

分类号 _____

密级 _____

UDC _____

编号 _____

中国科学院研究生院

博士学位论文

多项式方程组重根的结构及二次收敛迭代算法

吴晓丽

指导教师 _____ 支丽红 研究员

_____ 中国科学院数学与系统科学研究院

申请学位级别 博士 学科专业名称 应用数学

论文提交日期 2009 年 5 月 论文答辩日期 2009 年 6 月

培养单位 _____ 中国科学院数学与系统科学研究院

学位授予单位 _____ 中国科学院研究生院

答辩委员会主席 _____

Multiplicity Structure and Quadratic Convergence Algorithm

Xiaoli Wu

Supervisor:

Prof. Lihong Zhi

Key Laboratory of Mathematics Mechanization
Institute of Systems Science
Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Sciences

May, 2009

*Submitted in total fulfillment of the requirements for the degree of Ph.D.
in applied mathematics*

摘要

如果多项式系统的孤立的奇异零点是准确给出的，我们用准确的线性代数计算出准确的重数，指标，和 Max Noether 空间的一组基. 如果多项式系统是准确知道的，而孤立的奇异零点只有有限的精度，此时我们提出一种广义的二次收敛的牛顿迭代把这个奇异零点修正到机器精度，从而，计算关于这个具有高精度的奇异零点的重根结构. 我们证明了修正孤立的奇异零点的算法的二次收敛性和数值稳定性. 不仅如此，我们还估计了所提出的算法的复杂度.

这些算法已经在 Maple 11 和 Matlab 中实现. 在文章叙述中，我们给出了很多具体例子来解释我们的方法. 我们的实验都是在软件 Maple 11 中，选择 Digits := 14 时运行的. 从实验结果可以看出，对于大多数例子，仅仅需要两三次的广义的牛顿迭代，我们就可以把一个只有两位准确数字的孤立的奇异的零点修正到机器精度.

关键词： 对合系统，数值线性代数，Max Noether 条件，指标，重数

Abstract

If the polynomial system and the singular solutions are known exactly, we compute the multiplicity, index and a basis of Max Noether space by exact linear algebra computation. If we are given an approximate isolated singular solution of an exact polynomial system, then we propose a generalized quadratic Newton iteration to refine the singular solution to have high accuracy and obtain accurate multiplicity structure with respect to the refined solution. We prove quadratically convergence and stability of the algorithm to refine a multiple solution. The complexities of our algorithms are given.

The algorithms have been implemented in Maple 11 and Matlab. We give examples to illustrate our method along the paper. Test results are presented in Maple 11 with Digits := 14 for a set of benchmark problems. It is shown that for most of examples, we can refine a singular solution with only two correct digits to high precision by only two or three generalized Newton iterations.

Keywords: involutive system, numerical linear algebra, Max Noether condition, index, multiplicity

目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	v
第一章 引言	1
1.1 前言	1
1.2 相关工作简介	2
1.3 本文主要工作概述	2
1.4 本文的主要内容	6
第二章 零维多项式系统的对合理论	7
2.1 前言	7
2.2 预备知识	8
2.3 对合理论	13
2.3.1 对合理论求解零维多项式系统	13
2.3.2 对合理论求孤立零维的准素分支	16
第三章 多项式的重根的结构	21
3.1 前言	21
3.2 基础知识	21
3.3 对偶空间	23
3.3.1 求对偶空间基的一种方法	24
3.3.2 修正的 SNEPSolver 算法求对偶空间	26
3.3.3 总结与实验	34

第四章 多项式近似奇异零点二次收敛的广义牛顿迭代算法	37
4.1 前言	37
4.2 牛顿方法回顾	37
4.2.1 牛顿的方法处理近似根	37
4.2.2 Raphson 的迭代公式	38
4.2.3 迭代方法的二次收敛性证明	39
4.3 多变元多项式的奇异零点的修正方法 Deflation	40
4.4 广义牛顿迭代	42
4.5 复杂度分析和实验	49
4.6 总结	50
第五章 结论与展望	53
参考文献	55
发表文章目录	61
个人简介	63
致 谢	65

表 格

3.1 算法实验	35
4.1 算法实验	50

第一章 引言

1.1 前言

多项式方程组求解在科学和工程很多领域有着广泛的应用：在计算几何中，曲面和曲线就由一些多项式段组成，它们相交的时候就满足多项式方程组；还有机械运动也要满足位置变量的多元多项式方程和角度满足三角函数关系；化学反应中的平衡方程，计算机视觉，信号处理等也产生多元多项式系统求解问题.

多项式方程组求解这个问题可以追溯到古希腊和古代中国，因此解决办法浩如烟海. 我们可以用符号和数值的工具来处理多项式系统. 正如文章 [2, 4] 中所述，符号计算的最主要特点是准确性. 它的输入、运算和输出都是精确的. 这就使符号计算的速度很慢，远远达不到实时工业应用的需要. 另外，现实世界中的很多问题只有近似模型，即数据有不同程度的误差. 比如描述机器人的运动，它的机臂的长度、角度和相对位置都是近似测量值，只有有限的精度. 如何使用符号计算系统处理近似问题是大量科学和工程计算中产生的重要的研究课题. 相反的，数值计算可以运用浮点运算处理近似问题，得到近似解，计算速度很快. 它的主要问题是计算结果的精度不容易估计和保证，另外，一般只能得到局部解和部分解，遗漏某些有意义的解.

混合计算就是把符号计算和数值计算结合起来：运用符号计算来处理近似奇异或对扰动敏感的病态问题，而用数值方法来加速符号计算的某一部分或者计算可靠的近似解. 正如吴文俊先生在 [55, 3] 中指出的“设计一种混合算法，在计算过程中不时切换两种计算方式，使之既有两种计算之长，又避两种计算之短，应是解决目前计算上困难的一种适当途径. 为此应该在理论上严格证明在混合计算中以数值代替文字符号时，必须要具有一定的稳定性，即在数值稍有偏差时，不致过分失真而使解答面目全非. 这将是一个既有理论依据又能实际运用的值得考虑的问题.”

1.2 相关工作简介

多项式方程组的重根的计算在很多文献中得到了讨论 [7, 13, 14, 15, 22, 31, 32, 35, 36, 37, 58]. 对偶空间的连续基总是存在的, 在 [31, 32] 中, 作者通过待定系数方法求出了对偶空间的基底. Mourrain 在 [37] 中提出的计算对偶基的方法也是类似的, 由待定系数法, 通过验证封闭性条件和对偶基定义求出一组对偶基. Möller 和 Stetter 通过计算 Gröbner 基得到乘法矩阵, 分析了特征向量和重零点之间的关系 [35]. Möller 和 Tenberg [36] 讨论了商空间的乘法结构的特征元素与零点的关系. 文章 [15] 由计算 Macaulay 矩阵的零空间求得重根结构, 并且 Zeng 利用封闭子空间的条件缩小了 Macaulay 矩阵 [58].

在文章 [11, 27, 28, 29, 42, 44] 中提出了各种办法来提高计算重根的精度. 文章 [11] 把乘法矩阵的一般的线性组合的 Schur 分解重新安排, 从而得到多项式系统的解, 包括重根情况. 文章 [27] 针对雅可比矩阵亏秩的情形设计了二次收敛的牛顿迭代形式. 其中 [28, 29, 42, 44], 讨论 Deflation 方法: 通过在原方程组中添加变元和方程, 使得重根变成新的方程组的单根的一部分, 这样就可以用牛顿迭代修正近似的根. 这种方法详细介绍见第 四 章.

1.3 本文主要工作概述

考虑由多项式系统 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ 生成的理想 I , 对于 $i = 1, \dots, t$, 多项式 $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$. 多项式方程组跟常系数的线性齐次偏微分方程组有着自然的一一对应关系. 因此偏微分方程的对合理论在多项式系统中的应用被广泛探讨. 在文章 [48] 中, 给出了应用数值线性代数中的奇异值分解计算, 求解多项式系统的解, 这种方法保留了理想的结构, 也就是保留了重根的结构的信息. 所以, 文章 [56] 深入探讨了如何计算出这种对合方法保留的重根的结构的信息. 对于一个给定的理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$ 的孤立的奇异的零点, 假设 Q 是这个零点对应的准素分支, 它的对应的素理想是 $P = (x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_s - \hat{x}_s)$, 那么理想 (I, P^k) 是由下面多项式生成的

$$F_k = \{f_1, \dots, f_t, (x_1 - \hat{x}_1)^{\alpha_1} \cdots (x_s - \hat{x}_s)^{\alpha_s}, \sum_{i=1}^s \alpha_i = k\}.$$

由我们考虑的零维的准素分支的特殊结构给出下面简化的对合判定定理:

定理 1.1. 零维的多项式系统 F_k 在 m 次延拓后对合当且仅当

$$\dim F_k^{(m)} = \dim F_k^{(m+1)}. \quad (1.1)$$

得到零维的准素分支的对合形式以后，我们可以求出零点的重根结构：

定理 1.2. 令 $Q = (I, P^\rho)$ 为理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$ 的在重零点 \hat{x} 处的一个孤立的准素分支。 μ 是零点 \hat{x} 的重数。假设系统 $F_\rho = T_\rho(F) \cup P^\rho$ 在 m 次延拓后对合，系数矩阵 $M_\rho^{(m)}$ 的零空间由向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_\mu$ 生成。令

$$\mathbf{L} = [D(\rho - 1, 0, \dots, 0), D(\rho - 2, 1, 0, \dots, 0), \dots, D(0, \dots, 0)]$$

表示包含所有微分次数小于 ρ 次的微分算子的向量。那么 Max Noether 空间 $\Delta_{\hat{x}}$ 的一组基由下面计算得到

$$L_j = \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}_j, \quad \text{对于 } 1 \leq j \leq \mu.$$

如果奇异零点是准确知道的，此时我们通过准确的线性代数计算它的指标、重数、微分结构。当给定的奇异零点是具有有限精度的，我们计算中就要选择适当的容许误差，这种情形下，计算得到重根结构就会跟这个只有有限精度的奇异零点相同数量级的误差，为此我们也设计了一个算法，可以提高近似奇异零点的精度，从而提高重根结构的精度。不仅如此，因为我们使用修正近似奇异零点的矩阵过于庞大，如实验表格 3.1 中最后一列所示，其中空白表示矩阵太大所用计算机存储空间不足无法计算出结果，所以我们提出了修正的算法来精化近似的奇异零点，在这种方法中我们所使用的迭代矩阵的列在延拓过程是固定的，因此大大提高了计算效率。

定理 1.3. 重根修正算法是一个数值稳定的二次收敛的精化奇异零点的算法。

假定我们已知多项式系统 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ 的一个近似的奇异零点

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}} + \hat{\mathbf{x}}_{\text{error}},$$

这里 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$ 表示近似解中的误差部分，而 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}}$ 表示多项式系统的精确解，它的重数为 μ 和指标为 ρ 。通过坐标变换 $y_i = x_i - \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, s$, 我们得到了一个新的多项式系统 $G = \{g_1, \dots, g_t\}$, 这里

$$g_j(y_1, \dots, y_s) = f_j(y_1 + \hat{x}_{1,\text{exact}} + \hat{x}_{1,\text{error}}, \dots, y_s + \hat{x}_{s,\text{exact}} + \hat{x}_{s,\text{error}}), \quad j = 1, \dots, t.$$

考虑多项式系统

$$\bar{G} = \{g_1, \dots, g_t, (\mathbf{y} + \hat{\mathbf{x}}_{\text{error}})^\alpha, |\alpha| = \rho + 1\},$$

这里 ρ 是点 $-\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$ 的指标. 假设系统 \bar{G} 在 m 次延拓后对合, 我们把此时的系数矩阵表示为:

$$M = \begin{bmatrix} M'_h & M'_l \\ M_h & M_l \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

注意到

$$M_l = M_{\rho+1}^{(m)}, \quad (1.3)$$

这里 $M_{\rho+1}^{(m)}$ 是截断系统

$$G_{\rho+1} = \{\mathbf{T}_k(g_1), \dots, \mathbf{T}_k(g_t)\}$$

延拓到 m 次的系数矩阵.

