $\rho'([g_1]) := \theta(g_1)$, 其中 $[g_1]$ 表示 $g_1 \in G_1$ 在 G' 中的等价类. 易见 ρ' 良定且忠实, 同时 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_1$ 且 $d\rho' = d\theta$, 故 ρ' 满足 (4). $\square$

根据命题 4.4.22, Cayley 变换对 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 的适用性可归结于其对分解表示 $\rho' = \bigoplus_{j=1}^m \rho'_j$ 的分量 $\rho'_j : G' \rightarrow \mathrm{GL}(V_j)$ 的适用性, 其中 $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$ 且每个 ρ'_j 是不可约忠实表示.

进一步观察可得: $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$ 当且仅当对每个 $1 \leq j \leq m$ 有 $\widetilde{d\rho_j}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho_j(\mathfrak{h})$. 结合定理 4.4.13 和命题 4.4.19, 我们得到下述命题.

命题 4.4.23 (刻画 VI). 设 $G, G', V, V_1, \dots, V_m$ 及 $\rho, \rho', \rho'_1, \dots, \rho'_m$ 如上所述, 则成立:

- (1) 若 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ 且 ρ 是 Cayley 表示, 则对每个 $1 \leq j \leq m$, ρ'_j 具有 Cayley 构型.
- (2) 对紧半单 Lie 群 G , 下列等价:
- (a) ρ 是 Cayley 表示.
 - (b) $\widetilde{d\rho}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.
 - (c) 对每个 $1 \leq j \leq m$, ρ'_j 具有 Cayley 构型.

4.4.5 验证 Cartan 子代数判据的符号算法

4.4.5.1 基本事实

在本小节中, 我们建立一些关于 Lie 代数及其表示的基本事实. 这些事实将有利于描述和讨论下一小节提出的算法.

引理 4.4.24. 设 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 是半单 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ 的紧形式, $\mathfrak{I}_1$ 是 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的理想. 则存在 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的理想 $\mathfrak{I}_2$, 使得作为 Lie 代数有 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{I}_2$. 事实上, 可取 $\mathfrak{I}_2$ 为关于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 B ($B(x, y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y))$) 的正交补 $\mathfrak{I}_1^\perp$.

证明. 因 $\mathfrak{g}_c$ 是 $\mathfrak{g}$ 的紧形式, 由命题 4.2.3 知 $B|_{\mathfrak{g}_c}$ 负定. 对理想 $\mathfrak{l}_1$, 可将向量空间分解为 $L = \mathfrak{l}_1 \oplus_{\mathbb{R}} \mathfrak{l}_2$. 只需证 $\mathfrak{l}_2$ 是理想. 对任意 $x \in \mathfrak{l}_2, y \in \mathfrak{g}_c, z \in \mathfrak{l}_1$:

$$B(z, [y, x]) = B([z, y], x) = 0 \Rightarrow [\mathfrak{g}_c, \mathfrak{l}_2] \subseteq \mathfrak{l}_1^\perp =: \mathfrak{l}_2,$$

故 $\mathfrak{l}_2$ 是 L 的理想, 从而 $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$ 作为 Lie 代数成立. $\square$

引理 4.4.25 (紧形式的核与像仍是紧形式). 设 $\mathfrak{g}_c$ 是半单 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_c \otimes \mathbb{C}$ 的紧形式, $\mathfrak{l}_1$ 是 $\mathfrak{g}_c$ 的理想. 则 $\mathfrak{l}_1$ 作为实 Lie 代数仍为半单, 且是 $\mathfrak{l}_1^\mathbb{C}$ 的紧形式.

证明. 取 $\mathfrak{l}_2 := \mathfrak{l}_1^\perp$ 为理想使得 $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2$. 若存在 $\mathfrak{l}_1$ 的交换理想 $I \subseteq \mathfrak{l}_1$ 满足 $[I, I] = 0$ 和 $[\mathfrak{l}_1, I] \subseteq I$, 则

$$[\mathfrak{g}_c, I] = [\mathfrak{l}_1, I] + [\mathfrak{l}_2, I] \subseteq I + 0 = I,$$

这将导致 I 成为 $\mathfrak{g}_c$ 的交换理想, 与 $\mathfrak{g}_c$ 的半单性矛盾. 因此 $\mathfrak{l}_1$ 和 $\mathfrak{l}_2$ 均为半单 Lie 代数, 其 Cartan 子代数分别为 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$.

考虑复化分解 $L = \mathfrak{g}_c^\mathbb{C} = \mathfrak{l}_1^\mathbb{C} \oplus \mathfrak{l}_2^\mathbb{C}$ 的伴随表示 ad , 有:

- (1) $\Lambda(\mathfrak{g}) = \Lambda(\mathfrak{l}_1^\mathbb{C}) \oplus \Lambda(\mathfrak{l}_2^\mathbb{C})$,
- (2) $B = B|_{\mathfrak{l}_1^\mathbb{C}} \oplus B|_{\mathfrak{l}_2^\mathbb{C}}$,
- (3) $\mathfrak{h}_c = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$.

由于 B 在 $\mathfrak{h}_c$ 上负定, 特别地 $B|_{\mathfrak{l}_2^\mathbb{C}}$ 在 $\mathfrak{h}_2$ 上负定, 根据命题 4.2.3 知 $\mathfrak{l}_2$ 是 $\mathfrak{l}_2^\mathbb{C}$ 的紧形式. $\square$

注 4.4.1. 因此推论 4.4.23 中的等价条件可转化为对 $\bar{\theta}$ 的验证, 引理 4.4.25 确保传递到 $d\rho'$ 的表示是紧实形式半单 Lie 代数的一个忠实表示.

4.4.5.2 算法

引理 4.4.12 的证明提示可以使用 Gauss 消元技术来判定 Cartan 子代数判据 $\tilde{\theta}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq \theta(\mathfrak{h})$ 是否成立. 这启发我们提出如下算法 4.1.

算法 4.1 的图解如下图 4-1.

推论 4.4.26. 设 G 为紧半单 Lie 群, Lie 代数 $\mathfrak{g}$, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为其不可约表示, 则 Cayley 变换适用于 ρ 当且仅当算法 4.1 对输入 $(\mathfrak{g}, d\rho)$ 返回 *True*.

证明. 引理 4.4.12 的证明表明对于满足 Cartan 子代数判据的表示, 算法 4.1 返回 *True*.

当算法 4.1 返回 *True* 时, 直接计算可知 $\theta = d\rho$ 满足 Cartan 子代数判据. $\square$

算法 4.1 关于 $\tilde{\theta}(S^3\mathfrak{h})$ 的 Gauss 消元测试**输入:** $(\mathfrak{g}, \theta)$

- $\mathfrak{g}$: 紧形式半单 Lie 代数
- $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$: 不可约表示

输出: 布尔值 Ans : 当 $\tilde{\theta}(S^3\mathfrak{h}) \subseteq \theta(\mathfrak{h})$ 时 $Ans = \text{True}$, 否则 $Ans = \text{False}$.

```

1:  $(h_1, \dots, h_n) \leftarrow \text{Basis}(\mathfrak{h});$  ▷ 固定 Cartan 子代数  $\mathfrak{h}$  的基
2: for 每个基向量  $h_i \in \mathfrak{h}$  do
3:    $H_i \leftarrow \theta(h_i);$  ▷ 计算  $h_i$  的像
4: end for
5:  $(v_1, \dots, v_n) \leftarrow \text{SimultaneousDiagonalization}(H_1, \dots, H_n);$  ▷ 同时对角化
    $H_i \leftarrow P \text{diag}(v_i) P^{-1}$ 
6:  $A \leftarrow -i(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{C}}(V) \times n};$  ▷ 矩阵  $A$  记录所有  $H_i$  同时对角化的特征值
7:  $(B, G) \leftarrow \text{GaussElimination}(A);$  ▷ 在实数域上执行 Gauss 消元:  $A = BG$ 
8: if  $B \notin \{0, \pm 1\}^{\dim_{\mathbb{C}}(V) \times n}$  then
9:   return  $Ans \leftarrow \text{False};$ 
10: end if
11: for  $B$  的列向量  $B_i$  do
12:    $n_i \leftarrow \|B_i\|_0;$  ▷ 统计  $B_i$  中非零元素个数
13:   if  $n_i > 1$  then
14:     return  $Ans \leftarrow \text{False};$ 
15:   end if
16: end for
17: return  $Ans \leftarrow \text{True};$ 

```

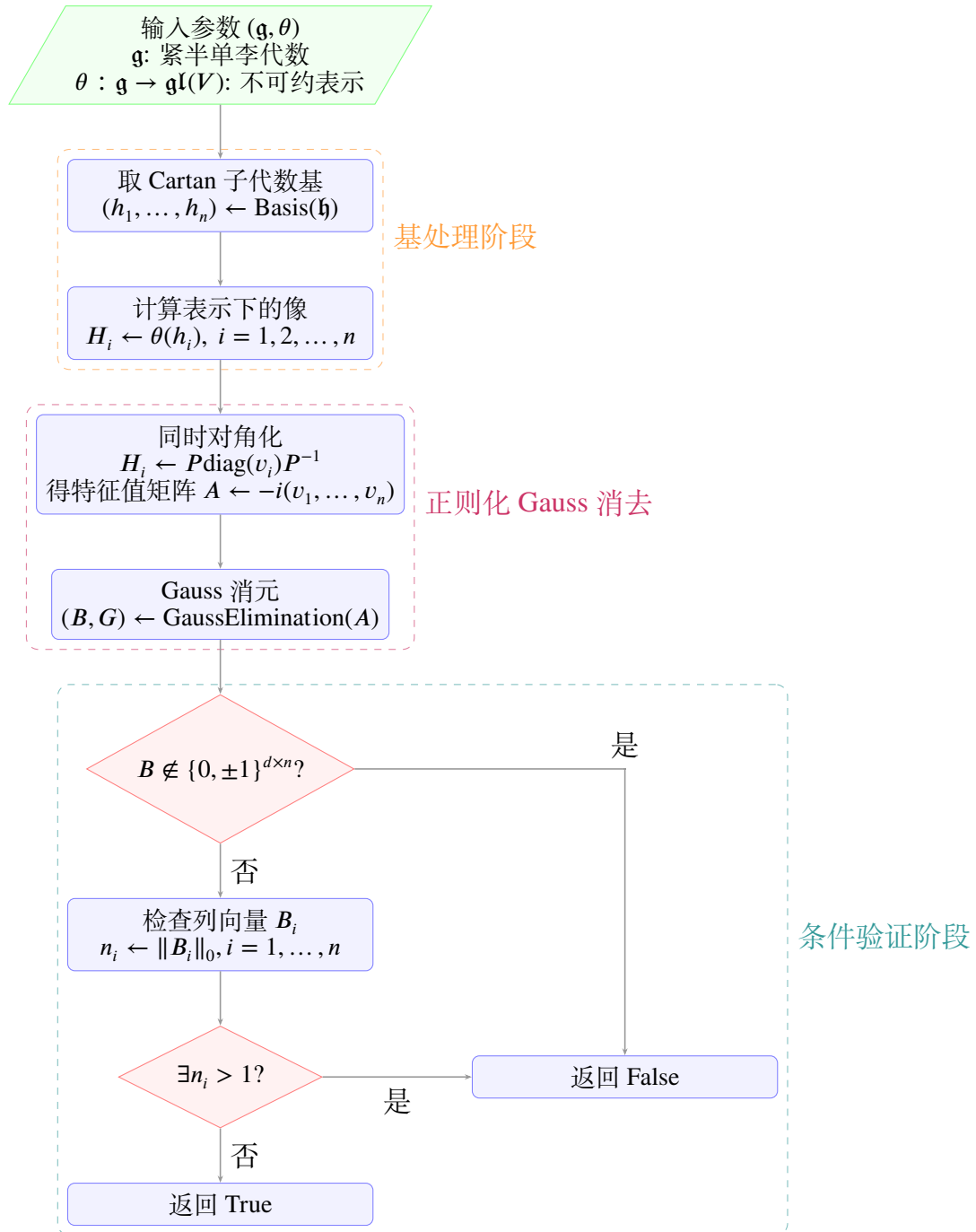


图 4-1 Cartan 子代数判断判定算法 4.1

4.5 经典单 Lie 群上的 Cayley 变换

4.5.1 具有 Cayley 构型的表示

本节考虑 Cayley 变换在经典单 Lie 群 G 的表示 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 中的适用性. 注意到 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是单 Lie 代数, 故微分表示 $d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是忠实的, 除非 $\mathrm{im} d\rho = \{0\}$. 后者情形表明 ρ 为平凡表示. 下文中假设 ρ 非平凡, 从而 $d\rho$ 为忠实表示. 在本节中我们首先寻找具有 Cayley 构型的表示.

引理 4.5.1. 设 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的单 Lie 代数, 则其伴随表示 $\mathfrak{g} \overset{\mathrm{ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{g}$ 不可约. 如果伴随表示具备 Cayley 构型, 则

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) = 3 \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}). \quad (4-10)$$

证明. 考虑伴随表示 $\mathfrak{g} \overset{\mathrm{ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{g}$, 如果 $\mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子表示, 则 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\mathfrak{l} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{l}] = \mathfrak{l}$, 即 $\mathfrak{l}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 由于 $\mathfrak{g}$ 的单性, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, 即伴随表示不可约.

根据 Cayley 构型的定义 4.4.1.

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) - \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) = |\mathcal{O}| = |\Phi| = 2 \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) \implies \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) = 3 \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}). \quad \square$$

作为参考, 表 4-3^[28] 中记录了每种单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的根系, 权格数据. 表中 $\mathfrak{h}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, Λ 表示权格, Φ^+ 是正根系集, Δ^+ 是单正根系集, $C := \{\sum_{j=1}^n a_j L_j : a_j \geq 0\}$ 是基本 Weyl 腔, $\mathcal{W}$ 是 Weyl 群, $\delta := \sum_{j=1}^n L_j$. 在表的最后一行记录了每种单 Lie 代数的标准表示 V_{std} 以及它们的权.

表 4-3 经典单 Lie 代数的根系资料

	$A_n (\mathfrak{sl}_{n+1}, n \geq 1)$	$B_n (\mathfrak{so}_{2n+1}, n \geq 2)$	$C_n (\mathfrak{sp}_{2n}, n \geq 3)$	$D_n (\mathfrak{so}_{2n}, n \geq 4)$
$\dim \mathfrak{h}$	n	n	n	n
Λ	$\mathbb{Z}\{L_j\}_{j=1}^{n+1} / \left(\sum_{j=1}^{n+1} L_j = 0\right)$	$\mathbb{Z}\{\delta, L_j\}_{j=1}^n$	$\mathbb{Z}\{L_j\}_{j=1}^n$	$\mathbb{Z}\{\delta, L_j\}_{j=1}^n$
Φ^+	$L_j - L_k, j < k$	$L_i, L_j \pm L_k, j < k$	$2L_i, L_j \pm L_k, j < k$	$L_j \pm L_k, j < k$
Δ^+	$L_j - L_{j+1}$	$L_n, L_j - L_{j+1}$	$2L_n, L_j - L_{j+1}$	$L_{n-1} + L_n, L_j - L_{j+1}$
C	$a_j \geq a_{j+1}, a_{n+1} = 0$	$a_j \geq a_{j+1} \geq 0$	$a_j \geq a_{j+1} \geq 0$	$a_1 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n $
$\mathcal{W}$	$\mathfrak{S}_{n+1}$	$\mathcal{W}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \simeq \mathfrak{S}_n$	$\mathcal{W}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \simeq \mathfrak{S}_n$	$\mathcal{W}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1} \simeq \mathfrak{S}_n$
V_{std}	$\mathbb{C}^{n+1}$ (weights: L_j)	$\mathbb{C}^{2n+1}$ (weights: $0, \pm L_j$)	$\mathbb{C}^{2n}$ (weights: $\pm L_j$)	$\mathbb{C}^{2n}$ (weights: $\pm L_j$)

下面针对每一种经典单 Lie 代数寻找具有 Cayley 构型的表示.

4.5.1.1 A_n 型, $\mathfrak{sl}_{n+1}$

$\mathfrak{sl}_{n+1}$ 的 Weyl 群为 $\mathfrak{S}_n$, 群作用 $\mathcal{W} \curvearrowright \Lambda$ 就是置换 $\{L_j\}_{j=1}^m$. 称连通 Lie 群 G 为 A_n 型如果 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_{n+1}$.

引理 4.5.2. 设 G 为 A_n 型单 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是具有 Cayley 构型的表示, 且 $0 \in \mathrm{Wt} V$. 则 $d\rho$ 同构于伴随表示 ad 且 $n = 1$.