定理 1.4. 假定 $\{L_1, \dots, L_\mu\}$ 是多项式系统 G 在 $\hat{\mathbf{y}}$ 处的 Max Noether 空间的一组基, 多项式系统 \bar{G} 经过 m 次延拓后达到对合, 此时的系数矩阵为 M , 我们有

$$\{L_1(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m})|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m})|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\} \quad (1.4)$$

是 M 的零空间的一组基, 这里 $\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$ 并且

$$\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m}^T = [y_1^{\rho+m}, \dots, y_s^{\rho+m}, y_1^\rho, \dots, y_s, 1]^T. \quad (1.5)$$

如果我们由系数矩阵 M 的零向量形成乘法矩阵 $\{M_{y_1}, \dots, M_{y_s}\}$, 那么 $\frac{1}{\mu} \text{Tr}(M_{y_i}) = -\hat{x}_{i,\text{error}}$ 因为 \bar{G} 只有一个重数为 μ 的解 $\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$. 如果我们已知多项式系统 F 的一个近似的零点 $\hat{\mathbf{x}}$, 即

$$\|\hat{\mathbf{y}}\| = \|-\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}\| = \mathcal{O}(\varepsilon) \ll 1. \quad (1.6)$$

由于 M 的子块 M'_h 的特殊的结构, 存在可逆矩阵 P_1 , 使得 $P_1 M'_h = I$.

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -M_h & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_h & M'_l \\ M_h & M_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \tilde{M}_l \\ \mathbf{0} & M_l - M_h \tilde{M}_l \end{bmatrix},$$

这里, $\tilde{M}_l = P_1 M'_l$. 因此, 计算 M 的零向量等价于计算 $M_l - M_h \tilde{M}_l$ 的零向量.

假设 $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_h^T, \mathbf{v}_l^T]^T$ 是矩阵 M 的一个规范化的零向量,

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{M}_l \\ \mathbf{0} & M_l - M_h \tilde{M}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_h \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{v}_h + \tilde{M}_l \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$, 所以

$$\|\tilde{M}_l \mathbf{v}_l\| = \|\mathbf{v}_h\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

另外, 因为 $M_l \mathbf{v}_l - M_h \tilde{M}_l \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$, 所以

$$\|M_l \mathbf{v}_l\| = \|M_h \tilde{M}_l \mathbf{v}_l\| \leq \|M_h\| \|\tilde{M}_l \mathbf{v}_l\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

我们有下面的一个定理:

定理 1.5. 假设 $\{L_1, \dots, L_\mu\}$ 是 G 在 $\hat{\mathbf{y}}$ 的 Max Noether 空间的一组基, 截断的多项式系统

$$G_{\rho+1} = \{\mathbf{T}_k(g_1), \dots, \mathbf{T}_k(g_t)\}$$

经过 m 次延拓后对合, 它的系数矩阵是 $M_l = M_{\rho+1}^{(m)}$.

对于大约为 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 的容许误差, 我们有

$$\{L_1(\mathbf{v}(\mathbf{y})_\rho) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu(\mathbf{v}(\mathbf{y})_\rho) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\} \quad (1.7)$$

是矩阵 $M_{\rho+1}^{(m)}$ 的零空间的一组基, 这里 $\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$ 而且

$$\mathbf{v}(\mathbf{y})_\rho^T = [y_1^\rho, y_1^{\rho-1} y_2, \dots, y_1, \dots, y_s, 1]^T.$$

如果我们选择一个 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 的容许误差去计算矩阵 M_l 的秩, 那么会发现

$$\dim \text{Nullspace}(M_{\rho+1}^{(m)}) = \dim \text{Nullspace}(M).$$

乘法矩阵 $\{\tilde{M}_{y_1}, \dots, \tilde{M}_{y_s}\}$ 是由 $M_{\rho+1}^{(m)}$ 的零向量的线性关系解出的, 所以

$$\frac{1}{\mu} \text{Tr}(\tilde{M}_{y_i}) = \frac{1}{\mu} \text{Tr}(M_{y_i}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = -\hat{x}_{i,\text{error}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.8)$$

因此, 我们求出误差部分是具有两倍准确数字的.

1.4 本文的主要内容

在第 [二](#) 章，首先介绍对合方法求解零维的多项式方程系统 [48] 和对合方法求零维的孤立的准素分支 [56].

在第 [三](#) 章，我们讨论对于多项式的奇异的零点结构的计算，基于把多项式通过符号数值的混合算法化简到几何对合形式. 这里我们已知的奇异零点可以是准确的，也可以是近似的 [56]. 准确的情形，我们计算的重根结构是准确的，对于近似的奇异解，我们把解决方案留到第 [四](#) 章.

在第 [四](#) 章中，我们首先回顾了经典的牛顿方法和迭代公式的二次收敛性的证明；然后简要介绍了对于多变元的近似奇异的零点的修正方法 Deflation；最后提出了推广的二次收敛的牛顿迭代算法 [57]，修正奇异的零点到机器精度. 这样我们就可以就算它的高精度的重根结构了，并且给出了我们方法二次收敛性的证明.

在最后一章，我们总结了已有的工作成果并讨论了以后可以继续工作努力的方向.

第二章 零维多项式的对合理论

2.1 前言

多项式系统求解问题中，如果考虑准确系数的多项式方程，可以应用 Gröbner 基，特征列，结式的方法等解决：这些方法要有变量的序的选择，是依赖于坐标的，在处理浮点系数的多项式方程时就会遇到数值困难，比如选择的首项的系数是一很小的浮点数。

例 2.1. 多项式系统：

$$\begin{cases} f_1 = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 5x_2 + 1, \\ f_2 = x_1^2 + 7x_2^2 - 11x_1 + 13x_2 + 1. \end{cases}$$

采用序 $1 < x_2 < x_1 < x_2^2 < x_1x_2 < x_1^2 < \dots$ 计算 Gröbner 基，从而得到商环 $\mathbb{C}[x_1, x_2]/(f_1, f_2)$ 的一组基

$$\{1, x_1, x_2, x_1x_2\}.$$

经过一个很小的扰动得到了多项式系统：

$$\begin{cases} \tilde{f}_1 = f_1 + \epsilon_1 x_1 x_2, \\ \tilde{f}_2 = f_2 + \epsilon_2 x_1 x_2. \end{cases}$$

仍然采用序 $1 < x_2 < x_1 < x_2^2 < x_1x_2 < x_1^2 < \dots$ 计算 Gröbner 基，从而得到商环 $\mathbb{C}[x_1, x_2]/(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ 的一组基

$$\{1, x_1, x_2, x_2^2\}.$$

经过很小的扰动两条曲线的交点位置变化很小，但是由 Gröbner 基计算的正规集由一组单项式变换到了另外一组单项式。

近些年，浮点系数的多项式求解问题孕育了一批工作：数值多项式的 border 基 [23, 41] 等，对合基 [47, 59, 48] 等。

2.2 预备知识

在这一小节中我们将要介绍全文要用到的记号概念，更详细的内容请参考 [12, 52].

定义 2.1. 多元多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ 的子集合 I 称作理想，如果满足：

1. $f, g \in I \Rightarrow f + g \in I,$
2. $f \in I, g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \Rightarrow fg \in I.$

定义 2.2. 理想 I 是多元多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ 中的理想， f, g 是多元多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 中的任意两个元素，

- I 是极大理想 如果 I 是真理想，并且任何理想 J 满足 $I \subset J \Rightarrow J = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$.
- I 是素理想 如果 $fg \in I \Rightarrow f \in I$ 或者 $g \in I$.
- I 是准素理想 如果 $fg \in I \Rightarrow f \in I$ 或者 $g^m \in I$ 对于某一个正整数 m .
- I 是根理想 如果 $f^m \in I \Rightarrow f \in I$.
- I 的根理想 是集合

$$\sqrt{I} = \{f \mid f^m \in I \text{ 对于某个整数 } m \geq 1\}.$$

容易验证 \sqrt{I} 也是理想. 任意的素理想一定是根理想，并且准素理想的根理想是素理想. 我们说理想是有限生成的如果存在有限的元素 $f_1, f_2, \dots, f_t \in I$ 满足 I 中的任意的一个元素可以写成 f_1, f_2, \dots, f_t 的 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ -线性组合，换句话说：

$$I = \{g_1f_1 + g_2f_2 + \dots + g_tf_t \mid g_1, g_2, \dots, g_t \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]\}.$$

表示为 $I = (f_1, f_2, \dots, f_t)$.

下面要考虑的是由多项式系统 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ 生成的理想 I ，对于 $i = 1, \dots, t$ ，多项式 $f_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$.

定义 2.3. 对于给定的有限集合 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ ， $f_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ ，复数域上的仿射代数簇定义为下面集合：

$$V(F) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^s \mid f_i(\mathbf{z}) = 0, i = 1, \dots, t\}.$$

如果 F 和 G 是同一个理想的两组基，那么 $V(F) = V(G)$ ；如果 $V(I)$ 是有限的集合，那么理想 I 被称作是零维的理想。对于给定的理想 I ，考虑代数

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]/I = \{[f] \mid f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]\}, \quad [f] := \{f + g \mid g \in I\}. \quad (2.1)$$

把这个代数看作是复数域上的线性空间，当理想 I 是零维时，我们可以找到它的一组基。

定义 2.4. 理想 I 是零维的，取代数 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/I$ 作为复数域上的线性空间的一组基，这组基的每一个等价类取出一个代表元素组成的集合，叫做正规集。

定义 2.5. N 是理想 I 的正规集，多元多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 中的一个任意的多项式 f ，我们可以把它写成

$$[f] = \sum_{t \in N} c_t(f)[t],$$

我们把 $NF(f)$ 叫做 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 的正规形式，

$$NF(f) = \sum_{t \in N} c_t(f)t, \quad c_t(f) \in \mathbb{C}.$$

可以看到为了不引进序的概念，我们模糊了约化的概念和方法。

考虑下面的自同态：

$$\Phi_f : \mathbb{C}[\mathbf{x}]/I \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}]/I, \quad [g] \mapsto [f \cdot g]. \quad (2.2)$$

定义 2.6. 给定理想 I ，和它的正规集 $N = \{t_1, \dots, t_\mu\}$ ，如果

$$[f \cdot t_i] = \sum_{j=1}^{\mu} m_{ij}(f)[t_j], \quad i = 1, \dots, \mu, \quad (2.3)$$

那么， $\mu \times \mu$ 的复矩阵 $M_f = (m_{ij}(f))_{i,j=1}^{\mu}$ 叫做多项式 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 的乘法矩阵。

因为 $\Phi_{fg} = \Phi_f \circ \Phi_g$ ，所以 $M_f \cdot M_g = M_{fg} = M_{gf} = M_g \cdot M_f$ ，也就是说乘法矩阵交换。

例 2.2. 考虑单变元的多项式, 即令 $s = 1$, $x := x_1$, 理想 $(x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i)$, 选择正规集 $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$, 那么相对于这组正规集得到乘法矩阵

$$M_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

这个矩阵被称作 Frobenius 伴随矩阵.

引理 2.1. 理想 P 是素理想当且仅当 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/P$ 是整环.

证明. “ \Rightarrow ”, $\forall f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$,

$$\begin{aligned} (f + P)(g + P) \equiv 0 &\implies fg \in P \text{ 由于理想 } P \text{ 是素理想,} \\ &\implies f \in P \text{ 或者 } g \in P, \text{ 即,} \\ &\quad f + P \equiv 0 \text{ 或者 } g + P \equiv 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} “\Leftarrow”, \forall f, g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}], fg \in P \\ \implies (f + P)(g + P) \equiv 0, \text{ 由于 } \mathbb{C}[\mathbf{x}]/P \text{ 是整环,} \\ \implies f + P \equiv 0 \text{ 或者 } g + P \equiv 0, \text{ 即} \\ f \in P \text{ 或者 } g \in P. \end{aligned}$$

□

引理 2.2. 理想 M 是极大理想当且仅当 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/M$ 是域.

$$\begin{aligned} \text{证明. } “\Rightarrow”, \text{ 任取 } f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \setminus M, \text{ 由于 } M \text{ 是极大理想,} \\ \implies M + (a) = \mathbb{C}[\mathbf{x}], \\ \implies \exists g_1, g_2 \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \text{ s.t. } g_1 f_m + g_2 f = 1, \text{ 其中 } f_m \in M. \\ \implies g_2 f \equiv 1. \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ”, 设理想 J 满足 $M \subset J$,

$$\begin{aligned} \text{取 } f \in J \setminus M, \exists g \in \mathbb{C}[\mathbf{x}], \text{ 使得 } fg \equiv 1, \text{ 即} \\ 1 \in (f), \text{ 也就是 } J = \mathbb{C}[\mathbf{x}]. \end{aligned}$$

□

推论 2.3. 任何极大理想都是素理想.

证明. 假设理想 M 是一个极大理想, 那么由引理 2.2

$$\Rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}]/M \text{ 是域},$$

$$\Rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}]/M \text{ 是整环, 由引理 2.1}$$

$$\Rightarrow M \text{ 是素理想.}$$

□

定理 2.4. (*Hilbert* 基定理) 多元多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ 中的任意理想都是有限生成的.

定义 2.7. 如果 P 和 Q 是满足下面性质的理想:

1. $fg \in Q$ 并且 $f \notin Q$ 推出 $g \in P$,
2. $Q \subseteq P$,
3. $g \in P$ 推出 $g^\rho \in Q$ 对于某一个正整数 ρ ,

那么 Q 是准素的, P 是素理想, 并且是属于准素理想 Q 的素理想.

如果 Q 是一个准素理想, 那么 $P = \sqrt{Q}$ 是一个属于 Q 的素理想并且 Q 被称作 P -准素的.

定义 2.8. 任意的多项式理想都有非冗余的准素分解, 换句话说,

$$I = \cap_{i=1}^r Q_i,$$

这里 Q_i 是准素理想,

$$Q_i \subsetneq \cap_{j \neq i} Q_j,$$

我们称 Q_i 是理想 I 准素分支(理想). 如果没有属于 Q_j , $j \neq i$ 的素理想能被属于 Q_i 的素理想整除, 那么 Q_i 被称作孤立的.

定义 2.9. 把 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/Q$ 作为复数域上的线性空间的维数 μ 称作零维准素理想 Q 的重数, 也就是

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[\mathbf{x}]/Q).$$

定义 2.10. ρ 被称作准素理想 Q 的指标如果 ρ 是最小的非负整数使得

$$\sqrt{Q}^\rho \subseteq Q.$$

下面命题说明零维素理想是极大理想的充要条件.

命题 2.5. 理想 $M \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 是极大理想当且仅当理想 M 是零维的并且是素理想.

证明. “ \Rightarrow ”, 理想 M 是极大理想, 由推论 2.3 知理想 M 是素理想. 只要证明理想 M 是零维的. 假设理想 M 不是零维的, 那么由零维理想的性质知存在 $\mathbb{C}[x_i] \cap M = \{0\}$, 其中 $i \in \{1, \dots, s\}$. 而 $V(M) \neq \emptyset$, 取 $(c_1, \dots, c_s) \in V(M)$, 其中 $c_j \in \mathbb{C}$. 设 $f(x_i) \in \mathbb{C}[x_i]$ 是 c_i 的极小多项式. 构造理想

$$I = M + (f(x_i))$$

那么

$$(c_1, \dots, c_s) \in V(I) \neq \emptyset$$

与理想 M 是极大理想矛盾.

“ \Leftarrow ”, 理想 P 是一个零维的素理想, 取 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] \setminus P$, 那么

$$1 + P, f + P, f^2 + P, \dots$$

是在复数域上线性相关的, 即存在不全为零的 $\lambda_i \in \mathbb{C}$, 使得

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i (f^i + P) = 0,$$

于是

$$(f^j + P) \sum_{\ell=0}^{m-j} \mu_\ell (f^\ell + P) = 0,$$

其中 $\mu_\ell \in \mathbb{C}$, $\mu_0 \neq 0$.

由引理 2.1 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/P$ 是整环, 得到

$$\mu_0(1 + P) + \mu_1(f + P) + \dots + \mu_{m-j}(f^{m-j} + P) = 0,$$

也就是

$$-\mu_0 + P = (f + P)(\mu_1 + \mu_2 f + \dots + P),$$

得到 $f + P$ 是可逆的, 由引理 2.2 知理想 P 是极大理想. \square

给出经典代数学中的一个定理，这是我们设计算法所依赖的关键定理。

定理 2.6. [52] 假设多项式理想 I 有孤立的准素分支 Q 的相关素理想 P 是极大理想，并且 ρ 是 Q 的指标，

如果 $\sigma < \rho$ ，那么

$$\dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}] / (I, P^{\sigma-1})) < \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}] / (I, P^\sigma)). \quad (2.4)$$

如果 $\sigma \geq \rho$ ，那么

$$Q = (I, P^\rho) = (I, P^\sigma). \quad (2.5)$$

推论 2.7. 如果多项式理想 I 有孤立的准素分支 Q ，它的相关素理想 P 是极大理想，那么 Q 的指标 ρ 小于等于 Q 的重数 μ 。

证明. 孤立的准素理想 Q 的重数 μ 等于商代数 $\mathbb{C}[\mathbf{x}] / (I, P^\rho)$ 的维数。商代数 $\mathbb{C}[\mathbf{x}] / (I, P^\sigma)$ 的维数严格增加一直到 $\sigma = \rho$ ，所以 μ 大于等于指标 ρ 。 \square

2.3 对合理论

众所周知，多项式方程组跟常系数的线性齐次偏微分方程组有着自然的一一对应关系。因此偏微分方程组的对合理论在多项式系统中的应用被广泛探讨。在文章 [48] 中，给出了应用数值线性代数中的奇异值分解计算，求解多项式系统的解，这种方法保留了理想的结构，也就是保留了重根的结构的信息。所以，文章 [56] 深入探讨了如何将基于对合理论的方法应用于计算重根的结构。

2.3.1 对合理论求解零维多项式系统

考虑零维多项式方程组 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$, $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$, 其中的多项式 f_1, \dots, f_t 次数为 d , 并且 $s \leq t$. 多项式方程系统可以按照他们的系数矩阵 $M_d^{(0)}$ 写为如下形式：

$$M_d^{(0)} \cdot [x_1^d, x_1^{d-1}x_2, \dots, x_s^2, x_1, \dots, x_s, 1]^T = [0, \dots, 0]^T$$

在这里和下面的文章里, $[...]^T$ 表示矩阵的转置。有结论 $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s]$ 是方程组的解当且仅当

$$[\xi_1^d, \xi_1^{d-1}\xi_2, \dots, \xi_s^2, \xi_1, \dots, \xi_s, 1]^T$$

是系数矩阵 $M_d^{(0)}$ 的零向量.

因为单项式的个数通常要远远多于多项式的个数, 所以系数矩阵的零空间的维数是很大的. 文章 [6, 16, 17, 26, 34, 35, 38, 39, 40, 41, 50, 51] 的目标是找到属于 F 生成的理想其他的多项式, 直到得到的形式可以判定理想的成员问题. 文章 [46, 47, 48, 59] 的方法是通过偏微分方程 R 的对合判定准则 [24, 45] 直接计算维数表. 偏微分方程系统 R 等价于多项式方程系统 F 通过下面的对应:

$$\phi : x_i \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

ϕ 是一个双射, 也就是说多元多项式环 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ 和微分算子环 $\mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_s}]$ 是同构的. 因为容易验证:

1. $\phi(p_1 + p_2) = \phi(p_1) + \phi(p_2),$
2. $\phi(p_1 p_2) = \phi(p_1)\phi(p_2),$

对于任意的 $p_1, p_2 \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$. 并且映射 ϕ 的核为零.

例 2.3. 给定一个多项式系统

$$P = \{xy^3 + xy^2, x^2y^2 + 2x^2y - 3xy\}$$

那么对应的偏微分方程系统

$$R = \phi(P) = \{u_{x,y,y,y} + u_{x,y,y}, u_{x,x,y,y} + 2u_{x,x,y} - 3u_{x,y}\}.$$

接下来, 我们用多项式代数语言简要地解释一下符号数值混合计算的消元办法. 考虑代数簇

$$V(F) = \left\{ [\mathbf{x}^d, \dots, 1] \in \mathbb{C}^{N_d} \mid M_d^{(0)} \cdot [\mathbf{x}^d, \dots, 1]^T = \mathbf{0} \right\},$$

这里 $N_d = \binom{d+s}{s}$, \mathbf{x}^j 表示所有次数为 j 的单项式. 如果将所有不同的单项式都看作是独立变元, 那么 $V(F)$ 就是 $M_d^{(0)}$ 的零空间.

多项式系统 F 的一次延拓是指把 F 乘以每个变元得到的多项式添加到原来的系统中, 因此我们得到了 $d+1$ 次的扩充系统. 可以递归定义高次的延拓, 得到了序列 $F = F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)}, \dots$, 相应地得到了一组系数矩阵:

$$M_d^{(0)} \cdot \mathbf{v}_d = \mathbf{0}, M_d^{(1)} \cdot \mathbf{v}_{d+1} = \mathbf{0}, M_d^{(2)} \cdot \mathbf{v}_{d+2} = \mathbf{0}, \dots$$

其中 $\mathbf{v}_i = [\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^{i-1}, \dots, \mathbf{x}, 1]^T$.

一次投影定义为

$$\pi(F) = \left\{ [\mathbf{x}^{d-1}, \dots, 1] \in \mathbb{C}^{N_{d-1}} \mid \exists \mathbf{x}^d, M_d^{(0)} \cdot [\mathbf{x}^d, \dots, 1]^T = \mathbf{0} \right\}.$$

这个投影算子 π 把 \mathbb{C}^{N_d} 中的一个点映射到 $\mathbb{C}^{N_{d-1}}$ 中, 去掉次数为 d 的那些单项式. 在文章 [8, 47, 54] 中提出的数值的投影算子 $\hat{\pi}$ 是基于奇异值分解 (SVD). 我们首先找到系数矩阵的奇异值分解

$$M_d^{(0)} = U \cdot \Sigma \cdot V \quad (2.6)$$

$M_d^{(0)}$ 的近似秩 r 是比给定容许误差大的奇异值的个数. 容许误差的选取要根据输入多项式的系数的准确数字个数. 多项式系统 F 的维数定义为它的系数矩阵 $M_d^{(0)}$ 的零空间的维数. 表示为

$$\dim F = \dim \text{Nullspace}(M_d^{(0)}) = N_d - r. \quad (2.7)$$

通过去掉 V 的前面 r 行得到 $M_d^{(0)}$ 的零空间的一组近似基. 为了估计 $\dim \hat{\pi}(F)$, 消掉 $M_d^{(0)}$ 的零空间一组近似基中对应于次数最高为 d 次的单项式. 这组投影的近似基张成 $\hat{\pi}(F)$. 把奇异值分解方法应用到每组投影的近似基上可以计算投影系统的维数 $\hat{\pi}(F), \hat{\pi}^2(F), \hat{\pi}^3(F), \dots$, 这些信息是我们在判定对合时候所需要的.

次数为 d 的多项式系统的符号矩阵就是系数矩阵 $M_d^{(0)}$ 的子矩阵对应的最高次 d 次的那个子块. 对合判定准则中一个最重要的要求就是符号对合. 下面给出了零维多项式系统的对合的判定准则 [59].