证明. 根据定义, 集合 $\mathrm{Wt} V = \mathcal{O} \sqcup \{0\}$, 其中 $\mathcal{O} := \mathcal{W}\omega_1 = \{\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_n\}$ 的秩为 n , 且 ω_1 是 V 的最高权. 由于 $\mathrm{Wt} V = (\omega_1 + \Lambda_R) \cap \mathrm{Conv}(\mathcal{O})$, 必有 $-\omega_1 \in \Lambda_R$, 从而 $\omega_1 \in \mathbb{N}\Delta^+$. 注意到 $\mathcal{O}$ 是最高权 ω_1 的 $\mathcal{W}$ -轨道, 因此 $\mathcal{O}$ 中元素属于不同的 Weyl 腔. 这表明 V 的权中仅有 0 与 ω_1 落在基本 Weyl 腔 C 内, 故可推得 $\omega_1 \in \Delta^+$. 而 $\mathcal{W}$ 在 Φ 上可迁地作用, 由此得到 $\mathcal{O} = \Phi$. 利用式 (4-10).

$$\dim(\mathfrak{g}) = (n+1)^2 - 1 = 3 \dim(\mathfrak{h}) = 3n \implies n = 1. \quad \square$$

引理 4.5.3. 设 G 为 A_1 型单 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是具有 Cayley 构型的表示, 则 $d\rho$ 必同构标准表示或伴随表示.

证明. 取 $G \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 的标准表示 $\mathbb{C}^2$, 则 G 的任意不可约表示均同构于 $S^d \mathbb{C}^2$ (其中 d 为正整数). 由于 $S^d \mathbb{C}^2$ 的权集为 $\{d-2k\}_{k=0}^d$, 可直接验证: $S^d \mathbb{C}^2$ 具有 Cayley 构型当且仅当 $d = 1$ (对应标准表示) 或 $d = 2$ (对应伴随表示). $\square$

引理 4.5.4. 若 G 为 A_2 型复单 Lie 群, 则 G 不存在具备 Cayley 构型的表示.

证明. 由表 4-3 知 $\dim(\mathfrak{h}) = 2$ 且 $\mathcal{W} = \mathfrak{S}_3$. 因任意 $\mathcal{W}$ -轨道 $\mathcal{O}$ 围成三角形或六边形, 基数需整除 3, 而 $2 \dim(\mathfrak{h}) = 4$ 非 3 的因子, 故不存在基数 4 的轨道. 由此可知具备 Cayley 构型的表示不存在. $\square$

引理 4.5.5. 设 $\mathfrak{g}$ 为 A_n 型复单 Lie 代数且 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是带 Cayley 构型的表示, 则 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 必为下列情形之一:

- (1) $n = 1$ 且 V 为标准表示 V_{std} .
- (2) $n = 1$ 且 V 为伴随表示 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq S^2 V_{\mathrm{std}}$.
- (3) $n = 3$ 且 $V = \bigwedge^2 V_{\mathrm{std}}$.

证明. (1) 中的表示权集为 $\mathrm{Wt} \mathbb{C}^2 = \mathcal{O}_{L_1} = \{L_1, -L_1\}$; (2) 中的表示权集为 $\mathrm{Wt} \mathfrak{sl}_2 = \{2L_1, 0, 2L_2\}$, (3) 中的表示权集为 $\mathrm{Wt} \bigwedge^2 \mathbb{C}^4 = \{L_p + L_q : p \neq q\}$, 均具备 Cayley 构型.

由引理 4.5.2–4.5.4, 可设 V 的权中不含 0 且 $n \geq 3$. 令 ω_1 为 V 的最高权, 可将其表为 $\omega_1 = \sum_{j=1}^n a_j L_j$ (其中 $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ 为整数). 取 $\sigma \in \mathcal{W}$ 为垂直于超平面 $L_1 - L_{n+1}$ 的反射, 则 σ 交换 L_1 与 L_{n+1} 并固定 $L_2, \dots, L_n$. 因此有

$$\sigma(\omega_1) = \sum_{j=2}^n a_j L_j + a_1 L_{n+1}, \quad \sigma(\omega_1) - \omega_1 = a_1 (L_{n+1} - L_1).$$

由于 $L_{n+1} - L_1$ 是根且 ω_1 与 $\sigma(\omega_1)$ 均为 V 的权, 则 $\omega_1 + k(L_{n+1} - L_1)$ 对 $0 \leq k \leq a_1$ 也是 V 的权. 根据 Cayley 构型表示的定义, 必有 $a_1 = 1$. 因此存在正整数 $k \leq n$

使得 $\omega_1 = \sum_{j=1}^k L_j$, 进而

$$\mathcal{O} = \mathcal{W}\omega_1 = \left\{ \sum_{j=1}^k \omega_{s_j} : 1 \leq s_j \leq n+1, s_j \neq s_{j'}, 1 \leq j \neq j' \leq k \right\}.$$

根据 Cayley 构型的中心对称性, $-\omega_1 \in \mathcal{O} \implies k = \frac{1}{2}(n+1)$, 从而

$$\binom{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)} = |\mathcal{O}| = 2 \dim(\mathfrak{h}) = 2n.$$

因 $n \geq 3$, 仅当 $(n, k) = (3, 2)$ 时等式成立. 此时 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ 且 $\omega_1 = L_1 + L_2$, 故 $V = \bigwedge^2 \mathbb{C}^4$. $\square$

注 4.5.1. 根据 $\mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{so}_3$, 比较权图可知, (2) 的表示来自于 $\mathfrak{so}_3$ 的标准表示. 同样, 根据 $\mathfrak{sl}_4 \simeq \mathfrak{so}_6$, 比较权图可知, (3) 的表示来自于 $\mathfrak{so}_6$ 的标准表示. 从而这些表示都可以看做是例 4.1.1 的特殊情形. 特别地, 在 $d\rho \circ C$ 的整个定义域上有 $d\rho \circ C(x) \in \text{im } \rho$.

例 4.5.1 ($\mathfrak{sl}_2, V_{\text{std}}$ 的权图). 引理 4.5.5 中的表示(1)的权图如图 4-2 所示.

- $\Lambda = \mathbb{Z} L_0$: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的权格.
- $\Lambda_R = 2\mathbb{Z} L_0$: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的根系格.
- $\mathcal{W} = \{\pm 1\}$: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的 Weyl 群.
- $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 的 Cartan 子代数.

$$\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{C}}(h), \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{W} = \{\pm 1\} \curvearrowright \Lambda$, 其作用方式为:

$$(-1)(L_0) = -L_0.$$



图 4-2 $\mathfrak{sl}_2, V_{\text{std}}$ 的权图

注: 权格 Λ 为数轴上的整点, 根系格 Λ_R 为数轴上的偶数点 (黑点和原点), V_{std} 包含的权用加粗的蓝点表示.

4.5.1.2 B_n 型, $\mathfrak{so}_{2n+1}$

$\mathfrak{so}_{2n+1}$ 的 Weyl 群满足正合列

$$1 \rightarrow (\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^n \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1,$$

其在 Λ 上的群作用确定如下: $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^n$ 部分反转 L_i 的符号; $\mathfrak{S}_n$ 部分置换这些 L_i .

引理 4.5.6. 设 V 是 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ ($n \geq 3$) 的不可约表示. 假设 $0 \in \text{Wt}(V)$ 且其权图符合特定构型, 则 $V \simeq V_{\text{std}}$ (同构于标准表示).

证明. 设 ω_0 为 V 的最高权, 其在 Weyl 群 $\mathcal{W}$ 作用下的轨道为 $\mathcal{O} = \mathcal{W}\omega_0$. 由于所有非零权都是 V 权图的顶点, 则有

$$0 \in \text{Wt}(V) = \Lambda_R \cap \text{Conv}(\mathcal{O}) \Rightarrow \omega_0 \in \Phi^+ \cap C = \{L_1, L_1 + L_2\}.$$

若 $\omega_0 = L_1$, 则 V 的最高权与 V_0 相同, 因此 $V \simeq V_{\text{std}}$.

若 $\omega_0 = L_1 + L_2$, 则 V 的最高权与伴随表示 $\mathfrak{g} \overset{\text{ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{g}$ 相同, 因此 $V \simeq \mathfrak{g}$ 作为伴随表示. 根据式 (4-10):

$$\dim \mathfrak{g} = n(2n+1) = 3 \dim \mathfrak{h} = 3n \implies n = 1.$$

这与 $n \geq 3$ 矛盾. □

引理 4.5.7. 对 B_n 型 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ ($n \geq 3$) 的不可约表示 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 如果 θ 具备 Cayley 构型, 那么 $V \simeq V_{\text{std}}$ 即标准表示.

证明. 引理 4.5.6 论证了 $0 \in \text{Wt } V$ 的情形. 现考虑满足 $0 \notin \text{Wt } V$ 的不可约表示 V . 设其最高权为 $\omega_0 \in C \cap \Lambda$, $\omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i L_i$, 其中 $b_i \in \mathbb{N}_0$, 满足 $b_i \geq b_j$ 对 $i < j$ 成立, 且所有 b_i 同为偶数或同为奇数.

假设 $b_1 \geq 1$, 取 $\sigma \in \mathcal{W}$ 为满足 $\sigma(L_1) = -L_1$ 且 $\sigma(L_k) = L_k$ ($k \neq 1$) 的 Weyl 群元素. 则 $\sigma\omega_0 \in \text{Wt}(V)$ 是权图的顶点. 由

$$\omega_0 - \sigma\omega_0 = b_1 L_1,$$

注意到 $L_1 \in \Phi^+$, 根据半单 Lie 代数不可约表示的结构定理, 权图中必须包含整条权链:

$$\omega_s := \sigma\omega_0 + s(L_1) \in \text{Wt}(V), \quad s = 0, 1, \dots, b_1.$$

这意味着这些 ω_s 都是权图的顶点. 该情形仅当 $b_1 = 1$ 时可能成立, 此时有 $\omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i$. 对应的 Weyl 群轨道为

$$\mathcal{O} := \mathcal{W}\omega_0 = \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i L_i : c_i = \pm 1 \right\} = \text{Wt}(V).$$

由每个顶点的重数均为 1 可得:

$$|\mathcal{O}| = 2^n = 2n \Rightarrow n = 1 \text{ 或 } 2,$$

这与 $n \geq 3$ 的条件矛盾. □

注 4.5.2. $n = 2, \omega_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i$ 对应的表示 $\mathbb{S}$ 即旋量表示, 在 $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$ 的同构下, $\mathbb{S}$ 等同于 $\mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$ 的标准表示.

4.5.1.3 C_n 型, $\mathfrak{sp}_{2n}$

$\mathfrak{sp}_{2n}$ 的 Weyl 群 $\mathcal{W}$ 满足正合列

$$1 \rightarrow (\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^n \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1,$$

其在 Λ 上的群作用确定如下: $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^n$ 部分改变 L_i 的正负号, 而 $\mathfrak{S}_n$ 部分置换这些 L_i .

命题 4.5.8. 对 $n = 2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$, 存在一个 5 维不可约表示 W , 其权图具有 Cayley 构型.

证明. 考虑 $V = \bigwedge^2 V_{\text{std}}$, 其最高权为 $\omega_1 = L_1 + L_2$, 权集为 $\text{Wt}(V) = \{0, \pm L_1 \pm L_2\}$. V 是可约的, 其 $\mathfrak{g}$ -模不可约分解为

$$V = W \oplus \mathbb{C},$$

其中 W 是 5 维不可约表示, 具有相同的权集 $\text{Wt}(V') = \text{Wt}(V) = \{0, \pm L_1 \pm L_2\}$ 和最高权 $\omega_1 = L_1 + L_2$. 容易验证 W 的权图具备 Cayley 构型. $\square$

注 4.5.3. 表示 W 同构于 $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$ 的标准表示, 因此由双线性积诱导. 对一般的 $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$, $V_{\text{std}} = \mathbb{C}^{2n}$ 由双线性积诱导. 这些表示具备 Cayley 构型. 这些表示都可以看做是例 4.1.1 的特殊情形. 特别地, 在 $d\rho \circ C$ 的整个定义域上有 $d\rho \circ C(x) \in \text{im } \rho$.

引理 4.5.9. V 是 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$) 的不可约表示. 假设 $0 \in \text{Wt}(V)$ 且权图具备 Cayley 构型, 则 $n = 2$ 且 $V \simeq W$.

证明. 设 ω_0 为 V 的最高权, 其在 Weyl 群 $\mathcal{W}$ 作用下的轨道为 $O = \mathcal{W}\omega_0$. 由于所有非零权都是 V 权图的顶点, 故有

$$0 \in \text{Wt}(V) = \Lambda_R \cap \text{Conv}(O) \implies \omega_0 \in \Phi^+ \cap C = \{2L_1, L_1 + L_2\}.$$

若 $\omega_0 = 2L_1$, 则 V 的最高权与 L 相同, 因此 $V \simeq L$ 作为伴随表示. 从而根据式 (4-10):

$$\dim(\mathfrak{g}) = n(2n + 1) = 3 \dim(\mathfrak{h}) = 3n \implies n = 1.$$

这已在引理 4.5.5 讨论过.

若 $\omega_0 = L_1 + L_2$, 则轨道满足

$$O = \mathcal{W}\omega_0 = \{\pm L_i \pm L_j : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

根据 Cayley 构型要求

$$|\mathcal{O}| = 4 \binom{n}{2} = 2n \implies n = 2,$$

此即命题 4.5.8 给出的表示. $\square$

引理 4.5.10. 对 C_n 型 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) (n \geq 2)$ 的不可约表示 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 如果 θ 具备 Cayley 构型, 则必以下情形之一:

- (1) $n = 2, V \simeq W$, 其中 W 是命题 4.5.8 给出的 5 维不可约表示.
- (2) $V \simeq V_{\text{std}}$, 标准表示.

证明. 权集包含 0 的情形已在引理 4.5.9 中讨论. 现考察 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示 V 满足 $0 \notin \text{Wt}(V)$. 设其最高权为 $\omega_0 \in C$, 可表为

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n a_i L_i, \quad a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0.$$

若 $a_1 \geq 1$, 取 $\sigma \in \mathcal{W}$ 满足 $L_1 \mapsto -L_1$ 且 $L_k \mapsto L_k (k \neq 1)$. 则 $\sigma\omega_0 \in \text{Wt}(V)$ 是权图的顶点, 且满足 $\omega_0 - \sigma\omega_0 = 2a_1 L_1$.

注意到 $2L_1 \in \Phi^+$, 半单 Lie 代数不可约表示的结构要求权集包含整条权链:

$$\omega_s := \sigma\omega_0 + s(2L_1) \in \text{Wt}(V), \quad s = 0, 1, \dots, a_1.$$

这些 ω_s 必须均为权图顶点. 此条件仅在 $a_1 = 1$ 时成立, 此时存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $\omega_0 = \sum_{i=1}^k L_i$, 从而

$$\text{Wt}(V) = \mathcal{O} = \left\{ \sum_{s=1}^k \pm L_{i_s} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \right\}.$$

若 $2 \mid k$, 则 $0 \in \text{Conv}(\mathcal{O}) \cap \Lambda_R = \text{Wt}(V)$, 与 $0 \notin \text{Wt}(V)$ 矛盾. 故 $2 \nmid k$. 进一步由各顶点重数均为 1 可得约束条件:

$$|\mathcal{O}| = 2^k \binom{n}{k} = 2n \implies \binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{2^{k-1}} \in \mathbb{N}.$$

唯一可能解为 $k = 1, \omega_0 = L_1$, 对应标准表示 V_{std} . □

4.5.1.4 D_n 型, $\mathfrak{so}_{2n}$

$\mathfrak{so}_{2n}$ 的 Weyl 群满足正合列

$$1 \rightarrow (\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^{n-1} \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1.$$

其在权格 Λ 上的群作用定义为: $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}))^{n-1}$ 部分通过保持定向的方式反转 L_i 的符号, 即在偶数个坐标轴上作用 -1 ; $\mathfrak{S}_n$ 部分置换这些 L_i .

引理 4.5.11. 对 Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}), n \geq 4$ 的不可约表示 V , 若 V 的权图具备 Cayley 构型, 则必有 $0 \notin \text{Wt}(V)$.