定理 2.8. [59] 一个零维的多项式系统 F 在 m 次延拓和 ℓ 次投影后对合当且仅当 $\pi^\ell(F^{(m)})$ 满足投影对合测试:

$$\dim \pi^\ell(F^{(m)}) = \dim \pi^{\ell+1}(F^{(m+1)}), \quad (2.8)$$

和符号对合测试:

$$\dim \pi^\ell(F^{(m)}) = \dim \pi^{\ell+1}(F^{(m)}). \quad (2.9)$$

文章 [48, 59] 中给出了下面的算法, 利用符号数值的方法得到多项式系统的对合形式, 从而求解零维的多项式系统的零点.

算法: SNEPSolver

输入: ▶ 零维的多项式理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$, 这里的多项式是 d 次的并且 $f_i \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$, 一个容许误差 τ .

输出: ▶ 商环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/I$ 的维数和乘法矩阵 M_{x_1}, \dots, M_{x_s} .

- 对于给定的容许误差 τ 对于 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ 应用符号延拓和数值消元的方法, 我们得到维数表 $\dim \hat{\pi}^\ell(F^{(m)})$.
- 找到最小的 m 满足存在 ℓ 并 $\hat{\pi}^\ell(F^{(m)})$ 近似对合, 即满足条件 (2.8, 2.9). 如果对于给定的 m 存在多个这样的值, 那么选择最大的作为 ℓ .
- 多项式系统 F 的解的个数是 $d = \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]/I) = \dim \hat{\pi}^\ell(F^{(m)})$.
- 乘法矩阵 M_{x_1}, \dots, M_{x_s} 可以由 $\hat{\pi}^\ell(F^{(m)})$ 和 $\hat{\pi}^{\ell+1}(F^{(m)})$ 的零向量形成.

注 1. 不同于以往的算法选择单项式构成的有 d 个元素的正规集合, 我们计算 $\hat{\pi}^{\ell+1}(F^{(m)})$ 的零空间近似基的奇异值分解. 根据 (2.9), 前 d 个奇异向量在 $\hat{\pi}^\ell(F^{(m)})$ 的零空间的近似基中可以稳定线性组合出其它行, 于是我们找到了一组多项式作为商环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/I$ 的稳定的一组基. 多项式系统 F 的解可以由乘法矩阵的特征值特征向量的方法得到 [6, 11, 35].

2.3.2 对合理论求孤立零维的准素分支

对于一个给定的理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$ 的孤立的奇异的零点, 假设 Q 是这个零点对应的准素分支, 它的相关素理想是 $P = (x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_s - \hat{x}_s)$, 我们应用算法 SNEPSolver 来计算在这一点的准素理想的指标 ρ , 使得 $Q = (I, P^\rho)$ 并且计算商环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/Q$ 的乘法结构.

算法: 准素分支

输入: ▶ 理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$ 的一个孤立的重零点 $\hat{\mathbf{x}}$, 和一个容许误差 τ .

输出: ▶ 准素分支 Q 的重数 μ , 指标 ρ , 和商环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]/Q$ 的乘法矩阵 M_{x_1}, \dots, M_{x_s} , 这里 $Q = (I, P^\rho)$.

- 形成素理想 $P = (x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_s - \hat{x}_s)$.

- 在给定的容许误差 τ , 按照算法 SNEPSolver 计算 $d_k = \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}] / (I, P^k))$, 直到 $d_k = d_{k-1}$, 然后设定 $\rho = k - 1$, $\mu = d_\rho$ 和 $Q = (I, P^\rho)$.
- 按照算法 SNEPSolver 计算商环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}] / Q$ 的乘法矩阵 M_{x_1}, \dots, M_{x_s} .

基于约化的 Gröbner 基的唯一性计算准素分支的指标的符号方法在 [19, 25] 中给出. 当我们处理的理想解只有有限精度的时候, 这种方法就会遇到数值处理上的困难. 因为从前言的例子中可以看出, Gröbner 基对扰动敏感.

注 2. 计算出来的乘法矩阵组成的集合 $\{M_{x_1}, \dots, M_{x_s}\}$ 在 [14] 中被称作对于给定的零点 $\hat{\mathbf{x}}$ 的局部环.

因为理想 (I, P^k) 是由下面多项式生成的

$$F_k = \{f_1, \dots, f_t, (x_1 - \hat{x}_1)^{\alpha_1} \cdots (x_s - \hat{x}_s)^{\alpha_s}, \sum_{i=1}^s \alpha_i = k\}.$$

不失一般性, 假设 $d \leq k$, 我们把所有多项式 f_i 都延拓到 d 次. 既然所有次数为 $k+j$ 的单项式都出现在延拓系统 $F_k^{(j)}$ 中, 即 $F_k^{(j)}$ 的符号矩阵总是列满秩的, 也就是说, $F_k^{(j)}$ 是符号对合的. 延拓后的系统的维数表示为

$$\dim F_k^{(j)} = \dim \text{Nullspace}(M_k^{(j)}),$$

这个数值严格递减直到停止, 这里我们用 $M_k^{(j)}$ 表示多项式系统 $F_k^{(j)}$ 的系数矩阵. 因此我们得到了下面的对应于我们特殊的多项式系统 F_k 的简单的对合判定定理.

定理 2.9. 零维的多项式系统 F_k 在 m 次延拓后对合当且仅当

$$\dim F_k^{(m)} = \dim F_k^{(m+1)}. \quad (2.10)$$

例 2.4. [42] 理想 I 由下面多项式生成

$$\{f_1 = x_1^2 + x_2 - 3, f_2 = x_1 + 0.125x_2^2 - 1.5\}. \quad (2.11)$$

$(1, 2)$ 是理想的一个 3-重零点.

形成极大理想 $P = (x_1 - 1, x_2 - 2)$.

- $k = 2$, 我们考虑系统

$$F_2 = \{f_1, f_2, (x_1 - 1)^2, (x_1 - 1)(x_2 - 2), (x_2 - 2)^2\}.$$

因为 $\dim F_2 = 1$, $\dim F_2^{(1)} = \dim F_2^{(2)} = 2$, 我们有 $\dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]/(I, P^2)) = 2$.

同样地,

- $k = 3$, $\dim F_3 = 1$, $\dim F_3^{(1)} = \dim F_3^{(2)} = 3$,

我们有 $\dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]/(I, P^3)) = 3$.

- $k = 4$, $\dim F_4 = 1$, $\dim F_4^{(1)} = \dim F_4^{(2)} = 3$,

我们有 $\dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]/(I, P^4)) = 3$.

因此根 $(1, 2)$ 的指标和重数分别为: $\rho = 3$ 和 $\mu = 3$. 相对于正规集合 $\{x_1, x_2, 1\}$ 的乘法矩阵是:

$$M_{x_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -10 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{x_2} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -10 \\ -8 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

M_{x_1} 和 M_{x_2} 的三重特征值分别是 1 和 2.

如果奇异解 $\hat{\mathbf{x}}$ 是近似的, 那么多项式系统 F_k 有一个解簇. 乘法矩阵 M_{x_i} 的 Schur 分解只含有一个块. 在文章 [11] 中, 乘法矩阵 M_{x_i} 的特征值簇的平均值由 $\text{Trace}(M_{x_i})/\mu$ 计算, 给出了 \hat{x}_i 的一个修正值. 在数值计算的实验中, 我们发现: 可以用我们的对合系统的系数矩阵计算零向量, 然后形成乘法矩阵, 再应用这种方法计算乘法矩阵的迹的平均值, 得到近似解得修正项, 把修正项加入到近似根, 就得到精度更高的解.

例 2.5. (2.4 继续) 假设我们知道一个近似的孤立的奇异解:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} = & (1 + 2.5428 \times 10^{-4} + 2.4352 \times 10^{-4} i, \\ & 2 + 8.4071 \times 10^{-4} + 3.6129 \times 10^{-4} i). \end{aligned}$$

我们选定一个容许误差 $\tau = 10^{-4}$ 并且运用准素分支算法来计算对于给定的 $\hat{\mathbf{x}}$ 和多项式系统 (2.11). 对于选定的容许误差数值计算的维数结果跟上面例子给

出的相同. 因此, 我们得到了同样的这个近似值的指标和重数, 计算得到的修正根是:

$$(1 + 9.5829 \times 10^{-8} - 1.2762 \times 10^{-7} i, \\ 2 - 2.6679 \times 10^{-6} + 3.5569 \times 10^{-7} i).$$

然后我们用这个修正了的根作为一个初始的解, 再一次地选定一个更小的容许误差 $\tau = 10^{-6}$, 重新运行准素分支算法, 得到:

$$(1 - 1.0000 \times 10^{-15} + 2.5854 \times 10^{-14} i, 2 + 8.4457 \times 10^{-14}).$$

第三章 多项式的重根的结构

3.1 前言

我们对多项式奇异根的重数感兴趣，这里我们所说的重数，不仅仅是算术意义上的单根，二重根，三重根等，而是在更强的代数意义上给出这个奇异零点所在的准素分支的描述，我们定义的重根结构是指计算出这个准素分支的对偶空间的一组基。因为算术意义上的重数不能给我们关于准素分支的充足的信息：考虑 $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ 上的零点在原点处重数为 3 的准素理想有两类，可以分别表示为 (x_1^3, x_2) 和 $(x_1, x_2)^2$ 。为了研究理想局部的拓扑性质，我们讨论它的对偶空间。

3.2 基础知识

定义 3.1. 乘法集 T 定义为包含单位 1 的对乘法封闭的集合，即：

1. $1 \in T$,
2. $t_1, t_2 \in T \Rightarrow t_1 t_2 \in T$.

本文中 T 表示所有单项式 $u = \mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_s^{\alpha_s}$ 的乘法集。令 $D(u) = D(\alpha) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_s) : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 表示下面定义的微分算子：

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_s!} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_s^{\alpha_s},$$

对于非负的整数数组 $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ 。写成 $\mathfrak{D} = \{D(\alpha), |\alpha| \geq 0\}$ 并且表示 $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{D})$ 为由 \mathfrak{D} 生成的 \mathbb{C} -向量空间，并且在 \mathfrak{D} 上引入一个态射作用相当于“积分”：

$$\Phi_{x_j}(D(\alpha)) = \begin{cases} D(\alpha_1, \dots, \alpha_j - 1, \dots, \alpha_s), & \text{如果 } \alpha_j > 0, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (3.1)$$

自然的有“多次积分”态射定义：

$$\Phi_{t_1}(D(t_2)) = \begin{cases} D\left(\frac{t_2}{t_1}\right), & \text{如果 } t_2 | t_1, \\ 0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (3.2)$$

相应的我们可以定义“微分”态射:

$$\Psi_{x_j}(D(\alpha)) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_s). \quad (3.3)$$

和“多次微分”态射:

$$\Psi_{t_1}(D(t_2)) = D(t_1 t_2) \quad (3.4)$$

定义 3.2. $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{D})$ 的一个子空间 U 被称作是封闭的, 如果它是有限维的并且满足下面条件:

$$\Phi_{x_j}(U) \subseteq U, \quad j = 1, \dots, s.$$

命题 3.1. 给定理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^s$ 和一个微分算子构成的封闭向量空间 U 的一组基 $\{D_1, \dots, D_\mu\}$. 如果满足 $D_i(f_j)(\mathbf{z}) = 0$ 对于 $i = 1, \dots, \mu$ 和 $j = 1, \dots, t$, 那么 $D(f)(\mathbf{z}) = 0$, 对于任意的 $f \in I$, 和 $D \in U$.