证明. 设 ω_0 为 V 的最高权, 其在 Weyl 群 $\mathcal{W}$ 作用下的轨道为 $O = \mathcal{W}\omega_0$. 由于所有非零权都是 V 权图的顶点, 则有

$$0 \in \text{Wt}(V) = \Lambda_R \cap \text{Conv}(\mathcal{O}) \Rightarrow \omega_1 \in \Phi^+ \cap C = \{L_1 + L_2\}. \quad (4-11)$$

因此 $\omega_1 = L_1 + L_2$, 此时 V 的最高权与 $\mathfrak{g}$ 相同, 故 $V \simeq \mathfrak{g}$ 作为伴随表示. 从而根据式 (4-10):

$$\dim(\mathfrak{so}_{2n}) = n(2n - 1) = 3 \dim \mathfrak{h} = 3n \Rightarrow n = 2.$$

这与 $n \geq 4$ 矛盾. □

定义 4.5.1. 对 Lie 代数 $\mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$, 设 $n = \left\lfloor \frac{1}{2}m \right\rfloor$. 若不可约表示 V 的最高权 ω_1 形如 $\omega_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i L_i$, $\forall i, 2 \nmid b_i$ 则称 V 为 $\mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$ 的旋量表示. 该表示对应于特殊正交群 $\text{SO}_m(\mathbb{C})$ 的万有单连通形式 $\text{Spin}_m(\mathbb{C})$ 的不可约表示.

称 $\mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$ 的表示 $\theta : \mathfrak{so}_m(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 为正交表示, 如果 θ 可以由正交群的表示诱导, 即 $\exists \rho : \text{SO}_m(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(V)$, 使得 $d\rho = \theta$. 不可约表示 V 是正交表示当且仅当其最高权有如下形式 $\omega_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{1}{2}m \right\rfloor} b_i L_i$, $\forall i, 2 \nmid b_i$. 换言之, 旋量表示不能由正交群的表示诱导.

引理 4.5.12. 对于 Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ ($n \geq 4$), 其具有 Cayley 构型的不可约正交表示同构于标准表示 V_{std} .

证明. 根据表 4-3, 容易验证标准表示 V_{std} 的权图具备 Cayley 构型.

根据引理 4.5.11 只要考虑满足 $0 \notin \text{Wt}(V)$ 的不可约表示 V . 设其最高权为 $\omega_1 \in C \cap \Lambda$, $\omega_1 = \sum_{i=1}^n a_i L_i$, 其中 $a_i \in \mathbb{Z}$, 满足 $1 \leq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq |a_n| \geq 0$.

对任意 $j > 1$, 取 $\sigma_j \in \mathcal{W}$ 为满足 $\sigma_j(L_1) = L_j$, $\sigma_j(L_j) = L_1$ 且 $\sigma_j(L_k) = L_k$ ($k \neq 1, j$) 的 Weyl 群元素. 则 $\sigma_j \omega_1 \in \text{Wt}(V)$ 是权图的顶点. 由

$$\omega_1 - \sigma_j \omega_1 = (a_1 - a_j)(L_1 - L_j),$$

注意到 $L_1 - L_j \in \Phi^+$, 根据半单 Lie 代数不可约表示的结构定理, 权图中必须包含整条权链:

$$\omega_s := \sigma_j \omega_1 + s(L_1 - L_j) \in \text{Wt}(V), \quad s = 0, 1, \dots, a_1 - a_j.$$

这意味着这些 ω_s 都是权图的顶点. 该情形仅当 $a_1 - a_j \leq 1$ 时可能成立.

类似地, 取 $\tau_j \in \mathcal{W}$ 为满足 $\tau_j(L_1) = -L_j$, $\tau_j(L_j) = -L_1$ 且 $\tau_j(L_k) = L_k$ ($k \neq 1, j$) 的 Weyl 群元素. 则 $\tau_j \omega_1 \in \text{Wt}(V)$ 是权图的顶点. 由

$$\omega_1 - \tau_j \omega_1 = (a_1 + a_j)(L_1 + L_j),$$

以及 $L_1 + L_j \in \Phi^+$, 同理可得权链条件:

$$\omega_s := \tau_j \omega_1 + s(L_1 + L_j) \in \text{Wt}(V), \quad s = 0, 1, \dots, a_1 + a_j.$$

这要求 $a_1 + a_j \leq 1$ 才能成立.

综合上述约束条件, $0 \leq |a_j| \leq 1 - a_1 \leq 0$ 从而 $a_1 = 1, a_j = 0 \quad \forall 1 < j \leq n$. 因此 $\omega_1 = L_1$, 对应 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的标准表示. $\square$

定义 4.5.2. [28] 对 Lie 代数 $\mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$, 设 $n = \left\lfloor \frac{1}{2}m \right\rfloor$, 定义:

$$\omega_+ := \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n L_i \right) \in C \cap \Lambda,$$

$$\omega_- := \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n L_i \right) - L_n \in C \cap \Lambda.$$

以 ω_+, ω_- 为最高权的旋量表示 S^+, S^- (分别) 称为 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的半旋量表示.

引理 4.5.13. 对于 Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ ($n \geq 4$) 的不可约旋量表示 $\theta : \mathfrak{so}_{2n} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 如果起具备 Cayley 构型, 那么 $n = 4$ 且 V 同构于半旋量表示 S^+ 或者 S^- .

证明. 设 V 是 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的不可约旋量表示且其权图符合 Cayley 构型. 取 V 的最高权 $\omega_1 \in C \cap \Lambda, \omega_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i L_i, \quad b_i \in \mathbb{Z}$, 其中满足 $1 \leq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_{n-1} \geq |b_n| \geq 0$ 且所有 b_i 均为奇数.

对任意 $j > 1$, 取 $\sigma_j \in \mathcal{W}$ 为满足 $\sigma_j(L_1) = L_j, \sigma_j(L_j) = L_1$ 且 $\sigma_j(L_k) = L_k$ ($k \neq 1, j$) 的 Weyl 群元素. 则 $\sigma_j \omega_1 \in \text{Wt}(V)$ 是权图的顶点. 由

$$\omega_1 - \sigma_j \omega_1 = \frac{1}{2}(b_1 - b_j)(L_1 - L_j),$$

以及 $L_1 - L_j \in \Phi^+$, 根据半单 Lie 代数不可约表示的结构定理, 权图中必须包含整条权链:

$$\omega_s := \sigma_j \omega_1 + s(L_1 - L_j) \in \text{Wt}(V), \quad s = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}(b_1 - b_j).$$

这意味着 $b_1 - b_j \leq 2$ 才能保证所有 ω_s 均为顶点.

类似地, 取 $\tau_j \in \mathcal{W}$ 为满足 $\tau_j(L_1) = -L_j, \tau_j(L_j) = -L_1$ 且 $\tau_j(L_k) = L_k$ ($k \neq 1, j$) 的 Weyl 群元素. 则 $\tau_j \omega_1 \in \text{Wt}(V)$ 是权图的顶点. 由

$$\omega_1 - \tau_j \omega_1 = \frac{1}{2}(b_1 + b_j)(L_1 + L_j),$$

以及 $L_1 + L_j \in \Phi^+$, 同理可得约束条件:

$$\omega_s := \tau_j \omega_1 + s(L_1 + L_j) \in \text{Wt}(V), \quad s = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}(b_1 + b_j).$$

这要求 $b_1 + b_j \leq 2$.

结合 b_j 的奇性条件 ($b_j \neq 0$), 可得

$$1 \leq |b_j| \leq 2 - b_1 \leq 1 \Rightarrow b_1 = 1, |b_j| = 1 \quad (\forall 1 < j \leq n) \Rightarrow b_i = 1 \quad (i \neq n), b_n = \pm 1.$$

因此 $\omega_1 = \omega_+$ 或 ω_- , 对应半旋量表示 S^+ 或 S^- . 下面证明 $n = 4$, 由表 4-3, 可以计算

$$\begin{aligned}\mathcal{W}\omega_+ &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j L_j : |a_j| = 1, \sum_{j=1}^n a_j \equiv n \pmod{4}, 1 \leq j \leq n \right\}, \\ \mathcal{W}\omega_- &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j L_j : |a_j| = 1, \sum_{j=1}^n a_j \not\equiv n \pmod{4}, 1 \leq j \leq n \right\}. \\ |\mathcal{W}\omega_-| &= |\mathcal{W}\omega_+| = 2^{n-1}.\end{aligned}$$

以上两种情况可以分别计算, Cayley 构型的轨道条件要求 $|\mathcal{O}| = 2 \dim \mathfrak{h} = 2n$, 从而 $n = 4$.

另一方面当 $n = 4$ 时, 计算 S^+, S^- 的权集为:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}\omega_+ &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 a_j L_j : |a_j| = 1, \sum_{j=1}^4 a_j \in \{-4, 0, 4\}, 1 \leq j \leq 4 \right\}, \\ \mathcal{W}\omega_- &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 a_j L_j : |a_j| = 1, \sum_{j=1}^4 a_j \in \{-3, -1, 1, 3\}, 1 \leq j \leq 4 \right\}.\end{aligned}$$

可以直接验证其权图满足 Cayley 构型.

□

综合引理 4.5.12 和引理 4.5.13, 立即得到如下推论.

引理 4.5.14. 对于 $D_n, n \geq 4$ 型单 Lie 代数 $\mathfrak{so}_{2n}$ 的不可约表示 $\theta : \mathfrak{so}_{2n} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, 如果 θ 的权图具备 Cayley 构型, 则必为下列两种情形之一.

- (1) $V \simeq V_{\text{std}}$, 即标准表示,
- (2) $V \simeq S^+$ 或者 S^- , 即半旋量表示, 且 $n = 4$.

4.5.2 Cayley 表示的分类

在 4.5.1 小节中, 我们对具有 Cayley 构型的经典复单 Lie 群的表示进行了分类. 本小节将进一步分类经典复单 Lie 群及其紧致实形式的 Cayley 表示. 为此, 我们首先回顾低维复单 Lie 代数间的同构关系.

注 4.5.4. 对于低维复单 Lie 代数, 存在以下同构关系:

- (1) $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$.
- (2) $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_6(\mathbb{C})$.
- (3) $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$.

此外, $\mathfrak{so}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ 和 $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 不是单代数.

定理 4.5.15 (分类 I). 设 G 为经典复单 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为不可约表示, $\mathfrak{g}$ 为其 Lie 代数. 则下列命题等价:

- (1) ρ 是具有 Cayley 构型的表示.
 (2) ρ 是 Cayley 表示.
 (3) 以下列表 4-4 中的情形之一.

表 4-4 经典单 Lie 代数具备 Cayley 构型的表示列表

Lie 代数 $\mathfrak{g}$	表示 V	注释
$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	V_{std}	标准表示. 通过 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$, $V \simeq \mathbb{C}^2$ 标准表示.
	$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	伴随表示. 通过 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$, $V \simeq \mathbb{C}^3$ 标准表示.
$\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$	$\bigwedge^2 V_{\text{std}}$	通过 $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_6(\mathbb{C})$, $V \simeq \mathbb{C}^6$ 标准表示.
$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$	V_{std}	$n \geq 2$, 标准表示.
$\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$	$\mathbb{S}$	旋量表示. 通过 $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C})$, $V \simeq \mathbb{C}^4$ 标准表示.
$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$	V_{std}	$n \geq 3$, 标准表示.
$\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$	$\mathbb{S}^+$	两个半旋量表示, 通过外自同构 $\text{Out}(\mathfrak{g})$ 作用, 平移到标准表示 V_{std} .
	$\mathbb{S}^-$	
$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$	V_{std}	$n \geq 4$, 标准表示.

- (4) 对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 当 $1 - d\rho(x)$ 可逆时, 总有 $C(d\rho(x)) \in \text{im } \rho$.

证明. 条目 (1) 与 (3) 的等价性直接源于引理 4.5.5, 4.5.7, 4.5.10, 4.5.14 及注记 4.5.4. 条目 (2) $\implies$ (1) 的蕴含关系由定理 4.4.13 可得.

反之, 注意到除 $\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ 的半旋量表示 $\mathbb{S}^+, \mathbb{S}^-$ 外, (3) 中所有情形均对应二次矩阵群的标准表示, 因此均为 Cayley 表示. 根据注记 4.3.15, $\mathbb{S}^+, \mathbb{S}^-$ 同样构成 Cayley 表示, 从而完成 (1) $\implies$ (2) 的证明.

最后, (4) $\implies$ (1) 由定义自然成立, 而 (3) $\implies$ (4) 可直接通过计算验证. $\square$

注 4.5.5. 我们观察到 (4) 是 (1) 的全局强化版本. 然而定理 4.5.15 表明, 对经典复单 Lie 群这两个性质等价.

接下来我们分类紧致 Lie 群的 Cayley 表示.

定理 4.5.16 (分类 II). 设 G 为紧致实 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为其表示, 设 $V = \bigoplus V_j$ 为不可约分解. 则 ρ 适用 Cayley 变换当且仅当对每个 j , $(\mathfrak{g}, V_j)$ 属于以下列表:

证明. 此列表可通过命题 4.4.23, 引理 4.5.5, 4.5.7, 4.5.10, 4.5.14, 以及推论 4.3.15 和注 4.5.4 直接获得. $\square$

由定理 4.5.15 和定理 4.5.16 可直接得到以下推论:

表 4-5 经典紧单 Lie 代数具备 Cayley 构型的表示列表

Lie 代数 $\mathfrak{g}$	表示 V	注释
$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$	V_{std}	标准表示. 通过 $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$, $V \simeq \mathbb{C}^2$ 标准表示.
	$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	伴随表示的复化. 通过 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$, $V \simeq \mathbb{C}^3$ 标准表示.
$\mathfrak{su}_4(\mathbb{C})$	$\bigwedge^2 V_{\text{std}}$	通过 $\mathfrak{su}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}_6(\mathbb{R})$, $V \simeq \mathbb{C}^6$ 标准表示.
$\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{R})$	V_{std}	$n \geq 2$, 标准表示.
$\mathfrak{so}_5(\mathbb{R})$	$\mathbb{S}$	旋量表示. 通过 $\mathfrak{so}_5(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{u}_2(\mathbb{H})$, $V \simeq \mathbb{H}^2$ 标准表示.
$\mathfrak{u}_n(\mathbb{H})$	V_{std}	$n \geq 3$, $V \simeq \mathbb{H}^n$ 标准表示.
$\mathfrak{so}_8(\mathbb{R})$	$\mathbb{S}^+$	两个半旋量表示, 通过外自同构 $\text{Out}(\mathfrak{g})$ 作用, 平移到标准表示 V_{std} .
	$\mathbb{S}^-$	
$\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{R})$	V_{std}	$n \geq 4$, 标准表示.

推论 4.5.17. 设 G 为 $\mathbb{F}$ 上的单 Lie 群, 满足 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \neq \mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) 或 $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$). 则 G 的具备 Cayley 构型的表示在 $\text{Out}(G)$ 作用下保持固定. 若 $(\mathbb{F}, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{so}_8(\mathbb{C}))$ 或 $(\mathbb{F}, \mathfrak{g}) = (\mathbb{C}, \mathfrak{so}_8(\mathbb{C}))$, 则 G 的 Cayley 表示 $\mathbb{C}^8, \mathbb{S}^+, \mathbb{S}^-$ 将被 $\text{Out}(G) \simeq \mathfrak{S}_3$ 置换作用.

4.6 f -型 Cayley 表示

4.6.1 推广的 f -型 Cayley 表示与 LPR 问题

鉴于 Cayley 定义的 Cayley 变换在计算上如此方便, 自然可以考虑如下问题.

问题 4.3. 可否利用其他 $\exp$ 的有理逼近设计出类似的投影算子?

需要指出的是, G 与其 Lie 代数之间的等变双有理等价未必都具有经典 Cayley 变换 C (定义 4.1.1) 的实用价值.

例 4.6.1 (幂零 Lie 代数). 令 $G = R_n$ 为 $n \times n$ 上三角幂么矩阵群, 对应 Lie 代数 $\mathfrak{r}_n$ 由上三角幂零矩阵组成, 指数映射表达式在 $\mathfrak{r}_n$ 上的限制是多项式映射:

$$\exp|_{\mathfrak{r}_n} : \mathfrak{r}_n \rightarrow R_n$$

$$u \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^j}{j!}.$$

对数逆映射为:

$$\begin{aligned} \log|_{R_n} : R_n &\rightarrow \mathfrak{r}_n \\ X &\mapsto -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(I_n - X)^j}{j}. \end{aligned}$$

$\exp, \log$ 给出了代数簇的同构 $R_n \simeq \mathfrak{r}_n$. 显然, 计算 $\exp(u)$ 的复杂度远高于求值 $C(u)$.

在本章之前的几节中, 我们考虑了 Cayley 定义的映射(4.1.1)在表示论意义下的推广. 例 4.6.1 表明, 不应该仅仅局限于考虑映射 C , 而应该更一般地考虑如下问题.

问题 4.4 (表示论 LPR 问题). 对怎样的 Lie 群 G 及其表示 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 的二元对 (G, ρ) , 和怎样的有理映射 $F : \mathfrak{gl}(V) \dashrightarrow \mathrm{GL}(V)$, 可以定义类似于(4.1.1)的经典 Cayley 变换 C 的广义 Cayley 变换 $F \circ d\rho$ 适用?

针对此问题, 本章将深入讨论不同的有理映射带来的影响, 尤其是权图的几何条件是否有变化, 这些讨论最终表明 Cayley 构型和经典 Cayley 映射 C 的中心性.

在下文中用 $\mathbb{F}(t)$ 表示一个未定元 t 的有理分式域.

定义 4.6.1 (f -型 Cayley 表示). 设 G 是 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 群, $f \in \mathbb{F}(t)$ 为有理分式, 满足 $f(0) = 1$. 称表示 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是 f -型 Cayley 表示如果存在 U 是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中 0 的邻域, 和 $\mathrm{im} \rho$ 作为浸入子群单位元处的邻域 U' 使得 $F(d\rho(U)) \subseteq U'$. 其中 F 是由 f 诱导的有理映射:

$$\begin{aligned} F : \mathfrak{gl}(V) &\dashrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

注 4.6.1. 取 $f = c = \frac{1+t}{1-t}$, 就得到了经典的 Cayley 表示. 允许 f 变化即是考虑所有由 $\exp$ 的有理逼近构造的“Cayley 变换”. 平凡逼近 $f = 1 \in \mathbb{F}(t)$ 将导致平凡的结论. 以下总假设 $f \neq 1$.

命题 4.6.1 (等变性). $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是 f -型 Cayley 表示. 考虑 G 在其 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上的共轭作用 $G \curvearrowright^{\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}} \mathfrak{g}$ 和在 $\mathrm{GL}(V)$ 上的作用 $G \curvearrowright^{\mathrm{Ad} \circ \rho} \mathrm{GL}(V)$. 则 $f \circ d\rho$ 是 G -等变的, 即 $\forall g \in G$, 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{F \circ d\rho} & \mathrm{GL}(V) \\ \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}(g) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Ad}_{\mathrm{GL}(V)}(\rho(g)) \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{F \circ d\rho} & \mathrm{GL}(V). \end{array}$$

证明. $\forall g \in G$, 考虑分成两块:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\rho} & \text{im } d\rho & \xrightarrow{F} & \text{GL}(V) \\
 \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(g) \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(g)) & & \downarrow \text{Ad}_{\text{GL}(V)}(g) \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\rho} & \text{im } d\rho & \xrightarrow{F} & \text{GL}(V).
 \end{array} \quad (4-12)$$

考虑如下群表示的伴随作用, 取微分, 则有图 (4-12) 左边的部分交换:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\rho} & \text{im } \rho \\
 \text{Ad}_G(g) \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_{\text{GL}(V)}(\rho(g)) \\
 G & \xrightarrow{\rho} & \text{im } \rho
 \end{array} \implies \begin{array}{ccc}
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\rho} & \text{im } d\rho \\
 \text{Ad}_{\mathfrak{g}}(g) \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(g)) \\
 \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\rho} & \text{im } d\rho.
 \end{array}$$

由 f 的构造, 按定义可直接计算图 (4-12) 右边的部分交换:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{im } d\rho & \xrightarrow{F} & \text{GL}(V) \\
 \text{Ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(\rho(g)) \downarrow & & \downarrow \text{Ad}_{\text{GL}(V)}(\rho(g)) \\
 \text{im } d\rho & \xrightarrow{F} & \text{GL}(V).
 \end{array}$$

从而全图 (4-12) 交换. $\square$

G 是 $\mathbb{C}$ 上的代数群, Lie 代数 $\mathfrak{g}$, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是 G 的正则表示. 映射 $F \circ d\rho$ 的定义域为

$$\text{Dom}(F \circ d\rho) := \{x \in \mathfrak{g} : F \circ d\rho \text{ 在 } x \text{ 处正则}\} \subseteq \mathfrak{g}.$$

$\text{Dom}(F \circ d\rho)$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的稠密的 Zariski 开集.

引理 4.6.2 (代数群的 Cayley 表示是整体的). 如果 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是 $\mathbb{C}$ 上代数群 G 的正则 f -型 Cayley 表示. 那么对于任意的 $x \in \text{Dom}(F \circ d\rho)$, 有 $F \circ d\rho(x) \in \text{im } \rho$. 换言之有理映射的像 $\text{im}(F \circ d\rho) \subseteq \text{im } \rho$.

证明. 按照定义, $F \circ d\rho$ 在 Dom 上是正则映射. 又 ρ 是 f -型 Cayley 表示, 所以 $\exists U$ 是 $0 \in \mathfrak{g}$ 的欧式邻域, 使得 $F \circ d\rho(U) \subseteq \text{im } \rho$.

$$F \circ d\rho(\overline{U}^Z \cap \text{Dom}) \subseteq \overline{F \circ d\rho(U)}^Z \subseteq \overline{\text{im } \rho}^Z.$$

其中 $\overline{U}^Z$ 表示 U 的 Zariski 闭包. 由于 U 中包含有一个欧式开球, 所以 $\overline{U}^Z = \mathfrak{g}$. 根据引理 4.3.1, $\overline{\text{im } \rho}^Z = \text{im } \rho$. 这导致 $F \circ d\rho(\text{Dom}) \subseteq \text{im } \rho$, 即 $\text{im}(F \circ d\rho) \subseteq \text{im } \rho$. $\square$

注 4.6.2. 根据定理 4.3.2, 对于复半单 Lie 群的 f -型 Cayley 表示, 引理 4.6.2 是适用的.

推论 4.6.3. 对于连通复代数群 G , f -型 Cayley 表示 ρ 使得 $d\rho$ 是忠实的. 如果 $F|_{\text{im } d\rho}$ 上是单射, 那么 $F \circ d\rho$ 给出了 $\text{Lie } G \dashrightarrow \text{im } \rho$ 的双有理等价.

证明. $d\rho$ 的忠实性导致 $\dim \text{Dom} = \dim G = \dim(\text{im } \rho)$, 以及 $\text{Lie im } \rho \simeq \text{Lie } G$. 考虑正则映射

$$\varphi := \left(F \circ d\rho|_{\text{Dom}} : \text{Dom} \rightarrow \overline{\text{im}(F \circ d\rho)}^Z \right).$$

假设 $\dim \overline{\text{im } \varphi} < \dim \text{Dom}$. 由纤维维数定理, 存在 $y \in \text{im } \varphi$, $\dim \varphi^{-1}(y) = \dim \text{Dom} - \dim \overline{\text{im } \varphi} > 0$, 这与 $F \circ d\rho$ 是单射矛盾. 从而

$$\dim(\text{im } \rho) \geq \dim \overline{\text{im } \varphi} = \dim \text{Dom} = \dim G \geq \dim \left(\overline{\text{im}(F \circ d\rho)}^Z \right) \geq \dim \overline{\text{im } \varphi}.$$

由不可约性, $\overline{\text{im } \varphi}^Z = \overline{\text{im}(F \circ d\rho)}^Z = \text{im } \rho$. 所以 φ 是支配态射, 从而 $\text{im } \varphi$ 中存在一个包含在 $\text{im } \rho$ 中的 Zariski 稠密开集 U' , U' 光滑从而正规 (定理 2.2.4). $F \circ d\rho|_{\varphi^{-1}(U')} : \varphi^{-1}(U') \rightarrow U'$, 给出了两个稠密开集间的双射, 由定理 2.1.1, 这是同构, 再由定理 2.1.5, $F \circ d\rho$ 是双有理等价. $\square$

命题 4.6.4 (f -型 Cayley 表示与 LPR 问题). 复代数群 G 的 f -型 Cayley 表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 满足 $d\rho : \text{Lie } G \rightarrow \text{im } \rho$ 是忠实表示, 如果 $F|_{\text{im } d\rho}$ 上是单射, 则 $F \circ d\rho : \text{Lie}(G) \dashrightarrow \text{im } \rho$ 给出了 LPR 问题的一个肯定性例子. 进一步, 如果 ρ 是忠实的, 那么 $\text{im } \rho \simeq G$, 从而此时 $\text{Lie } G$ 与 G 双有理等价.

证明. 引理 4.6.1 和推论 4.6.3 表明 $F \circ d\rho$ 是等变的双有理等价. $\square$

注 4.6.3. 特别地, 当 $f = c$ 时, $F = C$ 总是单射, 从而任意忠实 c -型 Cayley 表示都给出了 LPR 问题的肯定性例子. 由命题 4.6.19, 一般的 f -型 Cayley 表示可以通过调整使得 ρ 是忠实表示.

例 4.6.2 (重访例 4.6.1). 如同例 4.6.1, 取 $G = R_n$, $\text{Lie } G = \mathfrak{r}_n$. 考虑标准表示 $\rho : G \hookrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $f = \exp|_{\mathfrak{r}_n}$, 那么 f 在 $\mathfrak{r}_n$ 上是单射 (逆映射是 $\log|_{R_n}$). $F \circ d\rho(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j$ 给出了 R_n 与 $\mathfrak{r}_n$ 的双有理等价, 事实上这是一个同构.

4.6.2 有理映射的影响

4.6.2.1 幂扩张性质

考虑到 $f(0) = 1$, 从而 $\exists p(t), q(t) \in \mathbb{F}[t]$. 使得 $f(t) = \frac{1+tp(t)}{1+tq(t)}$, 且在 $\mathbb{F}[t]$ 中 $\gcd(1+tp, 1+tq) = 1$. 在形式幂级数环 $\mathbb{F}[[t]]$ 中计算 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \log(f(t)) &= \log(1+tp) - \log(1+tq) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left((-p)^k - (-q)^k \right) t^k = \sum_{k \geq 1} s_k t^k, s_k \in \mathbb{F}. \end{aligned} \quad (4-13)$$

定义 4.6.2 (支撑). 考察 $\log(f(t)) \in \mathbb{F}[[t]]$ 中的系数:

(1) 称如下正整数的子集 $S(f)$ 为 $f \in \mathbb{F}(t)$ 的支撑.

$$S(f) := \{n \in \mathbb{N}^+ : \text{在 Taylor 展开 (4-13) 中 } s_n \neq 0\}.$$

(2) 称 f 支撑在正整数的子集 S 上, 如果 $S(f) \subseteq S \subseteq \mathbb{N}^+$.

定义 4.6.3 (支撑在正整数集子集上的幂扩张性质). 称线性 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S \subseteq \mathbb{N}^+$ 上具备幂扩张性质如果 $x^s \in \mathfrak{g}, \forall x \in \mathfrak{g}, \forall s \in S$. 称线性 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 的线性子空间 $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$ 支撑在 $S \subseteq \mathbb{N}^+$ 上具备幂扩张性质如果 $x^s \in \mathfrak{u}, \forall x \in \mathfrak{u}, \forall s \in S$. 称 Lie 代数的表示 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 在支撑 S 上具备幂扩张性质如果 $\text{im } \theta \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 在支撑 S 上具备幂扩张性质.

引理 4.6.5. 设 G 为 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 群. 若表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 是 f -型 Cayley 表示, 则 $\text{im } d\rho \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S(f)$ 上具有幂扩张性质.

证明. 由假设存在 $0 \in \mathfrak{g}$ 的邻域 U , 使得 F 在 $d\rho(U)$ 上有定义且 $F(d\rho(U)) \subseteq \text{im } \rho$. 设 z_0 是 $1 + zq(z) = 0$ 在 $\mathbb{C}$ 上模长最小的根, 则 $z_0 \neq 0$. 必要时缩小 U 范围, 可设对任意 $x \in U$ 有 $\|d\rho(x)\| < \left|\frac{z_0}{3}\right|$. 对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 存在常数 $c > 0$ 使得 $cx \in U$. 注意到 $d\rho(x)$ 具有幂扩张性质当且仅当 $d\rho(cx)$ 具有该性质, 故只需考虑 $x \in U$ 的情形.

令 $u := d\rho(x)$. 根据定义, 对任意满足 $|\mu| \leq 1$ 的 $\mu \in \mathbb{F}$, 有 $F(\mu u) \in \text{im } \rho$. 由引理 4.3.5 可知当 $|\mu| \leq 1$ 时, 可定义映射

$$\begin{aligned} \varphi : B_0(1) &\rightarrow \text{im } d\rho \\ \mu &\mapsto \log(F(\mu u)) = \sum_{k \in S(f)} s_k \mu^k u^k. \end{aligned}$$

对其求导可得对任意整数 $k \in S(f)$ 有

$$\varphi^k(0) = s_k k! u^k \in \text{im } d\rho. \quad \square$$

引理 4.6.6. 对任意满足 $\|u\|$ 充分小, 且 $u \in d\rho(\mathfrak{g})$ 的 u , f -型 Cayley 变换 $F(u)$ 有定义. 且 $F(u) \in \text{im } \rho$ 当且仅当 $\log F(u) \in d\rho(\mathfrak{g})$.

证明. 考虑指数映射 $\exp : \mathfrak{gl}(V) \rightarrow \text{GL}(V)$ 在原点 $0 \in \mathfrak{gl}(V)$ 的邻域 U 与单位元 $\text{Id} \in \text{GL}(V)$ 的邻域 U' 之间建立的同胚关系. 对应的对数映射 $\log : \text{GL}(V) \dashrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 在满足 $\|a - \text{Id}\| < 1$ 的 $a \in \text{GL}(V)$ 处有定义, 且在定义域内为 $\exp$ 的逆映射. 此时可取

$$U' = \{a \in \text{GL}(V) : \|a - \text{Id}\| < 1\}, \quad U = \log(U').$$

因 $\|u\|$ 充分小时 $1 + uq(u)$ 可逆, 由定义知 $F(u)$ 有定义且落在 $\text{Id} \in \text{GL}(V)$ 附近, $\|F(u) - \text{Id}\| < 1$, 这表明 $F(u) \in U'$ 且 $\log$ 在 $F(u)$ 处有定义. 由此可得 $F(u) \in \text{im } \rho$ 的充要条件为

$$\log(F(u)) \in \log(U' \cap \text{im } \rho) = U \cap d\rho(\mathfrak{g}) \subseteq d\rho(\mathfrak{g}). \quad \square$$

推论 4.6.7. 设 $u \in d\rho(\mathfrak{g})$ 且 $\|u\|$ 充分小. 若 $\text{im } d\rho \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 在支撑 $S(f)$ 上具有幂扩张性质, 则 $F(u) \in \text{im } \rho$.

证明. 根据定义, 对 $k \in S(f)$ 存在 $s_k \in \mathbb{F}^\times$ 使得

$$\log F(u) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k u^k,$$

且该级数收敛. 由于 $u \in d\rho(\mathfrak{g})$ 支撑在 $S(f)$ 上具有幂扩张性质, 对每个 $k \in S(f)$ 有 $u^k \in d\rho(\mathfrak{g})$. 注意到 $d\rho(\mathfrak{g})$ 是有限维空间, 因此 $\log F(u) \in d\rho(\mathfrak{g})$,

由引理 4.6.6 即得 $F(u) \in \text{im } \rho$. $\square$

定理 4.6.8 (刻画 I'). 设 G 为 $\mathbb{F}$ 上的 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为 G 的表示, 则下列条件等价:

- (1) ρ 是 f -型 Cayley 表示,
- (2) 存在 $0 \in \mathfrak{g}$ 的邻域 U , 使得对任意 $x \in U$ 有 $\log F(d\rho(x)) \in \text{im } d\rho$,
- (3) $d\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S(f)$ 上具有幂扩张性质.

证明. 条件 (1) 与 (2) 的等价性直接由引理 4.6.6 可得.

由引理 4.6.5, 蕴含关系 (1) $\implies$ (3) 成立. 反之若 (3) 成立, 则对满足 $\|u\|$ 的充分小的 $u \in d\rho(\mathfrak{g})$, 由引理 4.6.7 可知 $F(u) \in \text{im } \rho$, 由此可推出 (1) 成立. $\square$

例 4.6.3. 当 $f = c = \frac{1+t}{1-t}$ 时,

$$\begin{aligned} S(c) &= \left\{ n \in \mathbb{N}^+ : \log(1+t) - \log(1-t) = \sum_{k \geq 1} s_k t^k, s_n \neq 0 \right\} \\ &= \{n \in \mathbb{N}^+ : 2 \nmid n\} =: \mathbb{O}^+. \end{aligned}$$

可以看到定理 4.6.8 的确是定理 4.3.9 的推广.