证明. 任意的 $f \in I$, 有表达式:

$$f = \sum_{j=1}^t g_j f_j.$$

$D \in U$, 由空间 U 的封闭性质 $\Phi_u(D) \in U$, 所以

$$\Phi_u(D)(f_j)(\mathbf{z}) = 0,$$

对于 $u \in T$ 和 $j = 1, \dots, t$, 由 Leibniz 法则,

$$D(f) = \sum_{j=i}^{\mu} D(g_j f_j) = \sum_{j=1}^{\mu} \sum_{u \in T} D(u)(g_j) \Phi_u(D)(f_j). \quad (3.5)$$

上面表达式在 \mathbf{z} 点处计值, 就得到了我们需要的结论. \square

定义 3.3. 给定理想 I 的一个零点 $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s)$, 我们定义关于 I 在 $\hat{\mathbf{x}}$ 处的 Max Noether 空间为:

$$\Delta_{\hat{\mathbf{x}}} := \{L \in \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{D}) \mid L(f)|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = 0, \forall f \in I\}. \quad (3.6)$$

并且把空间中的每个元素称作 Max Noether 条件.

定理 3.2. [13] 令 M 为 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 的极大理想 (x_1, \dots, x_s) . 在 M -准素理想和 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 的封闭子空间 $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{D})$ 之间存在一个双射:

$$\begin{array}{c} \{\mathbb{C}[\mathbf{x}] \text{ 中的 } M\text{-准素理想}\} \\ \uparrow \downarrow \\ \{\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{D}) \text{ 的封闭子空间}\}. \end{array}$$

特别的, 对于零维的 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 上的重数为 μ 的 M -准素理想, 我们有

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}) = \mu.$$

定义 3.4. [33] 空间 $\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$ 的一组基 $\{L_1, \dots, L_s\}$ 是按照微分次数由低到高地排列的, 如果对于任意的 $l > 0$ 总是存在 $j \geq 1$ 使得 $\{L_1, \dots, L_j\}$ 是空间

$$\Delta_{\hat{\mathbf{x}}} \cap \{L \in \mathfrak{D} \mid \deg(L) < l\}, \quad (3.7)$$

的一组基, 那么就把 $\{L_1, \dots, L_s\}$ 称作空间 $\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$ 的一组连续基.

这样的连续基总是存在的, 可以从 $L_1 := D(1)$ 开始计算, 并且从

$$\Delta_{\hat{\mathbf{x}}} \cap \{L \in \mathfrak{D} \mid \deg(L) < l\}, \quad (3.8)$$

的一组基底扩充到

$$\Delta_{\hat{\mathbf{x}}} \cap \{L \in \mathfrak{D} \mid \deg(L) \leq l\}, \quad (3.9)$$

的一组基, 然后再增加 l 的值进行扩充, 当扩充终止我们就得到了 Max Noether 空间 $\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$ 一组连续的基底.

3.3 对偶空间

泛函 $D(\alpha)[\hat{\mathbf{x}}] : \mathbb{C}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{C}$ 含义是:

$$D(\alpha)[\hat{\mathbf{x}}](f(\mathbf{x})) = D(\alpha)(f(\mathbf{x}))|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}.$$

我们知道 Max Noether 空间是由一些算子生成, 而对偶空间是由这些算子在零点处计值的泛函生成的.

定义 3.5. 给定理想 I 的一个零点 $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s)$, 我们定义关于 I 在 $\hat{\mathbf{x}}$ 处的对偶空间为:

$$\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{x}}}(I) := \{L[\hat{\mathbf{x}}] \mid L \in \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{D}), L(f)|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = 0, \forall f \in I\}. \quad (3.10)$$

由此可见, 在零点不引起混淆的情况下, 为了书写简单, 我们求出 Max Noether 条件, 就说找到了理想在这个零点处的对偶空间.

3.3.1 求对偶空间基的一种方法

下面的算法由准素分支算法的输出作为输入条件来求解 Max Noether 条件. 我们已经知道, 求出的 Max Noether 条件在零点处计值的泛函就是生成对偶空间的一组基.

算法: *Max Noether 空间 I*

输入: ▶ 乘法矩阵 M_{x_1}, \dots, M_{x_s} , 重零点 $\hat{\mathbf{x}}$ 和指标 ρ .

输出: ▶ Max Noether 空间 $\Delta_{\hat{\mathbf{x}}}$ 的一组基 $L = \{L_1, \dots, L_\mu\}$.

- 写出多项式 $h \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 在点 $\hat{\mathbf{x}}$ 处的直到 $\rho - 1$ 次的泰勒展开, 系数 $c_\alpha \in \mathbb{C}$:

$$T_{\rho-1}(h) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s, |\alpha| < \rho} c_\alpha (x_1 - \hat{x}_1)^{\alpha_1} \cdots (x_s - \hat{x}_s)^{\alpha_s}.$$

- 通过乘法矩阵 M_{x_1}, \dots, M_{x_s} 计算多项式 h 的正则形式并且在 \hat{x} 处展开:

$$NF(h(x)) = \sum_{\beta} d_\beta (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\beta.$$

- 找到常数 $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ 使得 $d_\beta = \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} c_\alpha$. 对任意 β 满足 $d_\beta \neq 0$, 返回算子

$$L_\beta = \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_s!} \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_s^{\alpha_s} = \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} D(\alpha).$$

另外一种基于 Gröbner 基计算微分算子的方法在 [13] 中给出. 我们的算法可以应用到浮点系数的多项式系统, 因为可以通过算法 SNEPSolver 稳定计算出乘法矩阵从而稳定计算出正则形式. 另外, 多项式 $h(\mathbf{x})$ 的次数在 [13] 中, 他们用重数 μ 作为上界, 然而我们用指标 ρ 作为上界, 根据推论 2.7 他们的选择的上界大于等于我们选择的上界.

例 3.1. (2.4 继续) 我们计算准确根 $(1, 2)$ 的微分条件:

- 写出一个多项式在 $(1, 2)$ 点处直到 $\rho - 1 = 2$ 次的泰勒展开:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) = & c_{0,0} + c_{1,0}(x_1 - 1) + c_{0,1}(x_2 - 2) + c_{2,0}(x_1 - 1)^2 \\ & + c_{1,1}(x_1 - 1)(x_2 - 2) + c_{0,2}(x_2 - 2)^2. \end{aligned}$$

- 形成乘法矩阵(2.12), 我们通过用

$$x_1^2 = -x_2 + 3, x_1 x_2 = 6x_1 + 3x_2 - 10, x_2^2 = -8x_1 + 12.$$

代入 $x_1^2, x_1 x_2, x_2^2$ 中得到 h 的正则形式, 要求的 Max Noether 条件是:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = D(0, 0), \\ L_2 = D(0, 1) - D(2, 0) + 2D(1, 1) - 4D(0, 2), \\ L_3 = D(1, 0) - 2D(2, 0) + 4D(1, 1) - 8D(0, 2). \end{array} \right.$$

我们所求得的这组基不是连续的基底, 因为 $\{L_1, L_2, L_3\}$ 中微分次数小于等于 1 的微分算子生成的线性空间是 $\text{Span}\{D(0, 0)\}$, 它是

$$\Delta_{(1,2)} \cap \{L \in \mathfrak{D} \mid \deg(L) < 2\} = \text{Span}\{D(0, 0), D(1, 0) - 2D(0, 1)\} \quad (3.11)$$

的真子空间, 不满足连续基底的定义.

推论 3.3. 应用 Max Noether 空间 I 算法输出的一组基作用到多项式系统 F , 我们得到新的多项式系统:

$$\{L_j(f_i) \mid L_j \in L, f_i \in F, 1 \leq j \leq \mu, 1 \leq i \leq t\}, \quad (3.12)$$

并且 $\hat{\mathbf{x}}$ 是新的多项式系统的单根.

证明. 如果 $\hat{\mathbf{x}}$ 是新的多项式系统 (3.12) 的一个奇异根, 那么存在一个非平凡的 Max Noether 条件 L_τ , 它的微分次数满足 $|\tau| \geq 1$. 取 $L_\beta \in L$ 使它具有最高的微分次数, 那么 $L_\tau \circ L_\beta$ 是 F 的在 $\hat{\mathbf{x}}$ 处的一个 Max Noether 条件, 并且不在 L 中, 这样我们得到了一个矛盾. \square

如果已知有限精度的奇异的零点 $\hat{\mathbf{x}}$, 在文章 [28, 29] 中提出的 Deflation 方法, 添加新的方程和变元到原来的多项式系统 F 中, 使得 $\hat{\mathbf{x}}$ 变成新的方程组系统的单根的一部分, 那么我们就可以应用经典的牛顿迭代来修正这个解. 我们得到的多项式方程系统 (3.12) 的根 $\hat{\mathbf{x}}$ 也是一个单根, 尽管如此, 我们不清楚是否可以用这里得到的信息解决奇异零点的修正问题.

3.3.2 修正的 SNEPSolver 算法求对偶空间

我们已经应用准素分支算法和 Max Noether 空间 I 算法在表格 3.1 中的一些例子上. 对于一些例子, 因为我们添加了高次数的所有单项式, 系统变得过于庞大而无法计算. 在这一小节中, 我们提出了修正的 SNEPSolver 算法, 这里我们用于验证对合的矩阵要远远小于算法 SNEPSolver 中的矩阵.

假设 $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s)$ 是多元多项式系统 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ 的奇异的孤立零点. 令 $P = (x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_s - \hat{x}_s)$ 并且理想 I 有 P -准素孤立的分支. 令

$$\mathrm{T}_k(F) = \{\mathrm{T}_k(f_1), \dots, \mathrm{T}_k(f_t)\},$$

这里 $\mathrm{T}_k(f_i) = \sum_{|\alpha| \leq k} f_{i,\alpha}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^\alpha$ 表示多项式 f_i 在 $\hat{\mathbf{x}}$ 点处直到次数为 k 的泰勒展开. 因为通过线性变换可以将零点变换到原点, 所以为了简便, 我们假定零点 $\hat{\mathbf{x}}$ 是原点.

理想 (I, P^k) 由多项式 $F_k = \mathrm{T}_k(F) \cup P^k$ 生成. F_k 和它的延拓 $F_k^{(j)}$ 关于单项式 P^k 和 P^{k+j} 的子块是单位阵. 因此符号矩阵是列满秩的, 系统 F_k 和 $F_k^{(j)}$ 的维数和零空间可以由截断系统 $\mathrm{T}_k(F)$ 和 $\mathrm{T}_k(F^{(j)})$ 的系数矩阵计算. 所以我们可以使用截断系统 $\mathrm{T}_k(F)$ 的系数矩阵和它的截断延拓系统 $\mathrm{T}_k(F^{(j)})$ 的系数矩阵计算, 而不是用原来的系统 $F \cup P^k$ 和它的延拓的系数矩阵. 为了简便, 我们仍然使用记号 $M_k^{(j)}$ 表示系统 $\mathrm{T}_k(F^{(j)})$ 的系数矩阵. 记号: $d_k^{(j)} = \dim \mathrm{Nullspace}(M_k^{(j)})$.

既然所有的多项式都在次数为 k 处截断, 系数矩阵 $M_k^{(j)}$ 只有 $\binom{k+s-1}{s}$ 列. 并且延拓次数 m 有一个上界:

$$m \leq \max(1, k - 1 - \min(\mathrm{ldeg}(f_1), \dots, \mathrm{ldeg}(f_t))), \quad (3.13)$$

这里 $\mathrm{ldeg}(f)$ 表示多项式 f 中的单项式的最低次数.