注 4.6.4. 本小节展示的推广的引理 4.6.5, 推论 4.6.7 和定理 4.6.8 的论证基本是引理 4.3.8, 推论 4.3.6 和定理 4.3.9 按照定义 4.6.1 在相应情形下逐句的改写. 在之后的证明中遇到此类情况我们强调推广情形不同的核心论证而省略平凡的细节.

命题 4.6.9 (Independence). G 是连通 Lie 群 $\pi : G_0 \rightarrow G$ 是 G 的万有覆盖. 表示 $G \overset{\rho}{\curvearrowright} V$ 是 f -型 Cayley 表示当且仅当 $G_0 \overset{\rho \circ \pi}{\curvearrowright} V$ 是 f -型 Cayley 表示. 如果进一步 G 是实 Lie 群有复化 $G^{\mathbb{C}}$, 且 ρ 是 f -型 Cayley 表示, 那么诱导表示 $\text{Ind}(\rho)$ 也是 f -型 Cayley 表示.

证明. 利用定理 4.6.8 的条件 (3) 可直接验证, 证明和命题 4.3.4 完全类似. $\square$

推论 4.6.10 (有理映射的影响). $f_1, f_2 \in \mathbb{F}(t)$ 满足 $f_1(0) = f_2(0) = 1$ (是 $\exp(t)$ 的至少零阶有理逼近), 以及 $S(f_1) = S(f_2)$. 那么对于表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$,

$$\rho \text{ 是 } f_1\text{-型 Cayley 表示} \iff \rho \text{ 是 } f_2\text{-型 Cayley 表示}.$$

证明. 由定理 4.6.8 的条件 (3) 立即可知. $\square$

注 4.6.5. 以上推论 4.6.10 表明有理分式 $f(t)$ 的影响只体现在其支撑 $S(f)$ 上.

引理 4.6.11. $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$ 是正整数的子集且 $S_1 \subseteq S_2$, 线性 Lie 代数 $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 的线性子空间 $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$ 支撑在 S_2 上具备幂扩张性质, 则 $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$ 支撑在 S_1 上具备幂扩张性质.

证明. 利用定义直接验证. $\square$

定义 4.6.4 (支撑的延拓). $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{N}^+$, 称 S_2 延拓 S_1 如果对于任意的线性 Lie 代数 $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 S_1 上具备幂扩张性质 $\implies \mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 S_2 上具备幂扩张性质.

引理 4.6.12. (1) $\mathbb{O}^+$ 延拓 $S = \{3\}$.

(2) $\mathbb{N}^+$ 延拓 $S = \{2\}$. 如果 $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S = \{2\}$ 上具备幂扩张性质. 那么 $\mathfrak{u}$ 在矩阵乘法下成为一个 $\mathbb{F}$ -代数.

证明. (1) 设 $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S = \{3\}$ 上具备幂扩张性质. 任取 $a, b \in \mathfrak{u}$. 考察引理 4.3.7 中定义的映射

$$\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathfrak{u}, \quad \mu \mapsto (a + \mu b)^3,$$

同理可得 $aba \in \mathfrak{u}$. 考虑取特殊的 $b = a^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, 利用归纳法可得 $b \in \mathfrak{u}$.

(2) 设 $\mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S = \{2\}$ 上具备幂扩张性质. 任取 $a, b \in \mathfrak{u}$, 考察

$$\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathfrak{u}, \quad \mu \mapsto (a + \mu b)^2,$$

取导数 $\varphi'(0) = ab + ba \in \mathfrak{u} \implies 2ab = \varphi'(0) + [a, b] \in \mathfrak{u}$. 这表明 $\mathfrak{u}$ 是一个 $\mathbb{F}$ -代数. 从而支撑在 $\mathbb{N}^+$ 上具备幂扩张性质. $\square$

例 4.6.4 (重访例 4.6.1). 考虑例 4.6.1 中的群 R_n 和 Lie 代数 $\mathfrak{r}_n$. 标准表示 $\rho : R_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是 $f(t) := \sum_{k=0}^{n-1} t^k$ -型 Cayley 表示. $2 \in S(f) = \{1, \dots, n-1\}$, 从而 $\mathfrak{r}_n \subseteq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ 在矩阵乘法下构成 $\mathbb{F}$ -代数. 事实上

$$\mathfrak{r}_n = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : x_{ij} = 0 \text{ 若 } i > j, x_{ii} = 0\},$$

该 Lie 代数对乘法封闭.

4.6.2.2 自同构群作用

推论 4.6.13 (稳定性 I'). 若 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是 f -型 Cayley 表示, 则其在 $R(G)$ 中 $\mathrm{Out} G$ -轨道上的所有表示均为 f -型 Cayley 表示. 相应地, 若表示 $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 在支撑 $S(f)$ 上具备幂扩张性质, 则其在 $R(\mathfrak{g})$ 中 $\mathrm{Out} \mathfrak{g}$ -轨道上的所有表示均在支撑 $S(f)$ 上具备幂扩张性质.

证明. 与推论 4.3.14 的论证过程相同. $\square$

4.6.2.3 交换 Lie 代数

命题 4.6.14 (刻画 II'). 设 G 为 $\mathbb{F}$ 上的交换 Lie 群, $\mathfrak{g}$ 为其 Lie 代数, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为群表示, 则下列条件等价:

- (1) ρ 是 f -型 Cayley 表示,
- (2) $\widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{im} d\rho, \forall k \in S(f)$.

证明. 条件 (2) 蕴含 $\mathrm{im} d\rho \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S(f)$ 上具备幂扩张性质, 从而由定理 4.6.8 推出 (1) 成立.

假设 $\widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{g})) \subseteq \mathrm{im} d\rho, \forall k \in S(f)$. 注意到 $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ 中的恒等式

$$\prod_{j=1}^k x_j \equiv \frac{1}{2^k k!} \sum_{\substack{\epsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, k}} \left(\sum_{j=1}^k \epsilon_j x_j \right)^k \in \mathrm{im} d\rho, \quad \forall k \in S(f),$$

从而证明了条件 (1) $\implies$ (2). □

4.6.3 半单性理论

4.6.3.1 Cartan 子代数判据

引理 4.6.15. 设 G 为域 $\mathbb{F}$ 上的半单 Lie 群且满足 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. 若 $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是 f -型 Cayley 表示, 则 $\widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{h})) \subseteq d\rho(\mathfrak{h}), \forall k \in S(f)$.

证明. 不妨假设 ρ 是不可约表示. 由命题 4.6.14 和命题 4.6.9 可知 $\forall k \in S(f)$, $\widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{h})) \subseteq \mathrm{im} d\rho$. 分两种情形讨论:

- (1) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 的情形: 考虑 $\ker d\rho \subseteq \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 由于 $\mathfrak{g}$ 半单, 所以有 $\mathfrak{g} = \ker d\rho \oplus \mathfrak{g}'$, 且 $\ker d\rho, \mathfrak{g}'$ 仍是复半单 Lie 代数, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\ker d\rho} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}'}$. 考虑商表示 $\theta : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是忠实表示, 从而 $d\rho(\mathfrak{h}) = \theta(\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}'})$. 对于每个 $k \in \mathbb{N}^+$, $\widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{h})) = \tilde{\theta}(S^k(\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}'}))$. 从而不失一般性, 可以假设 $d\rho$ 是忠实的不可约表示, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}', \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}'} = \mathfrak{h}$.

命题 4.6.14 表明 $\forall k \in S(f), \widetilde{d\rho}(S^k) \subseteq \mathrm{im} d\rho \simeq \mathfrak{g}$. 设

$$\psi : \mathrm{im} d\rho \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{g}$$

给出了 $\mathrm{im} d\rho$ 和 $\mathfrak{g}$ 的同构, 那么

$$\psi \circ d\rho = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} \implies \tilde{\psi} \circ \widetilde{d\rho} = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}.$$

$\forall x \in \widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{h})) \subseteq \mathrm{im} d\rho, \forall y \in \mathfrak{h}$ 计算

$$\begin{aligned} [\psi(x), y]_{\mathfrak{g}} &= \psi([x, d\rho(y)]_{\mathrm{im} d\rho}) \\ &\in \tilde{\psi}\left(\left[\widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{h})), d\rho(\mathfrak{h})\right]_{\mathcal{U}(\mathrm{im} d\rho)}\right) \\ &= \tilde{\psi}\left(\widetilde{d\rho}\left([S^k(\mathfrak{h}), \mathfrak{h}]_{\mathcal{U}\mathfrak{g}}\right)\right) = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}\mathfrak{g}}\left([S^k(\mathfrak{h}), \mathfrak{h}]_{\mathcal{U}\mathfrak{g}}\right) \\ &= [S^k(\mathfrak{h}), \mathfrak{h}]_{\mathcal{U}\mathfrak{g}} = 0. \end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{h}$ 是由半单元素构成的极大的交换 Lie 子代数, 所以 $\psi(x) \in \mathfrak{h}$, 这导致 $x = d\rho(\psi(x)) \in d\rho(\mathfrak{h})$.

(2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 的情形: 对于每个 $k \in S(f)$, 考虑复化以及 $\widetilde{d\rho}(S^k \mathfrak{h}) \subseteq \text{im } d\rho$. 利用引理 4.4.7, 其余论证与引理 4.4.8 的证明相同. $\square$

定理 4.6.16 (刻画 III'). 设 G 为域 $\mathbb{F}$ 上的半单 Lie 群, 满足 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ 且 $\mathfrak{g} = \text{Ad}(G)(\mathfrak{h})$, 其中 $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ 为 G 的伴随表示. 设 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 为群表示, 则 ρ 是 f -型 Cayley 表示当且仅当 $\widetilde{d\rho}(S^k \mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h}), \forall k \in S(f)$.

证明. 由定理 4.6.8 和引理 4.6.15, 只需证明 $\widetilde{d\rho}(S^k \mathfrak{h}) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$ 能保证 $\text{im } d\rho \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S(f)$ 上具备幂扩张性质. 与定理 4.4.9 类似, $\forall x \in \mathfrak{g}, \exists h \in \mathfrak{h}, g \in G$ 使得 $x = \text{Ad}(g)h, \forall k \in S(f)$, 计算:

$$d\rho(x) = d\rho(\text{Ad}(g)h) = \rho(g)d\rho(h)\rho(g)^{-1},$$

$$d\rho(x)^k = \rho(g)(d\rho(h))^k \rho(g)^{-1} \in \rho(g)d\rho(\mathfrak{h})\rho(g)^{-1} = d\rho(\text{Ad}(g)(\mathfrak{h})) \subseteq \text{im } d\rho.$$

这表明 $\text{im } d\rho \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 支撑在 $S(f)$ 上具备幂扩张性质. $\square$

4.6.3.2 几何条件

引理 4.6.17. $\theta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ 是不可约表示, 满足 $\dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) = \dim_{\mathbb{F}}(\theta(\mathfrak{h})) =: n$ 且 $\exists k \in \mathbb{N}^+, k \geq 2$ 使得 $\tilde{\theta}(S^k \mathfrak{h}) \subseteq \theta(\mathfrak{h})$.

(a) 如果 $k \in \mathbb{O}$, 则存在线性无关的权 $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Lambda$ 使得

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subseteq \text{Wt } V \setminus \{0\} \subseteq \{\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_n\}.$$

(b) 如果 $k \notin \mathbb{O}$, 则存在线性无关的权 $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Lambda$ 使得

$$\text{Wt } V \setminus \{0\} = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}.$$

证明. 设 $\Delta^+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. 对每个 $1 \leq j \leq n$, 取 $\alpha_j \in \Delta^+$ 的余根 h_j . 由 $\{h_1, \dots, h_n\}$ 构成 $\mathfrak{h}$ 的基, 其对偶基记为 $\{\omega'_1, \dots, \omega'_n\}$. 设非零权集 $\text{Wt } V \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. 根据定义存在整系数列向量 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}^n$ 使得

$$\begin{aligned} A &= \omega' A', \quad \omega' := \begin{bmatrix} \omega'_1 & \cdots & \omega'_n \end{bmatrix} \\ A' &:= \underbrace{[a_1, \dots, a_1]}_{\dim(V_1)\text{份}}, \underbrace{[a_m, \dots, a_m]}_{\dim(V_m)\text{份}}. \end{aligned} \quad (4-14)$$

其中 A 如式 (4-6) 定义. 易见 $\omega'(\mathfrak{h}) \subseteq \mathbb{C}^n$ 由向量 $\omega'(h) := [\omega'_1(h), \dots, \omega'_n(h)]$ 构成. 由于 $\text{rank}(\omega') = n$, 故 $\omega'(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}^n$. 令 $A_0 := [a_1, \dots, a_m] \in \mathbb{Z}^{n \times m}$.

- (1) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 情形: 由引理 4.4.11 证明知 $\text{rank}(A_0) = n$. 重排 λ_j 使得 A_0 的前 $n \times n$ 子矩阵满秩. 通过高斯消元法得分解 $A_0 = GB$, 其中 $G \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ 且

$$B = \begin{bmatrix} I_n & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,1} & \cdots & c_{1,m-n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,1} & \cdots & c_{2,m-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n,1} & \cdots & c_{n,m-n} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{n \times m}.$$

构造 $B' \in \mathbb{Q}^{n \times \dim(V)}$ 使得 $A' = GB'$. 取 $\omega := \omega'G \in \Lambda^n$, 由(4-8)知

$$A(h) = \text{diag}(\omega'(h)A') = \text{diag}(\omega(h)B'), \forall h \in \mathfrak{h}.$$

结合条件 $\tilde{\theta}(S^k \mathfrak{h}) \subseteq \theta(\mathfrak{h})$ 及(4-7), 对任意 $h, h' \in \mathfrak{h}$ 有

$$A(h)^{k-1}A(h') \in \theta(\mathfrak{h}).$$

取 $\omega_1, \dots, \omega_n$ 的对偶基 $x_1, \dots, x_n$, 通过计算 $A(x_j)^{k-1}A(x_l), j \neq l$ 得约束条件

$$c_{js}^{k-1}c_{ls} = 0, \quad 1 \leq s \leq m-n, \quad 1 \leq j < k \leq n.$$

从而每列 $1 \leq s \leq m-n$ 至多含一个非零元.

通过计算 $A(x_j)^{k-1}A(x_j)$ 得约束条件

$$c_{js}^k = c_{js}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

- (a) 如果 $k \in \mathbb{O}$, 则由此推得 $c_{js} \in \{0, \pm 1\}$. 由引理 4.6.17 中式 (4-14) 知

$A = \omega B'$ 其中 $B' \in \{0, \pm 1\}^{n \times \dim(V)}$. 故可取 $\omega = \omega'G$ 满足要求.

- (b) 如果 $k \notin \mathbb{O}$, 则由此推得 $c_{js} \in \{0, 1\}$. 由引理 4.6.17 中式 (4-14) 知

$A = \omega B'$ 其中 $B' \in \{0, 1\}^{n \times \dim(V)}$. 故可取 $\omega = \omega'G$ 满足要求.

- (2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 情形: 条件 $\tilde{\theta}(S^k \mathfrak{h}) \subseteq \theta(\mathfrak{h})$ 蕴涵

$$\widetilde{\text{Ind}(\theta)}(S^k \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \tilde{\theta}(S^k \mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C} \subseteq \theta(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C} = \text{Ind}(\theta)(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}).$$

由于 θ 与 $\text{Ind}(\theta)$ 权系相同, 由复情形结论即得所需包含关系.

□

定理 4.6.18 (几何条件). $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数, 满足 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. $\mathfrak{g} \overset{\theta}{\curvearrowright} V$ 是最高权为 ω_1 的不可约表示, 满足 $n = \dim_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}) = \dim_{\mathbb{F}}(\theta(\mathfrak{h}))$. $S \subseteq \mathbb{N}^+$ 是正整数的子集, 且 $\text{im } \theta \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ 在非平凡的支撑 S (即 $S \neq \{1\}$) 上具备幂扩张性质, 那么

- (1) $S \subseteq \mathbb{O}^+$,

- (2) V 的权图 $(\text{Wt } V, m)$ 具备 Cayley 构型.

证明. (1) 使用反证法. 假设 $\exists k \in S, k \notin \mathbb{O}$. 引理 4.6.17 表明 $\exists \omega'_1, \dots, \omega_n \in \Lambda$ 使得 $\text{Wt } V \setminus \{0\} = \{\omega'_1, \dots, \omega_n\}$. 不失一般性, 假设 $\omega'_1 = \omega_1$. 为简便计, 使用如下简写符号

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\omega_1}, \quad T = \text{Wt } V \setminus \{0\}.$$

定理 4.2.7 表明 $\mathcal{O} \subseteq T$. 由引理 4.4.11,

$$\text{rank } \mathcal{O} = n = \text{rank } T \implies n \leq |\mathcal{O}| \leq |T| = n \implies \mathcal{O} = T.$$

从而 T 中的权恰为所有的极权, 所以具有重数 1, 即 $m(\omega_j) = 1, 1 \leq j \leq n$. 根据引理 4.4.10,

$$\sum_{\lambda \in \text{Wt } V} m(\lambda)\lambda = \sum_{j=1}^n \omega_j = 0 \implies \text{rank } T < n.$$

这与 $\text{rank } T = n$ 矛盾.

(2) 根据条目 (1), $S \subseteq \mathcal{O}^+$. 利用引理 4.6.17, 则存在线性无关的权 $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Lambda$ 使得

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subseteq T \subseteq \{\pm\omega_1, \dots, \pm\omega_n\}.$$

其余论证与定理 4.4.13 相同.

□

4.6.3.3 一般的 f -型 Cayley 表示

之前两节讨论了不可约忠实表示成为 f -型 Cayley 表示的刻画条件. 这些限制都不是本质的, 如同第 4.4.4 节的讨论, 一般的 f -型 Cayley 表示的刻画可以完全类似地由不可约忠实情形构建出来.

命题 4.6.19 (刻画 V'). 有限维表示 $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ 有不可约分解

$$\rho = \prod_{j=1}^m \rho_j : G \rightarrow \prod_{j=1}^m \text{GL}(V_j),$$

其中 $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$, 且对每个 $1 \leq j \leq m$, $\rho_j : G \rightarrow \text{GL}(V_j)$ 是不可约表示. 下列陈述等价:

- (1) ρ 是 f -型 Cayley 表示.
- (2) 对每个 $1 \leq j \leq m$, ρ_j 是 f -型 Cayley 表示.
- (3) 存在半单 Lie 群 G' 和表示 $\rho' : G' \rightarrow \text{GL}(V)$, 使得 $d\rho'$ 忠实, $d\rho'(\mathfrak{g}') = d\rho(\mathfrak{g})$, 且 ρ' 是 Cayley 表示.
- (4) 存在半单 Lie 群 G' 和忠实表示 $\rho' : G' \rightarrow \text{GL}(V)$, 使得 $d\rho'(\mathfrak{g}') = d\rho(\mathfrak{g})$ 且 ρ' 是 Cayley 表示.

证明. 论证与命题 4.4.22 的证明完全类似.

□

4.6.4 Cayley 构型的唯一性

本节讨论 Cayley 构型的唯一性以及其影响.

推论 4.6.20. 设 G 为 $\mathbb{F}$ 上半单 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是不可约表示. 如果 ρ 是 f -型 Cayley 表示, 则 $S(f) \subseteq \mathbb{O}^+$, 且表示的权图 $(\mathrm{Wt} V, m)$ 具备如同定义 4.4.1 要求的 Cayley 构型. 特别的, 如果 $S(f)$ 中包含偶数, 那么不存在 f -型 Cayley 表示.

证明. 定理 4.6.18 的直接推论, f -型 Cayley 表示的半单性理论禁止 $S(f)$ 中包含偶数. $\square$

命题 4.6.21 (刻画 IV'). G 是紧半单 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 是不可约表示满足 $d\rho$ 是忠实的, 那么以下条件等价:

- (1) ρ 是 f -型 Cayley 表示, 且 $S(f) \subseteq \mathbb{O}^+$.
- (2) ρ 是 c -型 Cayley 表示. 其中 $c(t) := \frac{1+t}{1-t}$.
- (3) 表示 ρ 的权图 $(\mathrm{Wt} V, m)$ 具备 Cayley 构型.
- (4) $\widetilde{d\rho}(S^3(\mathfrak{h})) \subseteq d\rho(\mathfrak{h})$.
- (5) 且 $\widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{h})) \subseteq d\rho(\mathfrak{h}), \forall k \in S(f)$.

特别地, 如果 G 是紧单 Lie 群, 以上条件 (1)-(5) 对于任意的不可约表示等价.

证明. 由于 G 紧, 故其 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是紧形式, 满足 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. 当 G 是单 Lie 群时, $d\rho$ 是单 Lie 代数的非平凡表示, 从而是忠实的. 以下考虑 G 是半单 Lie 群的情形.

条件 (2)-(4) 的等价性已经在命题 4.4.23 中建立. 引理 4.6.15 给出了条件 (1) $\implies$ (5). 命题 4.4.6 和定理 4.6.16 给出了条件 (5) $\implies$ (1). 引理 4.6.15 和定理 4.6.18 给出了条件 (1) $\implies$ (3). 引理 4.6.12 指出条件 (4) 中的支撑 $\{3\}$ 可以延拓到 $\mathbb{O}^+$ 上:

$$\widetilde{d\rho}(S^k(\mathfrak{h})) \subseteq d\rho(\mathfrak{h}), \quad \forall k \in \mathbb{O}^+. \quad (4-15)$$

定理 4.6.16 给出式 (4-15) $\implies$ (1). $\square$

以上刻画 4.6.21 使得第 4.5.2 小节中对紧单 Lie 代数具备 Cayley 构型的表示的分类定理可以直接推广到 f -型 Cayley 表示上, 故略去平凡的证明细节.

定理 4.6.22 (分类 II'). 设 G 为紧致单 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为其表示, 设 $V = \bigoplus V_j$ 为不可约分解. 则 ρ 是 f -型 Cayley 表示当且仅当 $S(f) \subseteq \mathbb{O}^+$ 对每个 j , $(\mathfrak{g}, V_j)$ 属于列表 4-5 中的一种情况.

定理 4.6.23 (f 的结构定理). 假设 $f \in \mathbb{F}(t)$ 是 $\exp$ 的有理逼近 $f(0) = 1, f \neq 1$. 那么以下条件等价:

- (1) $S(f) \subseteq \mathbb{O}^+$.
- (2) f 是由若干标准 Cayley 逼近伸缩, 复合而成. 即 $\exists s \in \mathbb{N}^+, n_j \in \mathbb{N}^+, \gamma_j \in \mathbb{C}^\times, j = 1, \dots, s$, 满足 $\gamma_{j_1} \neq \gamma_{j_2}, \forall j_1 \neq j_2, \gamma_{j_1} + \gamma_{j_2} \neq 0, \forall j_1, j_2 = 1, \dots, s$, 使得

$$f = \prod_{j=1}^s (C(\gamma_j t))^{n_j}.$$

证明. 假设条件(2)成立. $\log(f(t)) = \sum_{j=1}^s \log(C(\gamma_j t)) \implies S(f) \subseteq \cup_{j=1}^n S(c) = \mathbb{O}^+ \implies (1)$.

现设条件(1)成立, $S(f) \subseteq \mathbb{O}^+$. $f \in \mathbb{F}(t)$ 且 $f \neq 1 \implies \log f \notin \mathbb{F}$. 由定义 4.6.2, $\log f = \sum_{k \in S(f)} s_k t^k$. 定义

$$g = \frac{d \log f}{dt} = \frac{\frac{df}{dt}}{f(t)} \in \mathbb{F}(t).$$

根据假设 $2 \nmid k, \forall k \in S(f)$, 所以

$$g = \sum_{k \in S(f)} k s_k t^{k-1} =: h(t^2) \in \mathbb{F}[[t^2]],$$

其中 $h = \sum_{k \in S(f)} k s_k t^{\frac{k-1}{2}} \in \mathbb{F}[[t]]$. 注意到

$$h(t^2) = g \in \mathbb{F}(t) \cap \mathbb{F}[[t^2]] = \mathbb{F}(t^2) \implies h \in \mathbb{F}[t]_{(0)}.$$

在 $\mathbb{C}$ 上可以将 f 和 $\frac{dg}{dt}$ 分解:

$$f = \mu_f \frac{\prod_i (t - \alpha_i)^{a_i}}{\prod_j (t - \beta_j)^{b_j}},$$

$$g = \sum_i a_i \frac{1}{t - \alpha_i} - \sum_j b_j \frac{1}{t - \beta_j}.$$

其中 $\mu_f \in \mathbb{C}^\times; a_i, b_j \in \mathbb{N}^+; \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}^\times$, 满足 $\alpha_i \neq \beta_j \forall i, j; \alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2} \forall i_1 \neq i_2; \beta_{j_1} \neq \beta_{j_2} \forall j_1 \neq j_2$. g 的极点为 α_i, β_j , 带有留数 $\text{res}(g, \alpha_i) = a_i, \text{res}(g, \beta_j) = -b_j$. 由于 $g = h(t^2) \in \mathbb{F}[t^2]_{(0)}$, g 的极点必定正负成对出现且留数相反.

$$\frac{dg}{dt} = 2t \frac{dh}{dt}(t^2) \implies w := \frac{dg}{dt}(-t) + \frac{dg}{dt}(t) = 0$$

$$\implies w = \sum_j b_j \left(\frac{1}{(t + \beta_j)^2} + \frac{1}{(t - \beta_j)^2} \right) - \sum_i a_i \left(\frac{1}{(t + \alpha_i)^2} + \frac{1}{(t - \alpha_i)^2} \right) = 0.$$

假设 $\exists i_1 \neq i_2, \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} = 0$. $\forall j, \beta_j \neq \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$, 那么

$$0 = \text{res}(0, \alpha_{i_1}) = \text{res}\left((t - \alpha_{i_1})w, \alpha_{i_1}\right) = -(a_{i_1} + a_{i_2}) < 0,$$

矛盾. 所以假设 $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} = 0$ 不成立, 同理 $\beta_{j_1} + \beta_{j_2} = 0$ 不成立. 从而

$$\alpha_{i_1} \neq \pm \alpha_{i_2}, \quad \forall i_1 \neq i_2; \quad \beta_{j_1} \neq \pm \beta_{j_2}, \quad \forall j_1 \neq j_2.$$

所以 $\forall i$, 考察 $\text{res}((t - \alpha_i)w, \alpha_i) = 0$, 这导致必定 $\exists! j$, 使得 $\alpha_i + \beta_j = 0$, 进而

$$0 = \text{res}((t - \alpha_i)w, \alpha_i) = b_j - a_i \implies a_i = b_j$$

$$\implies f = \mu_f \prod_j \left(\frac{t + \beta_j}{t - \beta_j} \right)^{b_j} = \prod_j \left(C \left(\frac{1}{\beta_j} t \right) \right)^{b_j}.$$

取 $\gamma_j = \frac{1}{\beta_j} \in \mathbb{C}^\times, n_j = b_j \in \mathbb{N}^+$ 即为所求. □

定理 4.6.24 (分类 I'). 设 G 为经典复单 Lie 群, $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ 为不可约表示, $\mathfrak{g}$ 为其 Lie 代数. 则下列命题等价:

- (1) ρ 是具有 Cayley 构型的表示.
- (2) ρ 是 f -型 Cayley 表示, $S(f) \subseteq \mathbb{O}^+$.
- (3) ρ 是 c -型 Cayley 表示, $c = \frac{1+i}{1-i}$.
- (4) $d\rho$ 对应列表 4-4 中的情形之一.
- (5) 对任意 $x \in \mathfrak{g}$, 当 $1 - d\rho(x)$ 可逆时, 总有 $C(d\rho(x)) \in \mathrm{im} \rho$.
- (6) 设 $f = \frac{1+ip}{1+iq}$, $S(f) \subseteq \mathbb{O}^+$, $x \in \mathfrak{g}$, 当 $1 + d\rho(x)q(d\rho(x))$ 可逆时, 总有 $F(d\rho(x)) \in \mathrm{im} \rho$.

证明. 条件 (1) $\iff$ (3) $\iff$ (4) $\iff$ (5) 在定理 4.5.15 中已经建立.

定理 4.6.18 给出了条件 (2) $\implies$ (1). 设 ρ 是 c -型 Cayley 表示, 定理 4.6.23 蕴含条件 (3) $\implies$ (2). 根据定义, 有条件 (6) $\implies$ (2). 对于列表 4-4 中的表示以及定理 4.6.23, 直接验证计算可知条件 (4) $\implies$ (6). $\square$

注 4.6.6. 定理 4.6.23-4.6.24 和推论 4.6.20 完整刻画了 f -型 Cayley 表示的半单性理论. 从中可以看到半单性条件直接限制了可能的 f 映射. 从这个角度讲, Cayley 最初发现的映射是最简单, 最本质的变换.

第5章 总结与展望

5.1 本文总结

优化计算是应用数学中的核心问题之一. 根据目标函数以及约束条件, 针对特殊问题设计出高效的优化计算方案. 群作用是分析和利用对称性的基本工具. 对于 Lie 群上的计算问题, Lie 群高度对称的代数和几何结构为设计计算高效的数值计算方法提供了潜在的空间.

本文考察了群作用和优化计算中的两个具体例子: 无标记传感问题和 Cayley 变换的表示理论. 在这两个例子的研究中群作用发挥了重要的作用.

第3章从理论研究解的性质和算法求解两方面研究了在信号处理中广泛出现的无标记传感问题. 我们通过定理 3.3.1 对文献^[48]的公开问题 3.1 给出了肯定回答: 证明由 $n+1$ 个等幂和构成的多项式系统 Q_{n+1} 具有唯一解. 主要定理 3.3.1 的证明通过分析代数簇间态射的双有理性完成. 以上理论分析引导我们将无标记感知问题转化为考虑秩 1 矩阵补全问题, 并进一步松弛为半定规划问题. 我们开发了符号算法 3.1, 3.2 和数值算法 3.3. 算法 3.1 与 3.2 基于 Gröbner 基计算, 而算法 3.3 基于半定规划.

我们测试并比较了这些算法在不同参数 n, m 和信噪比下的性能. 实验表明: 对于无噪声输入, 求解超定系统 Q_{n+1} 的算法 3.2 比算法 3.1, 3.3 及现有算法 AIEM 更快, 这源于字典序单项式排序下由 Q_{n+1} 生成的理想的 Gröbner 基具有简单线性形式. 算法 3 具备一定的数值稳健性: 对于含噪声输入, 算法 3.3 可在数分钟内返回近似解. 对于较小的 n , 唯一解可在最低松弛阶 $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 时被恢复.

第4章讨论 Cayley 变换的适用性问题. Cayley 变换常被用作 Lie 群上优化的收缩算子, 我们推广了经典 Cayley 变换的表示论框架. 从一般 Lie 群的 Cayley 表示出发, 我们首先寻找刻画 Cayley 变换适用性的一般性条件. 然后引入半单 Lie 代数的表示理论, 利用半单 Lie 代数的锐利性质提出 Cartan 子代数判据以及权图构型的几何条件, 并以此实现了经典单 Lie 代数及其紧致实形式 Cayley 表示的分类. 在第 4.6 节, 我们进一步考察所有 $\exp$ 的有理逼近 f 诱导的 Cayley 表示, 并比较了推广的 f -型 Cayley 表示与标准的 Cayley 表示的关系.

5.2 未来工作展望

在第3章引入的算法 3.3 中, 当使用无噪声输入时, 矩量矩阵的秩序列在数值容差范围内稳定于 1, 这表明算法返回的解必定是 USP 唯一的解. 由于 Q_{n+1} 的多项式次数对矩量松弛方法而言较高, 算法 3.3 可能无法在合理的时间内计算出矩量矩阵, 这需要在未来改进. 另外多项式优化理论中的一个核心困难是对松弛阶的控制. 尽管实验表明对于较小的 n 唯一解可在最低松弛阶被恢复, 相关的复杂度分析也以此作为基础, 然而一般地并不清楚对于这样的多项式系统的松弛阶是

否有良好的估计. 未来进一步工作应考虑这类由对称多项式生成的零维系统的特殊结构是否能够在理论上给出对于优化算法松弛阶数更优的估计.

第 4 章中完整地建立了复数域上 Cayley 表示的半单性理论, 并以此给出了 Cayley 表示的分类. 半单理论的一个直接推广是代数群的线性约化理论. 对于二次矩阵群 G , Cayley 变换的适用性是可以被直接验证的, 比如 $G = U_n(\mathbb{C})$, 然而 Lie 代数 $\text{Lie } G = \mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$ 并不是半单的 Lie 代数. 与 $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$ 关系紧密的半单 Lie 代数是 $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$. 第 4.4 节中分类了 $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$ 的 Cayley 表示, 只在 $n = 2, 4$ 时存在非平凡的 Cayley 表示, 根据二次矩阵群的讨论, $C \circ d\rho$ 把 $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$ 的元素映射到 $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$ 中. 可见在某些场合允许考虑线性约化的 Lie 代数可能是更加自然的. 对复数域 $\mathbb{C}$ 而言, 线性约化代数群上的表示理论和半单 Lie 群的表示理论有许多相似之处. 而引理 4.3.1 暗示考虑群的代数几何性质可能导致比一般光滑表示更为优越的性质. 未来进一步的工作应考虑把 Cayley 表示的半单性理论推广到线性约化群上.