例 3.2. [28] 下面的多项式系统有 15 个正则根和 3 个重数为 4 的奇异根:

$$\{f_1 = x_1^3 + x_2^2 + x_3^2 - 1, f_2 = x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 - 1, f_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - 1\}$$

选择一个奇异的零点 $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)$, 通过坐标变换, 我们得到了新的多项式系统 $\{g_1 = x_1^3 + 3x_1^2 + 3x_1 + x_2^2 + x_3^2, g_2 = x_1^2 + 2x_1 + x_2^3 + x_3^2, g_3 = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + x_3^3\}$ 有重数为 4 的奇异零点 $\hat{\mathbf{x}} = (0, 0, 0)$. 令 $P = (x_1, x_2, x_3)$,

- $k = 2$, 我们有:

$$[\mathrm{T}_2(g_1), \mathrm{T}_2(g_2), \mathrm{T}_2(g_3)]^T = M_2^{(0)} \cdot [x_1, x_2, x_3, 1]^T,$$

这里

$$M_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $d_2^{(0)} = 3$. 延拓的矩阵 $M_2^{(1)}$ 由 $M_2^{(0)}$ 添加一些只含零元素的行得到, 因此 $d_2^{(1)} = 3$ 并且

$$d_2 = \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}] / (I, P^2)) = 3.$$

- $k = 3$, 我们有:

$$[\mathrm{T}_3(g_1), \mathrm{T}_3(g_2), \mathrm{T}_3(g_3)]^T = M_3^{(0)} \cdot [x_1^2, \dots, x_3, 1]^T,$$

这里

$$M_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $d_3^{(0)} = 7$. 第一次延拓后, 得到:

$$\begin{aligned} & [\mathrm{T}_3(x_1 g_1), \mathrm{T}_3(x_1 g_2), \mathrm{T}_3(x_1 g_3), \dots, \mathrm{T}_3(g_3)]^T = \\ & M_3^{(1)} \cdot [x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2^2, x_2 x_3, x_3^2, x_1, x_2, x_3, 1]^T, \end{aligned}$$

这里

$$M_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是 $d_3^{(1)} = 4$. 延拓的矩阵 $M_3^{(2)}$ 由 $M_3^{(1)}$ 添加一些只含零元素的行得到, 因此 $d_3^{(2)} = 4$, 并且

$$d_3 = \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}] / (I, P^3)) = 4.$$

- $k = 4$, 计算得到 $d_4^{(0)} = 17$, $d_4^{(1)} = 8$, 和 $d_4^{(2)} = d_4^{(3)} = 4$. 因此,

$$d_4 = \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}] / (I, P^4)) = 4.$$

因为 $d_3 = d_4 = 4$, $\hat{\mathbf{x}} = (0, 0, 0)$ 的重数是 $\mu = 4$ 并且准素分支的指标是 $\rho = 3$, 准素分支表示为 $Q = (I, P^3)$.

矩阵 $M_3^{(1)}$ 的零空间的维数是 4 并且可以写成

$$N_3^{(1)} = [e_{10}, e_9, e_8, e_5],$$

这里 e_i 表示 10×10 单位矩阵的第 i 列.

有趣的是我们注意到 Max Noether 条件可以通过把 $N_3^{(1)}$ 的这 4 个零向量乘以次数小于 3 的微分算子得到:

$$\{D(0, 0, 0), D(0, 0, 1), D(0, 1, 0), D(0, 1, 1)\}.$$

由系数矩阵 $M_3^{(1)}$ 的零向量求出微分算子绝对不是一次偶然.

定理 3.4. 令 $Q = (I, P^\rho)$ 为理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$ 的在重零点 \hat{x} 处的一个孤立的准素分支. μ 是零点 \hat{x} 的重数. 假设系统 $F_\rho = T_\rho(F) \cup P^\rho$ 在 m 次延拓后对合, 系数矩阵 $M_\rho^{(m)}$ 的零空间由向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_\mu$ 生成. 令

$$\mathbf{L} = [D(\rho - 1, 0, \dots, 0), D(\rho - 2, 1, 0, \dots, 0), \dots, D(0, \dots, 0)]$$

表示包含所有微分次数小于 ρ 次的微分算子的向量. 那么 Max Noether 空间 $\Delta_{\hat{x}}$ 的一组基由下面计算得到

$$L_j = \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}_j, \quad \text{对于 } 1 \leq j \leq \mu.$$

证明. 因为系统 F_ρ 在延拓 m 次后对合, 任意的多项式 $f \in I$, 截断后得到的多项式 $T_\rho(f)$ 的系数向量 \mathbf{f} 可以表示为 $\mathbf{f} = \mathbf{c} \cdot M_\rho^{(m)}$, 这里 \mathbf{c} 是一个复的行向量, 对于 $1 \leq j \leq \mu$, 我们有

$$L_j(f) |_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = L_j(T_k(f)) |_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{c} \cdot M_\rho^{(m)} \cdot \mathbf{v}_j = 0.$$

所以定理正确. \square

定理 3.4 保证了下面给出的第二种 Max Noether 空间算法的正确性.

算法: Max Noether 空间 II

输入: ▶ 理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$ 的一个孤立的奇异零点 $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s)$ 和一个容许误差 τ .

输出: ▶ 准素分支 $Q = (I, P^\rho)$ 的重数 μ , 指标 ρ 和 Max Noether 条件 $L = \{L_1, \dots, L_\mu\}$.

- 通过计算 f_1, \dots, f_t 在 \hat{x} 点的 k 次截断的多变元的泰勒展开形成系数矩阵 $M_k^{(0)}$. 延拓的系数矩阵 $M_k^{(j)}$ 通过移动系数矩阵 $M_k^{(0)}$ 的相应的元素得到.
- 对给定的 τ , 计算 $d_k^{(j)} = \dim \text{Nullspace}(M_k^{(j)})$. 当 $d_k^{(m)} = d_k^{(m+1)} = d_k$ 时停止延拓.
- 如果 $d_k = d_{k-1}$, 那么令 $\rho = k - 1$ 并且 $\mu = d_\rho$.
- $M_\rho^{(m)}$ 的零向量表示为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\mu$. 微分算子按照公式 $L_j = \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}_j$ 计算, 这里 j 取值从 1 到 μ .

需要指出的是，这种算法求出来的基不一定是一组连续基：

例 3.3. (2.4 继续) 通过坐标变换，得到新的方程组系统：

$$\{g_1 = x_1^2 + 2x_1 + x_2, g_2 = x_1 + 0.125x_2^2 + 0.5x_2\},$$

$\hat{\mathbf{x}} = (0, 0)$ 是它的一个三重根。令 $I = (g_1, g_2)$ 和 $P = (x_1, x_2)$.

- $k = 2$ 时，我们得到：

$$[\mathbf{T}_2(g_1), \mathbf{T}_2(g_2)]^T = M_2^{(0)} \cdot [x_1, x_2, 1]^T,$$

这里

$$M_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

并且 $d_2^{(0)} = 2$ ，延拓矩阵 $M_2^{(1)}$ 就是在矩阵 $M_2^{(0)}$ 添加一些零元素组成的向量，因此 $d_2^{(1)} = 2$ 而且

$$d_2 = \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]/(I, P^2)) = 2.$$

- $k = 3$ 时，我们得到：

$$[\mathbf{T}_3(g_1), \mathbf{T}_3(g_2)]^T = M_3^{(0)} \cdot [x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1, x_2, 1]^T,$$

这里

$$M_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

并且 $d_3^{(0)} = 4$. 经过第一次延拓，得到矩阵：

$$[\mathbf{T}_3(x_1g_1), \dots, \mathbf{T}_3(x_2g_2), \mathbf{T}_3(g_1), \mathbf{T}_3(g_2)]^T = M_3^{(1)} \cdot [x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_1, x_2, 1]^T,$$

这里

$$M_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 1 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

并且 $d_3^{(1)} = 3$. 延拓矩阵 $M_3^{(2)}$ 也是通过在矩阵 $M_3^{(1)}$ 中添加零元素组成的向量得到, 因此 $d_3^{(2)} = 3$, 而且

$$d_3 = \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]/(I, P^3)) = 3.$$

- $k = 4$ 时, 计算得到 $d_4^{(0)} = 4$, 和 $d_4^{(1)} = d_4^{(2)} = 3$, 因此

$$d_4 = \dim(\mathbb{C}[\mathbf{x}]/(I, P^4)) = 3.$$

因为 $d_3 = d_4 = 3$, 零点 $\hat{\mathbf{x}} = (0, 0)$ 的重数 $\mu = 3$ 和指标 $\rho = 3$. 通过矩阵 $M_4^{(1)}$ 的零向量相对于正规集 $\{x_1, x_2, 1\}$ 计算的乘法矩阵:

$$M_{x_1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{x_2} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

理想 I 在 $(0, 0)$ 处的准素分支是

$$(x_1^2 + 2x_1 + x_2, x_2^2 + 8x_1 + 4x_2, x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2).$$

显然的, 我们可以通过把坐标变换回去得到 (f_1, f_2) 在 $(1, 2)$ 处的准素分支

$$(x_1^2 + x_2 - 3, x_2^2 + 8x_1 - 12, x_1x_2 - 6x_1 - 3x_2 + 10).$$

矩阵 $M_3^{(1)}$ 的零空间是 3 维的,

$$N_3^{(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Max Noether 空间的一组基可以通过把微分次数小于 3 的微分算子形成的行向量乘以零空间 $N_3^{(1)}$ 的一组基得到:

$$\begin{cases} L_1 = D(0, 0), \\ L_2 = D(0, 1) - D(2, 0) + 2D(1, 1) - 4D(0, 2), \\ L_3 = D(1, 0) - 2D(2, 0) + 4D(1, 1) - 8D(0, 2). \end{cases}$$

这与我们 Max Noether 空间 I 算法的计算结果吻合, 根据前文的分析, 我们知道这组基不是连续的.

但是, 把 Max Noether 空间 II 算法稍作调整, 我们仍然可以计算 Max Noether 空间的一组连续的基底.

算法: 连续基底

输入: ▶ 理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$ 的一个孤立的奇异零点 $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s)$ 和一个容许误差 τ .

输出: ▶ 准素分支 $Q = (I, P^\rho)$ 的重数 μ , 指标 ρ 和 Max Noether 空间的一组连续基底 $L = \{L_1, \dots, L_\mu\}$.

- 通过计算 f_1, \dots, f_t 在 \hat{x} 点的 k 次截断的多变元的泰勒展开形成系数矩阵 $M_k^{(0)}$. 延拓的系数矩阵 $M_k^{(j)}$ 通过移动系数矩阵 $M_k^{(0)}$ 的相应的元素求得.
- 对给定的 τ , 计算 $d_k^{(j)} = \dim \text{Nullspace}(M_k^{(j)})$. 当 $d_k^{(m)} = d_k^{(m+1)} = d_k$ 时停止延拓. 求出空间 $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{\mu(k-1)}\}$ 在对合形式的零空间中的正交补空间 $\text{Span}\{\mathbf{v}_{\mu(k-1)+1}, \dots, \mathbf{v}_{\mu(k)}, \mu(k) \leq \mu\}$, 按照公式 $L_j = \mathbf{L}|_{\leq k-1} \cdot \mathbf{v}_j$ 计算出 $\mu(k)$ 个基, 这里 $\mathbf{L}|_{\leq k-1}$ 表示所有微分次数小于等于 $k-1$ 的算子形成的行向量.
- 如果 $d_k = d_{k-1}$, 那么令 $\rho = k-1$ 并且 $\mu = d_\rho$.