参考文献

- [1] Hilbert D. Über ternäre definite formen [M/OL]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1970: 345-366. https://doi.org/10.1007/978-3-662-26737-0_20.
- [2] Artin E. Über die zerlegung definiter funktionen in quadrate [J/OL]. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1927, 5: 100-115. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122607428>.
- [3] Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments [J]. SIAM Journal on optimization, 2001, 11(3): 796-817.
- [4] Parrilo P A. Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization [M]. California Institute of Technology, 2000.
- [5] Parrilo P A. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems [J]. Mathematical programming, 2003, 96: 293-320.
- [6] Lasserre J, Laurent M, Rostalski P. Semidefinite characterization and computation of zero-dimensional real radical ideals [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2008, 8: 607-647.
- [7] Lasserre J, Laurent M, Rostalski P. A prolongation-projection algorithm for computing the finite real variety of an ideal [J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410(27-29): 2685-2700.
- [8] Lasserre J, Laurent M, Rostalski P. A unified approach to computing real and complex zeros of zero-dimensional ideals [M]. IMA Vol. Math. Appl.: volume 149 Emerging applications of algebraic geometry. New York: Springer, 2009: 125-155.
- [9] Unnikrishnan J, Haghighatshoar S, Vetterli M. Unlabeled sensing: Solving a linear system with unordered measurements [C/OL]. 2015 53rd Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). 2015: 786-793. DOI: [10.1109/ALLERTON.2015.7447086](https://doi.org/10.1109/ALLERTON.2015.7447086).
- [10] Unnikrishnan J, Haghighatshoar S, Vetterli M. Unlabeled sensing with random linear measurements [J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 2018, 64(5): 3237-3253. DOI: [10.1109/TIT.2018.2809002](https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2809002).
- [11] David P, DeMenthon D, Duraiswami R, et al. Softposit: Simultaneous pose and correspondence determination [J/OL]. International Journal of Computer Vision, 2004, 59: 259-284. <https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000025800.10423.1f>.
- [12] Marques M, Stošić M, Costeira J. Subspace matching: Unique solution to point matching with geometric constraints [C/OL]. 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision. 2009: 1288-1294. DOI: [10.1109/ICCV.2009.5459318](https://doi.org/10.1109/ICCV.2009.5459318).
- [13] Tsakiris M C, Peng L. Homomorphic sensing [C/OL]. Chaudhuri K, Salakhutdinov R. Proceedings of Machine Learning Research: volume 97 Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning. PMLR, 2019: 6335-6344. <https://proceedings.mlr.press/v97/tsakiris19a.html>.
- [14] Ji R, Liang Y, Xu L, et al. A concave optimization-based approach for joint multi-target track initialization [J/OL]. IEEE Access, 2019, 7: 108551-108560. DOI: [10.1109/ACCESS.2019.2933650](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2933650).

- [15] Li F, Fujiwara K, Okura F, et al. Shuffled linear regression with outliers in both covariates and responses [J/OL]. *International Journal of Computer Vision*, 2023, 131: 732-751. <https://doi.org/10.1007/s11263-022-01709-2>.
- [16] Narayanan A, Shmatikov V. Robust de-anonymization of large sparse datasets [C/OL]. 2008 IEEE Symposium on Security and Privacy (sp 2008). 2008: 111-125. DOI: [10.1109/SP.2008.33](https://doi.org/10.1109/SP.2008.33).
- [17] Keller L, Jafari Siavoshani M, Fragouli C, et al. Identity aware sensor networks [C/OL]. *IEEE INFOCOM 2009*. 2009: 2177-2185. DOI: [10.1109/INFCOM.2009.5062142](https://doi.org/10.1109/INFCOM.2009.5062142).
- [18] Song X, Choi H, Shi Y. Permuted linear model for header-free communication via symmetric polynomials [C/OL]. 2018 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). 2018: 661-665. DOI: [10.1109/ISIT.2018.8437552](https://doi.org/10.1109/ISIT.2018.8437552).
- [19] 李文威. 代数学方法: 第1卷 [M]. 高等教育出版社, 2019.
- [20] Absil P A, Mahony R, Sepulchre R. Optimization algorithms on matrix manifolds [M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008: xvi+224.
- [21] Edelman A, Arias T A, Smith S T. The geometry of algorithms with orthogonality constraints [J/OL]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1998, 20(2): 303-353. DOI: [10.1137/S0895479895290954](https://doi.org/10.1137/S0895479895290954).
- [22] Absil P A, Malick J. Projection-like retractions on matrix manifolds [J/OL]. *SIAM Journal on Optimization*, 2012, 22(1): 135-158. DOI: [10.1137/100802529](https://doi.org/10.1137/100802529).
- [23] Cayley A. Sur quelques propriétés des déterminants gauches [J/OL]. *J. Reine Angew. Math.*, 1846, 32: 119-123. <https://doi.org/10.1515/crll.1846.32.119>.
- [24] Hartshorne R. Algebraic geometry: volume 52 [M]. Springer Science & Business Media, 2013.
- [25] Procesi C. Universitext: Lie groups [M]. Springer, New York, 2007: xxiv+596.
- [26] Bruns W, Vetter U. Lecture notes in mathematics: volume 1327 determinantal rings [M/OL]. Berlin, Heidelberg: Springer, 1988. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0080378>.
- [27] Shafarevich I R, Reid M. Basic algebraic geometry: volume 1 [M]. Springer, 1994.
- [28] Fulton W, Harris J. Graduate texts in mathematics: volume 129 representation theory [M/OL]. Springer-Verlag, New York, 1991: xvi+551. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0979-9>.
- [29] Huang X, Madan A. Cap3: A dna sequence assembly program [J/OL]. *Genome Research*, 1999, 9(9): 868-877. DOI: [10.1101/gr.9.9.868](https://doi.org/10.1101/gr.9.9.868).
- [30] Rose C, Mian I S. Signaling with identical tokens: Upper bounds with energy constraints [C/OL]. 2014 IEEE International Symposium on Information Theory. 2014: 1817-1821. DOI: [10.1109/ISIT.2014.6875147](https://doi.org/10.1109/ISIT.2014.6875147).
- [31] Abid A, Zou J. A stochastic expectation-maximization approach to shuffled linear regression [C/OL]. 2018 56th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing (Allerton). 2018: 470-477. DOI: [10.1109/ALLERTON.2018.8635907](https://doi.org/10.1109/ALLERTON.2018.8635907).
- [32] Ma R, Cai T T, Li H. Optimal estimation of bacterial growth rates based on a permuted monotone matrix [J/OL]. *Biometrika*, 2020, 108(3): 693-708. <https://doi.org/10.1093/biomet/asaa082>.
- [33] Nejatbakhsh A, Varol E. Neuron matching in c. elegans with robust approximate linear regression without correspondence [J/OL]. 2021 IEEE Winter Conference on Applications of Computer Vision (WACV), 2021: 2836-2845. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:230102094>.

- [34] Melánová H, Sturmfels B, Winter R. Recovery from power sums [J]. *Experimental Mathematics*, 2022: 1-10.
- [35] Tsakiris M C, Peng L, Conca A, et al. An algebraic-geometric approach for linear regression without correspondences [J/OL]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2020, 66(8): 5130-5144. DOI: [10.1109/TIT.2020.2977166](https://doi.org/10.1109/TIT.2020.2977166).
- [36] Slawski M, Ben-David E. Linear regression with sparsely permuted data [J]. *Electronic Journal of Statistics*, 2019, 13(1): 1-36.
- [37] Elhami G, Scholefield A, Haro B B, et al. Unlabeled sensing: Reconstruction algorithm and theoretical guarantees [C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. 2017: 4566-4570.
- [38] Abid A, Zou J. A stochastic expectation-maximization approach to shuffled linear regression [C]. *Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*. 2018: 470-477.
- [39] Peng L, Tsakiris M C. Linear regression without correspondences via concave minimization [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 27: 1580-1584.
- [40] Faugère J C. A new efficient algorithm for computing gröbner bases (f4) [J/OL]. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1999, 139(1): 61-88. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404999000055>. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-4049\(99\)00005-5](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00005-5).
- [41] Berthomieu J, Eder C, Safey El Din M. Msolve: A library for solving polynomial systems [C]. *Proceedings of the 2021 on International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. 2021: 51-58.
- [42] Verschelde J. Algorithm 795: Phcpack: A general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 1999, 25(2): 251-276.
- [43] Bates D J, Hauenstein J D, Sommese A J, et al. Bertini: Software for numerical algebraic geometry [J/OL]. 2019. DOI: <https://bertini.nd.edu/>.
- [44] Lee T L, Li T Y, Tsai C H. Hom4ps-2.0: a software package for solving polynomial systems by the polyhedral homotopy continuation method [J]. *Computing*, 2008, 83(2-3): 109-133.
- [45] Reid G, Zhi L. Solving polynomial systems via symbolic-numeric reduction to geometric involutive form [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2009, 44(3): 280-291.
- [46] Laurent M. Revisiting two theorems of curto and fialkow on moment matrices [J/OL]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2004, 133. DOI: [10.2307/4097911](https://doi.org/10.2307/4097911).
- [47] Hartshorne R. Graduate texts in mathematics: volume 52 algebraic geometry [M/OL]. 1st ed. New York, NY: Springer, 1977. DOI: [10.1007/978-1-4757-3849-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3849-0).
- [48] Liang H, Lu J, Tsakiris M C, et al. A field-theoretic view of unlabeled sensing [EB/OL]. 2024. <https://arxiv.org/abs/2303.01175>.
- [49] Buchberger B. Ein algorithmus zum auffinden der basiselemente des restklassenringes nach einem nulldimensionalen polynomideal [M]. Innsbruck: PhD thesis, 1965.
- [50] Buchberger B. An algorithmic criterion for the solvability of an algebraic system of equations [J]. *Aequationes Mathematicae*, 1970, 4: 374-383.
- [51] Buchberger B. A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of gröbner-bases [C]. *Symbolic and Algebraic Computation*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1979: 3-21.
- [52] Caniglia L, Galligo A, Heintz J. Some new effectivity bounds in computational geometry [C].

- International Conference on Applied Algebra, Algebraic Algorithms, and Error-Correcting Codes. Springer, 1988: 131-151.
- [53] Lakshman Y N. A single exponential bound on the complexity of computing gröbner bases of zero dimensional ideals [C]. Effective methods in algebraic geometry. Springer, 1991: 227-234.
- [54] Faugère J C, El Din M S, Verron T. On the complexity of computing gröbner bases for weighted homogeneous systems [J]. Journal of Symbolic Computation, 2016, 76: 107-141.
- [55] Tsakiris M C. Matrix recovery from permutations: An algebraic geometry approach [C/OL]. 2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). 2023: 2511-2516. DOI: [10.1109/ISIT54713.2023.10206879](https://doi.org/10.1109/ISIT54713.2023.10206879).
- [56] Morgan A, Sommese A. Computing all solutions to polynomial systems using homotopy continuation [J]. Applied Mathematics and Computation, 1987, 24(2): 115-138.
- [57] Candes E, Recht B. Exact matrix completion via convex optimization [J]. Communications of the ACM, 2012, 55(6): 111-119.
- [58] Candes E J, Plan Y. Matrix completion with noise [J/OL]. Proceedings of the IEEE, 2010, 98(6): 925-936. DOI: [10.1109/JPROC.2009.2035722](https://doi.org/10.1109/JPROC.2009.2035722).
- [59] Fazel M, Candes E, Recht B, et al. Compressed sensing and robust recovery of low rank matrices [C/OL]. 2008 42nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers. 2008: 1043-1047. DOI: [10.1109/ACSSC.2008.5074571](https://doi.org/10.1109/ACSSC.2008.5074571).
- [60] Recht B, Fazel M, Parrilo P A. Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization [J]. SIAM review, 2010, 52(3): 471-501.
- [61] Candes E J, Recht B. Exact low-rank matrix completion via convex optimization [C/OL]. 2008 46th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. 2008: 806-812. DOI: [10.1109/ALLERTON.2008.4797640](https://doi.org/10.1109/ALLERTON.2008.4797640).
- [62] Vandereycken B. Low-rank matrix completion by riemannian optimization [J]. SIAM Journal on Optimization, 2013, 23(2): 1214-1236.
- [63] Jain P, Netrapalli P, Sanghavi S. Low-rank matrix completion using alternating minimization [C]. Proceedings of the forty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing. 2013: 665-674.
- [64] Nguyen L T, Kim J, Shim B. Low-rank matrix completion: A contemporary survey [J/OL]. IEEE Access, 2019, 7: 94215-94237. DOI: [10.1109/ACCESS.2019.2928130](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2928130).
- [65] Cosse A, Demanet L. Rank-one matrix completion is solved by the sum-of-squares relaxation of order two [C/OL]. 2015 IEEE 6th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP). 2015: 9-12. DOI: [10.1109/CAMSAP.2015.7383723](https://doi.org/10.1109/CAMSAP.2015.7383723).
- [66] Cosse A, Demanet L. Stable rank-one matrix completion is solved by the level 2 lasserre relaxation [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2021, 21: 891-940.
- [67] Henrion D, Naldi S, Din M S E. Real root finding for low rank linear matrices [J]. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 2020, 31(2): 101-133.
- [68] Nie J, Wang L. Semidefinite relaxations for best rank-1 tensor approximations [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2014, 35(3): 1155-1179.
- [69] Nie J, Wang L, Zheng Z. Low rank tensor decompositions and approximations [J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2023: 1-27.
- [70] da Silva A P, Comon P, de Almeida A L. A finite algorithm to compute rank-1 tensor approximations [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 23(7): 959-963.

- [71] Ma Y, Zhi L. Computing real solutions of polynomial systems via low-rank moment matrix completion [C]. Proceedings of the 37th international symposium on Symbolic and algebraic computation. 2012: 249-256.
- [72] Yang Z, Zhao H, Zhi L. Verifyrealroots: A matlab package for computing verified real solutions of polynomials systems of equations and inequalities [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2023, 36(2): 866-883.
- [73] Yang Z, Zhi L, Zhu Y. Verified error bounds for real solutions of positive-dimensional polynomial systems [C]. Proceedings of the 38th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. 2013: 371-378.
- [74] Lakshman Y N, Lazard D. On the complexity of zero-dimensional algebraic systems [C]. Effective methods in algebraic geometry. Springer, 1991: 217-225.
- [75] Boyd S P, Vandenberghe L. Convex optimization [M]. Cambridge university press, 2004.
- [76] Sturm J F. Using sedumi 1.02, A MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones [J/OL]. Optimization Methods and Software, 1999, 11(1-4): 625-653. <https://doi.org/10.1080/10556789908805766>.
- [77] Sun D, Toh K C, Yuan Y, et al. Sdpnal+: A matlab software for semidefinite programming with bound constraints (version 1.0) [Z]. 2019.
- [78] Nemirovski A. Interior point polynomial time methods in convex programming [J]. Lecture notes, 2004, 42(16): 3215-3224.
- [79] Weyl H. The Classical Groups. Their Invariants and Representations [M]. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1939: xii+302.
- [80] Weil A. Algebras with involutions and the classical groups [J]. J. Indian Math. Soc. (N.S.), 1960, 24: 589-623.
- [81] Postnikov M. Lie groups and Lie algebras [M]. “Mir”, Moscow, 1986: 440.
- [82] Lemire N, Popov V L, Reichstein Z. Cayley groups [J/OL]. J. Amer. Math. Soc., 2006, 19(4): 921-967. <https://doi.org/10.1090/S0894-0347-06-00522-4>.
- [83] Bardsley P, Richardson R W. Étale slices for algebraic transformation groups in characteristic p [J/OL]. Proc. London Math. Soc. (3), 1985, 51(2): 295-317. <https://doi.org/10.1112/plms/s3-51.2.295>.
- [84] Kostant B, Michor P W. The generalized Cayley map from an algebraic group to its Lie algebra [M]. Progr. Math.: volume 213 The orbit method in geometry and physics (Marseille, 2000). Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003: 259-296.
- [85] Gómez-Tato A, Macías-Virgós E, Pereira-Sáez M J. Trace map, Cayley transform and LS category of Lie groups [J/OL]. Ann. Global Anal. Geom., 2011, 39(3): 325-335. <https://doi.org/10.1007/s10455-010-9239-8>.
- [86] Quillen D. Superconnections and the Chern character [J/OL]. Topology, 1985, 24(1): 89-95. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(85\)90047-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90047-3).
- [87] Quillen D. Superconnection character forms and the Cayley transform [J/OL]. Topology, 1988, 27(2): 211-238. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(88\)90040-7](https://doi.org/10.1016/0040-9383(88)90040-7).
- [88] Nomura T. A characterization of symmetric Siegel domains through a Cayley transform [J/OL]. Transform. Groups, 2001, 6(3): 227-260. <https://doi.org/10.1007/BF01263091>.
- [89] Nomura T. Geometric norm equality related to the harmonicity of the Poisson kernel for homogeneous Siegel domains [J/OL]. J. Funct. Anal., 2003, 198(1): 229-267. [https://doi.org/10.1016/S0022-1236\(02\)00052-6](https://doi.org/10.1016/S0022-1236(02)00052-6).

- [90] Kai C. A characterization of symmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images [J/OL]. *Tohoku Math. J. (2)*, 2007, 59(1): 101-118. <http://projecteuclid.org/euclid.tmj/1176734750>.
- [91] Baker G A, Jr., Graves-Morris P. Encyclopedia of mathematics and its applications: volume 59 Padé approximants [M/OL]. Second ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1996: xiv+746. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511530074>.
- [92] Meerbergen K, Roose D. Matrix transformations for computing rightmost eigenvalues of large sparse non-symmetric eigenvalue problems [J/OL]. *IMA J. Numer. Anal.*, 1996, 16(3): 297-346. <https://doi.org/10.1093/imanum/16.3.297>.
- [93] Bai Z J, Chan R H, Morini B. An inexact Cayley transform method for inverse eigenvalue problems [J/OL]. *Inverse Problems*, 2004, 20(5): 1675-1689. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/5/022>.
- [94] Mondal S, Sivakumar K C, Tsatsomeros M. The Cayley transform of prevalent matrix classes [J/OL]. *Linear Algebra Appl.*, 2024, 681: 1-20. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2023.10.017>.
- [95] Iserles A. On Cayley-transform methods for the discretization of Lie-group equations [J/OL]. *Found. Comput. Math.*, 2001, 1(2): 129-160. <https://doi.org/10.1007/s102080010003>.
- [96] Krishnaprasad P S, Tan X. Cayley transforms in micromagnetics [J/OL]. *Physica B: Condensed Matter*, 2001, 306(1): 195-199. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921452601010031>. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(01\)01003-1](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(01)01003-1).
- [97] Hairer E, Lubich C, Wanner G. Springer series in computational mathematics: volume 31 geometric numerical integration [M]. Springer, Heidelberg, 2010: xviii+644.
- [98] Wandelt M, Günther M, Muniz M. Geometric integration on Lie groups using the Cayley transform with focus on lattice QCD [J/OL]. *J. Comput. Appl. Math.*, 2021, 387: Paper No. 112495, 10. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112495>.
- [99] Wen Z, Yin W. A feasible method for optimization with orthogonality constraints [J/OL]. *Math. Program.*, 2013, 142(1-2, Ser. A): 397-434. <https://doi.org/10.1007/s10107-012-0584-1>.
- [100] Gao B, Son N T, Absil P A, et al. Riemannian optimization on the symplectic Stiefel manifold [J/OL]. *SIAM J. Optim.*, 2021, 31(2): 1546-1575. <https://doi.org/10.1137/20M1348522>.
- [101] Jauch M, Hoff P D, Dunson D B. Random orthogonal matrices and the Cayley transform [J/OL]. *Bernoulli*, 2020, 26(2): 1560-1586. <https://doi.org/10.3150/19-BEJ1176>.
- [102] Helfrich K, Willmott D, Ye Q. Orthogonal recurrent neural networks with scaled Cayley transform [C/OL]. Dy J, Krause A. *Proceedings of Machine Learning Research: volume 80 Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning*. PMLR, 2018: 1969-1978. <https://proceedings.mlr.press/v80/helfrich18a.html>.
- [103] Emura S, Sawada H, Araki S, et al. A frequency-domain bss method based on l1 norm, unitary constraint, and cayley transform [C/OL]. *ICASSP 2020 - 2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. 2020: 111-115. DOI: [10.1109/ICASSP40776.2020.9053757](https://doi.org/10.1109/ICASSP40776.2020.9053757).
- [104] Jing Y, Hassibi B. Unitary space-time modulation via Cayley transform [J/OL]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2003, 51(11): 2891-2904. <https://doi.org/10.1109/TSP.2003.818202>.
- [105] Melikechi O, Dunson D B. Ellipsoid fitting with the Cayley transform [J/OL]. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2024, 72: 70-83. <https://doi.org/10.1109/tsp.2023.3332560>.
- [106] Helgason S. Pure and applied mathematics: volume 80 Differential geometry, Lie groups,

- and symmetric spaces [M]. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978: xv+628.
- [107] Cowling M, Dooley A H, Korányi A, et al. H -type groups and Iwasawa decompositions [J/OL]. Adv. Math., 1991, 87(1): 1-41. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(91\)90060-K](https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90060-K).
- [108] Cowling M, Dooley A, Korányi A, et al. An approach to symmetric spaces of rank one via groups of Heisenberg type [J/OL]. J. Geom. Anal., 1998, 8(2): 199-237. <https://doi.org/10.1007/BF02921641>.
- [109] Astengo F, Cowling M, Di Blasio B. The Cayley transform and uniformly bounded representations [J/OL]. J. Funct. Anal., 2004, 213(2): 241-269. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2003.12.009>.
- [110] Astengo F, Di Blasio B. Sobolev spaces and the Cayley transform [J/OL]. Proc. Amer. Math. Soc., 2006, 134(5): 1319-1329. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-05-08278-X>.
- [111] Borovoi M, Kunyavskiĭ B, Lemire N, et al. Stably Cayley groups in characteristic zero [J/OL]. Int. Math. Res. Not., 2014(19): 5340-5397. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnt123>.
- [112] Borovoi M, Kunyavskiĭ B. Stably Cayley semisimple groups [J]. Doc. Math., 2015(Extra vol.: Alexander S. Merkurjev's sixtieth birthday): 85-112.
- [113] Borovoi M. Real reductive Cayley groups of rank 1 and 2 [J/OL]. J. Algebra, 2015, 436: 35-60. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.03.034>.
- [114] Luna D. Letter to v. I. Popov [Z]. 1975.
- [115] Wallach N R. Universitext: Geometric invariant theory [M/OL]. Springer, Cham, 2017: xiv+190. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-65907-7>.
- [116] Onishchik A L, Vinberg E B. Springer series in soviet mathematics: Lie groups and algebraic groups [M/OL]. Springer-Verlag, Berlin, 1990: xx+328. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-74334-4>.
- [117] Brion M. Introduction to actions of algebraic groups [J]. Les cours du CIRM, 2010, 1(1): 1-22.
- [118] Encyclopedia of Mathematics. Lie group, semi-simple [EB/OL]. 2025. http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Lie_group,_semi-simple&oldid=44233.
- [119] Knapp A W. Progress in mathematics: volume 140 Lie groups beyond an introduction [M]. Second ed. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002: xviii+812.
- [120] Gödel K. Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme i [J]. Monatshefte für mathematik und physik, 1931, 38: 173-198.
- [121] Wheeler J A, Ford K W. Geons, black holes, and quantum foam: A life in physics [M]. WW Norton & Company, 2000.
- [122] 曹雪芹. 红楼梦 [M]. 人民文学出版社, 2022.
- [123] Descartes R. A discourse on method [M]. JM Dent & Sons, Limited, 1916.

致 谢

在学生时代我有许多困惑，一部分是与学习研究有关，当然还有许多是不止局限于业务范围内的个人的问题。这些困惑萦绕在我的脑海，很难具体统计我为此付出了多少心力。这些困惑中的大部分，时至今日对于行走在硕士边沿上的我来说仍然没有结果，然而或许这也并不完全是一件糟糕的事情。哥德尔定理告诫人们：完备性和一致性不可兼得¹。并非所有数学命题都有明证，即使这些数学问题是良好定义的，更何况人生的难题呢？从另一个角度讲，大概正是这些困惑的存在和对于这些困惑的探索从根本的角度不断塑造着我，它们构成了我在思考问题时精神世界的舞台与背景。这般背景和舞台必然存在诸多缺陷。而这份毕业论文，其明白展现出来的论证脱胎于这样的背景中，自然包含许多仍需打磨的不完善，这是我个人的责任。

除了我个人的思考和实践外，使这份毕业设计能够完成的同等重要的因素，是我获得了外部的支援。这些外部的帮助源源不断地给予我新的思路和动力，伴随我在困惑中穿行，成为滋养我继续行动的新鲜养料。正如相对论的著名观点：时空不仅是为物质的存在和运动提供场所，时空本身也成为了故事中的主角²。这些外部支持就是或暗藏深处或直接显露于文章中的“幕后的主角”。数院时光如白驹过隙，当毕业的终幕缓缓降下，请允许我在此谢幕，感谢这些支持我唱完这出戏的“幕后主角”们。

首先是我的导师数学机械化实验室的支丽红研究员。支老师在学业和生活上给予我许多关怀。进入数学院初期，支老师向我介绍了许多应用数学领域优化和计算方向的前沿问题。当时我对于数学研究的工作范式一无所知，面对这些前沿问题，我常常怀疑自己的理解力和创新性是否足以支撑我上手研究。支老师与我谈话后察觉到我逡巡而不敢进，鼓励我安下心来阅读文献。在无标记传感的研究中，由于我的实验能力十分不成熟，实验结果不太理想，支老师带着我观察实验数据，分析数据中的问题。实验过程中我倍感焦虑，支老师多次与我谈话，鼓励我不要放弃，最终完成了这项工作。本文涉及的另一项工作涉及许多 Lie 理论和表示论的内容，我对这些内容的学习可以追溯到本科毕业设计时参加支老师在数学院开办的几何不变量研讨班。几何不变量理论在优化和计算中有一系列新奇应用，由于当时我对于学习这一理论没有把握，我中途放弃了深入这一领域做研究。尽管如此，当时讨论班上学习的内容以另一种形式应用在了我硕士阶段对 Cayley 表示的研究中，对称线性代数群的理论是这一研究中证明紧生成性质的关键一环。没有当时讨论班的积累，我是难以完成这一工作的。参加支

¹哥德尔定理的数学表述是：任何自洽的（即满足一致性的）形式系统，只要蕴涵皮亚诺算术公理，就可以在其中构造在体系中不能被证明的真命题，因此通过推理演绎不能得到所有真命题（即体系是不完备的）。^[120]

²原文是物理学家 John Archibald Wheeler 说的：“Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve.”^[121]

老师主办的讨论班对我的综合能力有很强的锻炼，在这种锻炼中我得到学术报告的技巧。除此以外，支老师创造了许多条件让我参加各类学术会议，这些学术会议开阔了我的眼界。

感谢数学机械化实验室的叶科副研究员。叶老师兴趣广泛、见多识广，对于应用数学中的各种代数和几何手段比较了解。我关于 Cayley 表示的工作，最初来自于参与叶老师组织的讨论班时叶老师提出的问题：怎样的 Lie 群上可以做 Cayley 变换？最初我并不设想我可以回答叶老师的问题，在做了大量矩阵 Lie 群的计算和观察各种例子之后，我对这一问题产生了一些朦胧的想法。我当时把这一想法汇报给叶老师的时候，我其实只考虑到最基础的矩阵 Lie 群的几种零散的表示。叶老师敏锐地察觉到应该引入半单 Lie 代数的理论以及相应的表示理论。实践表明这一观察是十分成功的，这一观察大大扩展了我最初的朦胧想法，从而使得这项研究的品味有了很大的提升。在之后的一次聊天中，叶老师又问我 Cayley 使用的有理逼近是否有任何特殊之处。有了之前工作的基础，在做了一些简单尝试之后，我发现我可以回答这一问题，考虑推广的 Cayley 表示并仔细考察 Cayley 构型的唯一性。这篇论文的第 4 章可以看作我对叶老师两个问题的回答。当我研究 Cayley 变换问题遇到困难想要放弃的时候，“或许叶老师还能帮我”这一念想使我不断尝试计算和观察例子，坚持写作。除了这两个具体的数学问题，叶老师多次和我聊天，我从叶老师处得以一窥代数复杂度理论之堂奥。和几何不变量理论类似，代数复杂度理论是代数和几何方法向计算理论渗透的典范，虽然我没能系统地深入到这两个领域的研究中，但是我从中学到的知识使得我具备了完成这篇论文的基础。

感谢数学院的老师和同学们，和他们的交流极大地丰富充实了我的科研生活。“偷来梨蕊三分白，借得梅花一缕魂”^[122]，我从他们身上学习了许多科学知识和生活经验。李子佳副研究员向我介绍了代数几何在机构学中的应用，并在代数几何讨论班上提出许多问题。思考这些问题加强了我对代数几何的理解。王杰副研究员和杨剑霆老师是多项式优化领域的新锐，他们的思维十分活跃，我从他们那里学习了复杂多项式优化建模和计算复杂度的知识。梁昊学长对代数几何和交换代数的工具比较熟稔，我从他那里学习了双有理等价的一些应用技巧。禹天石学长动手能力强，编程经验丰富，对我的第一篇文章的数值实验部分提出许多建议。代梓灏学长专精凸代数几何和奇点理论，课余时间向我科普了许多有趣话题。陈琦元学长擅长组合和交换代数，我从他那里学习了一些十分有趣的概率与组合知识。王愚学长精通微分几何，他对数学的纯粹追求令我敬佩。王立夏同学是图论上调和分析方面的专家，我从他那里学到一点傅里叶变换的知识。此外还有闫斯卓老师，陈绍示研究员，谢松晏研究员，马平川同学，刘俊杞同学，沈皓同学，郭彬同学，许熠辉同学，吕华祥同学，许淳楷同学，王正阳同学，刘靖平同学，裴辰龙同学等曾经多次和我聊天和教我课的老师 and 同学们，凡此种种，不胜枚举。

在生活方面，我尤其感谢两位故交，他们是德才兼备、品学兼优的伙伴：李

汶达同学和马子久同学。随着时间的推移，落寞像上涨的海平面淹没心智的小岛，倒也逐渐习惯，可是有时我感到如此脆弱。同窗十年，和他们不时的谈心赋予我具体以制衡抽象，如同一叶小舟载我驶过麻木和忧虑的波涛，返回理性的港湾。愿我们的友谊之舟行稳致远，共同见证下一个十年。

最后，我深切地感念我的父母陆敏曦先生和刘宁珍女士的关爱。他们是我精神世界的一股暖流，最无私地向我传递爱与勇气。

一个人的命运，当然要靠自我奋斗，但是也要考虑到历史的行程。在人工智能的革命日新月异，机器算法似乎无所不能的时代，更要强调人的持续学习和全面发展。发展的道路不会一帆风顺，范式转移之际难免激荡起困惑和迷惘，这是正常的客观规律。师长、亲友的关怀伴我同行，为我试图探求这些困惑提供思索、实践的材料和眼光。笛卡尔说：我思故我在^[123]。正是在这种不断的探索，实践中，我才能发现、体验并确认自身的存在。

2025 年 6 月

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果

作者简历

2018 年 9 月—2022 年 6 月, 在中国科学院大学数学科学学院就读, 获得理学学士学位.

2022 年 9 月—2025 年 6 月, 在中国科学院大学数学科学学院, 中科院数学与系统科学研究院系统科学研究所就读, 硕士生.

研究方向

多项式优化, Lie 理论, 计算代数几何.

已发表 (或正式接受) 的学术论文:

- (1) 梁昊, 陆镜宇, Manolis C. Tsakiris, 支丽红 (按姓氏首字母排序). *Unlabeled Sensing Using Rank-One Moment Matrix Completion*. 已接收在 Proceedings of the 2024 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp.46 - 55 (published by Association for Computing Machinery, New York, the United States).

已完成的学术论文

- (1) 梁昊, 陆镜宇, Manolis C. Tsakiris, 支丽红 (按姓氏首字母排序). *A Field-Theoretic View of Unlabeled Sensing*. 预印本 [arXiv:2303.01175](https://arxiv.org/abs/2303.01175).
- (2) 陆镜宇, 叶科 (按姓氏首字母排序). *The Cayley Transform on Representations*. 预印本 [arXiv:2411.02071](https://arxiv.org/abs/2411.02071).

学术报告

- (1) 中国数学会计算机数学年会 2024. Cayley 变换的适用性. 福建福州, 2024 年 6 月.
- (2) 2024 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, *Unlabeled Sensing Using Rank-One Moment Matrix Completion*. 美国北卡罗来纳州, 2024 年 6 月.

参加的研究项目

2023 年—2025 年. 计算机数学核心理论, 算法与软件. 其他研究人员.