证明. 根据定理 3.4, 我们求出来的

$$L_j = \mathbf{L}|_{\leq k-1} \cdot \mathbf{v}_j \quad (3.14)$$

是 (I, P^{k-1}) 的在 \hat{x} 点的 Max Noether 空间的一组基. 而

$$(I, P^k) \subseteq (I, P^{k-1})$$

所以 (3.14) 也是 $Q = (I, P^k)$ 的基的一部分. 求 (I, P^k) 的在 \hat{x} 点的 Max Noether 空间的一组基时, 保留 $k-1$ 情形下求出的基, 并且再扩充成 (I, P^k) 的对偶空间的基. 由连续基定义可知这种方法正确. \square

例 3.4. (2.4 继续)

- 首先 Max Noether 空间基一定包含 $\{D(0, 0)\}$,
- $k = 2$ 时, $\text{Span}\{[0, 0, 1]^T\}$ 在对合系统的系数矩阵 $M_2^{(0)}$ 的零空间的正交补空间是 1 维的,

$$\text{Span}\{[-1, 2, 0]^T\},$$

所以 Max Noether 条件: $\{D(0, 0), -D(1, 0) + 2D(0, 1)\}$,

- $k = 3$ 时, 空间

$$\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

的正交补空间是 $\text{Span}\{[-5, 10, -20, 2, 1, 0]^T\}$. 所以 Max Noether 空间的一组连续基底:

$$\begin{cases} L_1 = D(0, 0), \\ L_2 = -D(1, 0) + 2D(0, 1), \\ L_3 = 2D(1, 0) + D(0, 1) - 5D(2, 0) + 10D(1, 1) - 20D(0, 2). \end{cases}$$

注 3. 如果零点不是原点, 我们仍然可以这样计算系数矩阵 $M_k^{(0)}$: 进行坐标变换 $y_i = x_i - \hat{x}_i$, 这里的 $1 \leq i \leq s$, 计算多项式 $f_1(y_1 + \hat{x}_1, \dots, y_s + \hat{x}_s), \dots, f_t(y_1 + \hat{x}_1, \dots, y_s + \hat{x}_s)$ 的关于变元 y_1, \dots, y_s 的系数. 虽然这是一种办法, 但是实际中我们只需要 $y_1^{\alpha_1} \cdots y_s^{\alpha_s}$ 的总次数小于 k 的项的系数, 因此我们计算点 \hat{x} 处直到 k 次的泰勒展开是省力的做法. 不仅如此, 计算泰勒展开还可以避免坐标变换带来的数值稳定性上的困扰, 从而使我们的算法具有很高的数值稳定性.

Dayton 和 Zeng 的文章 [15] 中, 他们计算微分条件从对偶空间出发. 我们从多项式理想出发进行计算, 我们的方法可以看作是相互对偶的.

定理 3.5. Max Noether 空间 II 算法的复杂度是:

$$\mathcal{O}\left(t\binom{\rho+s-1}{s}^3\right).$$

证明. Max Noether 空间 II 算法主要是计算至多是 $t \binom{\rho+s-1}{s} \times \binom{\rho+s-1}{s}$ 的矩阵的零向量. \square

注 4. 在文章 [37] 中, 他们的计算微分条件的算法的复杂度是 $\mathcal{O}((s^2 + t)\mu^3)$. 一般说来, 因为 $\mu \leq \binom{\rho+s-1}{s}$, 所以我们的复杂度要高. 因为我们在每个方向上进行延拓. 在某种意义上, 我们牺牲了一些效率, 保证算法的数值稳定性.

3.3.3 总结与实验

多项式零点的重根结构近些年受到高度重视, 被广泛研究 [7, 13, 14, 15, 22, 31, 32, 35, 36, 37]. 在这一章中, 我们设计了基于多项式几何对合形式, 求解奇异的零点的重根结构的算法. 如果奇异零点是准确知道的, 此时我们通过准确的线性代数计算指标、重数、微分结构. 当给定的奇异零点是具有有限精度的, 我们计算中就要选择适当的容许误差, 这种情形下, 我们也设计了一个算法, 可以提高近似奇异零点的精度, 如表格 3.1 中最后一列所示, 其中空白表示矩阵太大所用计算机存储空间不足无法计算出结果, 可见, 缩小我们的矩阵, 提高算法效率势在必行. 下面的实验是使用 Maple 11 在 Windows 环境下, 采用 Digits := 14 操作的. 其中的 DZ1 和 DZ2 选自 [15]. 系统 D2 出自 [14] 是一个正维的多项式系统, 但是我们仍然可以计算原点处的准素分支, 因为这个分支是孤立的零维的. 其它的例子参见 PHCpack 的演示例子 <http://www.math.uic.edu/~jan/>. 下面表格中的第二列表示奇异的零点 \hat{x} , 其中的 $Z_2 = (-.7071, .4082, .5774, .2500, -.1443, -.4082)$. ρ 和 μ 分别表示指标和重数. 最后一列中一个箭头表示通过算法 SNEPSolver 进行一次计算的奇异零点的准确数字个数的变化.

System	Zero	ρ	μ	SNEPSolver
cmbs1	(0, 0, 0)	5	11	5 → 14
cmbs2	(0, 0, 0)	4	8	5 → 15
mth191	(0, 1, 0)	3	4	5 → 10 → 15
LVZ	(0, 0, -1)	8	18	
KSS	(1, 1, 1, 1, 1, 1)	5	16	
Caprasse	(2, $-i\sqrt{3}$, 2, $i\sqrt{3}$)	3	4	5 → 14
DZ1	(0, 0, 0, 0)	11	131	5 → 14
DZ2	(0, 0, -1)	8	16	
tangents1	Z_2	4	4	
D2	(0, 0, 0)	5	5	5 → 10 → 15
Ojika1	(1, 2)	3	3	5 → 7 → 14
Ojika2	(0, 1, 0)	2	2	5 → 10 → 15
Ojika3	(0, 0, 1)	3	4	5 → 9 → 14
Ojika4	(0, 0, 1)	3	3	5 → 10 → 14

表 3.1: 算法实验

第四章 多项式近似奇异零点二次收敛的广义牛顿迭代算法

4.1 前言

牛顿迭代法 (Newton's method) 又称为牛顿-拉夫逊方法 (Newton-Raphson method)，它是牛顿在17世纪提出的一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法，在数学史上对于牛顿关于牛顿迭代方公式的解说详见 [10]. 对于单变元方程，五次和五次以上的方程不存在求根公式，因此求精确根非常困难，甚至不可能，从而寻找方程的近似根就显得特别重要. 牛顿迭代法是求方程根的重要方法之一，其最大优点是在方程 $f(x) = 0$ 的单根附近具有平方收敛，而且该方法还对单变元方程的重根有修正公式仍然保持二次收敛性，被广泛用于计算机编程中. 求解多项式系统的数值方法如同伦算法 [53]，可以求得比较粗糙的近似解，然后通过局部的线性逼近（牛顿迭代）修正到满意的精度. 对于重零点的特征值方法的详细论述见文章 [35]. 对于多变元多项式方程组的重零点修正问题在近些年得到了广泛关注，并且有大批的文章涌现，讨论 Deflation 方法的有 [42, 43, 28, 29, 30] 等，讨论对于牛顿迭代方法的修正 [27] 等. 我们的方法是基于计算多项式系统的对合形式，提出近似重根的二次收敛的广义牛顿迭代算法.

4.2 牛顿方法回顾

我们首先回顾一下单变元的牛顿迭代方法，因为原创的思想给人很多启发.

4.2.1 牛顿的方法处理近似根

我们先看一下牛顿展示他的对于近似实根的处理 [10]:

考虑方程 $y^3 - 2y - 5 = 0$ ，首先猜测出在 $y = 2$ 附近有一个根，但是 $y = 2$ 并不是方程的根，于是牛顿把他的猜测作了微小的修正，把 $y = 2 + p$ 代入方程得到

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0. \quad (4.1)$$

忽略非线性项，即省略二阶及以上的小量，也就得到了 $10p - 1 = 0$ ，从而 $p = 0.1$ ，于是牛顿得到了方程的新的近似根 $y = 2 + p = 2 + 0.1$. 因为 $y = 2.1$

仍然不是方程的根，牛顿重复上面的过程对 p 进行修正。用 $p = 0.1 + q$ 代入方程 (4.1)，得到

$$q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0. \quad (4.2)$$

再一次忽略高次项得到 $11.23q + 0.061 = 0$ ，因此 $q = -0.0054$ ，到目前为止，牛顿的近似根为 $y = 2 + 0.1 - 0.0054$ 。同样对 q 进行修正，把 $q = -0.0054 + r$ 代入方程 (4.2) 中，得

$$r^3 + 6.2838r^2 + 11.162r + 0.000541551 = 0. \quad (4.3)$$

通过 $11.162r + 0.000541551 = 0$ 求得 $r = -0.00004852$ ，这样我们得到了比较高精度的近似解 $y = 2 + 0.1 - 0.0054 - 0.00004852$ 。

注 5. 牛顿的这种算法的二次收敛性质显而易见的。

4.2.2 Raphson 的迭代公式

接下来，我们看看 Raphson 是怎么处理方程 $y^3 - 2y - 5 = 0$ 在 $y = 2$ 处求近似根的问题 [10]。开始一步跟牛顿的做法相同，把 $y = 2 + p$ 代入得到方程 (4.1)，于是要解 $10p - 1 = 0$ ，从而 $p = 0.1$ ，这样就得到了新的近似根 $y = 2 + p = 2 + 0.1$ 。需要强调的是，下一步就是他们方法的差别所在了：

- 牛顿把 $p = 0.1 + q$ 代入到方程 (4.1)，
- Raphson 则是把 $y = 2.1 + q$ 代入到原始方程中，

虽然，Raphson 也得到方程 (4.2)，接着正如牛顿做法那样，第二次得到了近似根 $y = 2.1 + q = 2.0946$ ，下面每一次，Raphson 都是带入原始方程中求修正部分。牛顿和 Raphson 的做法代数上是等价的，但是牛顿是递归地表达他的算法，Raphson 的表达则是简单的迭代过程，并且把这种表达表示为 $x_{n+1} = g(x_n)$ ，这里面的

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (4.4)$$

尽管当时，Raphson 并没有把分母表示成一个微分的形式，他的这种表达在概念上面更加简单。

4.2.3 迭代方法的二次收敛性证明

以下证明见 [1] 单变元的方程的近似单根的迭代公式:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.5)$$

假设这个准确解为: α , 只要 $f'(\alpha) \neq 0$, 那么在 α 的一个邻域上不动点 $x = \varphi(x)$ 与 $f(x) = 0$ 等价.

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \varphi(x). \quad (4.6)$$

若 α 为 $f(x) = 0$ 的单零点, 那么 $f'(\alpha) \neq 0$, 此时迭代误差

$$x_{n+1} - \alpha = \varphi(x_n) - \varphi(\alpha) \quad (4.7)$$

$$= (x_n - \alpha)\varphi'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2}\varphi''(\xi_n) \quad (4.8)$$

$$= \frac{(x_n - \alpha)^2}{2}\varphi''(\xi_n), \quad (4.9)$$

因为,

$$\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} + \frac{f(\alpha)}{f''(\alpha)} = 0. \quad (4.10)$$

容易计算,

$$\varphi''(x) = \frac{-2f(x)(f''(x))^2 + (f'(x))^2f'''(x) + f(x)f'(x)f''(x)}{(f'(x))^3},$$

因而有

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}. \quad (4.11)$$

当 n 充分大的时候, $\xi_n \approx \alpha$, 因而 $\varphi''(\xi_n) \approx \varphi''(\alpha)$. 得到

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^2} \approx \frac{1}{2}|\varphi''(\alpha)|. \quad (4.12)$$

注 6. 当零点 α 的重数是 μ , 我们可以做迭代

$$x_{n+1} = x_n - \mu \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (4.13)$$

与上面证明过程类似的迭代仍然是二阶收敛的. 在实际应用中, 如果我们已知重数 μ , 那么零点 α 是 $f^{(\mu-1)}(x)$ 的单根, 所以对 $f^{(\mu-1)}(x)$ 有数值稳定的二次收敛的牛顿迭代公式.

4.3 多变元多项式的奇异零点的修正方法 Deflation

对于多变元方程的近似单根，有经典的高斯-牛顿迭代提高解的精度。那么对于多元多项式的奇异零点的处理方法，主要是有二十几年历史的 Deflation 方法 [28, 29, 42, 44]。我们将在这小节简要介绍 LVZ 的 Deflation 方法的主要思想。考虑多项式系统 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ ，对于 $i = 1, \dots, t$ ，多项式 $f_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ 。我们考虑的多项式系统不是欠定的，简单说一般认为 $t \geq s$ 。一个重根 $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_s)$ ，重数用 μ 表示，在这一点处的雅可比矩阵 $J(\hat{\mathbf{x}}) \in \mathbb{C}^{t \times s}$ 是亏秩的：

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_t}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_t}{\partial x_s} \end{bmatrix}_{t \times s}.$$

设 $\text{rank}(J(\hat{\mathbf{x}})) = r < s$ ，那么几乎所有随机选取的 $s \times (r+1)$ 的矩阵 B ，乘积矩阵 $J(\hat{\mathbf{x}})B$ 可以是亏秩为一的。因此，对于几乎所有的 $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{r+1}$ 线性系统

$$\begin{bmatrix} J(\hat{\mathbf{x}})B \\ \mathbf{b}^H \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}$$

有唯一的解 $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}$ 。并且 $[\dots]^H$ 表示共轭转置。构造新的 $(2t+1) \times (s+r+1)$ 的方程组

$$\hat{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_t(\mathbf{x}) \\ \mathbf{b}^H \mathbf{y} - 1 \\ J(\hat{\mathbf{x}})B \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

其中变元

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix},$$

有一个孤立解 $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}}$ ，并且分量 $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ 和 $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}$ 。

定理 4.1. $\hat{\mathbf{z}}$ 关于系统 \hat{F} 的重数严格小于 $\hat{\mathbf{x}}$ 关于系统 F 的重数。

证明。参见 [28].

□

我们把上面过程称为一次 Deflation. 如果得到的 $\hat{\mathbf{z}}$ 仍然是系统 \hat{F} 的重根, 那么就重复上面的构造过程. 在文章 [28] 他们证明了 Deflation 次数严格小于 $\hat{\mathbf{x}}$ 的重数. 所以这种递归过程最终会得到一个多项式系统 $G(\mathbf{u})$, 而且 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$ 是它的一个单根, 从而可以运用具有二次收敛的经典牛顿迭代提高近似解的精度. 在文章 [15] 中, 对 LVZ 的 Deflation 方法进行了对偶分析. 对于 $\alpha \in \{0, 1, \dots\}$, 我们用 $\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{x}}}(I)$ 表示由对偶空间 $\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{x}}}(I)$ 中的所有次数小于等于 α 的范函生成的线性空间, 那么这个空间与希尔伯特函数 $H(x)$ 的关系为:

$$\begin{cases} H(0) = \dim(\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{x}}}^0(I)) \equiv 1, \\ H(\alpha) = \dim(\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{x}}}^\alpha(I)) - \dim(\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{x}}}^{\alpha-1}(I)), \quad \alpha \in \{1, 2, \dots\}. \end{cases} \quad (4.14)$$

定义 4.1. 对偶空间 $\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{x}}}(I)$ 的宽度 $\beta_{\hat{\mathbf{x}}}(I)$ 和深度 $\delta_{\hat{\mathbf{x}}}(I)$ 为

- $\beta_{\hat{\mathbf{x}}}(I) = H(1)$,
- $\delta_{\hat{\mathbf{x}}}(I) = \max\{\alpha \mid H(\alpha) > 0\}$.

由定义容易得到:

命题 4.2. 指标 ρ 等于深度 δ 加一, 即,

$$\rho = \delta + 1 \quad (4.15)$$

下面给出一个例子, 让大家直观看一下这些结构不变量:

例 4.1. 考虑理想 $I = (x_1^3, x_1^2x_2 + x_2^4)$ 的重零点 $(0, 0)$, 它的结构不变量:

- 重数 $\mu = 12$,
- 希尔伯特函数 $\{1, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 0, \dots\}$ 是 12 的一个划分,
- 对偶空间 $\mathcal{D}_{\hat{\mathbf{x}}}(I)$ 是 12 维的, 按照希尔伯特函数把它的一组基底进行划分表达, 这也就是我们说的重根结构:

$$\overbrace{D(0, 0)}^1, \quad \overbrace{D(1, 0), D(0, 1)}^2, \quad \overbrace{D(2, 0), D(1, 1), D(0, 2)}^3, \quad \overbrace{D(1, 2), D(0, 3)}^2, \\ \overbrace{D(1, 3), D(0, 4) - D(2, 1)}^2, \quad \overbrace{D(0, 5) - D(2, 2)}^1, \quad \overbrace{D(0, 6) - D(2, 3)}^1$$

- 宽度 $\beta_{(0,0)}(I) = 2$, 深度 $\delta_{(0,0)}(I) = 6$, 指标 $\rho = 7$.

Dayton 和 Zeng 在 [15] 中指出: 当宽度为一, 即 $\beta_{\hat{\mathbf{x}}}(I) = 1$ 时, 希尔伯特函数是 $\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots\}$, 深度等于重数减一, 即 $\delta_{\hat{\mathbf{x}}}(I) = \mu - 1$, 计算实验表明这种情况下需要的 Deflation 次数是最多的, 并且把原来的 $t \times s$ 系统扩张到 $(2^{\mu-1}t) \times (2^{\mu-1}s)$ 的系统. 这种指数的增长会大大降低算法效率, 这就是我们要提出多元多项式的重根修正的新方法的原因.

4.4 广义牛顿迭代

假定我们已知多项式系统 $F = \{f_1, \dots, f_t\}$ 的一个近似的奇异零点

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}} + \hat{\mathbf{x}}_{\text{error}},$$

这里 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$ 表示近似解中的误差部分, 而 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}}$ 表示方程系统的精确解, 它的重数为 μ 和指标为 ρ . 通过坐标变换 $y_i = x_i - \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, s$, 我们得到了一个新的多项式系统 $G = \{g_1, \dots, g_t\}$, 这里

$$g_j(y_1, \dots, y_s) = f_j(y_1 + \hat{x}_{1,\text{exact}} + \hat{x}_{1,\text{error}}, \dots, y_s + \hat{x}_{s,\text{exact}} + \hat{x}_{s,\text{error}}), \quad j = 1, \dots, t.$$

下面的引理看起来一目了然, 然而它对于我们算法正确性证明确实至关重要.

引理 4.3. 多项式系统 G 有一个准确解

$$\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}} = (-\hat{x}_{1,\text{error}}, \dots, -\hat{x}_{s,\text{error}}) \quad (4.16)$$

并且它的指标 ρ , 重数 μ 跟多项式系统 F 的解 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}}$ 的指标和重数一样.

证明. 显然 $g_i(-\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}) = f_i(\hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}}) = 0$ 对于 $i = 1, \dots, t$. 并且给定 F 的在点 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}}$ 处的 Max Noether 空间的一组基 $\{L_1, \dots, L_\mu\}$, 其中的 $j = 1, \dots, \mu$, 并且 $i = 1, \dots, t$,

$$L_j(g_i(\mathbf{y}))|_{\mathbf{y}=-\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}} = L_j(f_i(\mathbf{y} + \hat{\mathbf{x}}))|_{\mathbf{y}=-\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}} = L_j(f_i(\mathbf{x}))|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}}} = 0.$$

因此 $\{L_1, \dots, L_\mu\}$ 也是 G 在点 $\hat{\mathbf{y}}$ 处的 Max Noether 空间的一组基. \square

考虑多项式系统

$$\bar{G} = \{g_1, \dots, g_t, (\mathbf{y} + \hat{\mathbf{x}}_{\text{error}})^\alpha, |\alpha| = \rho + 1\},$$

这里 ρ 是零点 $-\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$ 的指标. 由引理 4.3, 我们知道这个多项式系统只有一个指标为 ρ 的奇异零点 $-\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$. 集合 \bar{G} 中的多项式生成了一个孤立的准素理想表示为 \bar{Q} . 假设系统 \bar{G} 在 m 次延拓后对合, 我们把此时的系数矩阵表示为:

$$M = \begin{bmatrix} M'_h & M'_l \\ M_h & M_l \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

这里 $[M'_h \ M'_l]$ 和 $[M_h \ M_l]$ 分别表示多项式系统 $\{(\mathbf{y} + \hat{\mathbf{x}}_{\text{error}})^\alpha, |\alpha| = \rho + 1\}$ 和 $\{g_1, \dots, g_t\}$ 及它们的延拓后的关于高次的单项式

$$[\mathbf{y}^{\rho+m}, \dots, \mathbf{y}^{\rho+1}]$$

和低次的单项式

$$[\mathbf{y}^\rho, \dots, \mathbf{y}, 1]$$

的系数矩阵. 注意到

$$M_l = M_{\rho+1}^{(m)}, \quad (4.18)$$

这里 $M_{\rho+1}^{(m)}$ 是截断系统

$$G_{\rho+1} = \{\mathbf{T}_k(g_1), \dots, \mathbf{T}_k(g_t)\}$$

延拓到 m 次的系数矩阵, 并且

$$M'_h = \begin{bmatrix} I_{\rho+m} & \cdots & \tilde{M}_h \\ & \ddots & \vdots \\ & & I_{\rho+1} \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

这里 $I_{\rho+i}$ 是维数为 $\binom{s+\rho+i-1}{\rho+i}$ 的单位矩阵.

定理 4.4. 假定 $\{L_1, \dots, L_\mu\}$ 是多项式系统 G 在 $\hat{\mathbf{y}}$ 处的 Max Noether 空间的一组基, 多项式系统 \bar{G} 经过 m 次延拓后达到对合, 此时的系数矩阵为 M , 我们有

$$\{L_1(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m})|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m})|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\} \quad (4.20)$$

是 M 的零空间的一组基, 这里 $\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$ 并且

$$\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m}^T = [y_1^{\rho+m}, \dots, y_s^{\rho+m}, y_1^\rho, \dots, y_s, 1]^T. \quad (4.21)$$

证明. 因为 $\{L_1, \dots, L_\mu\}$ 是多项式系统 G 在零点 $\hat{\mathbf{y}}$ 处的 Max Noether 空间的一组基, 对于任何 $L_i \in L$, $i = 1, \dots, \mu$, 我们有

$$L_i(M \cdot [y_1^{\rho+m}, \dots, y_s^{\rho+1}, y_1^\rho, \dots, \dots, y_s, 1]^T) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{0}.$$

显然,

$$M[L_i(y_1^{\rho+m}), \dots, L_i(y_s^{\rho+1}), L_i(y_1^\rho), \dots, L_i(y_s), L_i(1)]^T |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{0}.$$

因此 $L_i(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m}) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}$, $i = 1, \dots, \mu$ 是系数矩阵 M 的零向量.

由指标的定义, 我们可以从向量中选择 μ 个单项式构成商空间 $\mathbb{C}[\mathbf{y}]/\bar{Q}$ 作为复数域上的线性空间的一组基, 这里向量 $\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho-1}$ 是包含所有次数小于等于 $\rho - 1$ 次的单项式. 既然 $\{L_1 |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\}$ 是 $\mathbb{C}[\mathbf{y}]/\bar{Q}$ 对偶空间的一组基, 我们知道

$$L_1(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho-1}) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho-1}) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}} \quad (4.22)$$

是线性无关的. 因此,

$$L_1(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m}) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m}) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}$$

是线性无关的. \square

如果我们由系数矩阵 M 的零向量形成乘法矩阵 $\{M_{y_1}, \dots, M_{y_s}\}$, 那么 $\frac{1}{\mu} \text{Tr}(M_{y_i}) = -\hat{x}_{i,\text{error}}$ 因为 \bar{G} 只有一个重数为 μ 的解 $\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$.

如果我们已知多项式系统 F 的一个近似的零点 $\hat{\mathbf{x}}$, 这个近似零点距离真实零点 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{exact}}$ 不远, 即,

$$\|\hat{\mathbf{y}}\| = \|-\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}\| = \mathcal{O}(\varepsilon) \ll 1. \quad (4.23)$$

这里及以后, $\|\cdot\|$ 用来表示无穷范数.

我们下面证明了具有两倍准确数字的近似零点 $\hat{\mathbf{y}}$ 可以由 $M_{\rho+1}^{(m)}$ 的零向量计算, 因此没有必要用整个大矩阵 M (4.17) 来计算.

推论 4.5. 设 $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_h^T, \mathbf{v}_l^T]^T$ 是 (4.17) 中定义的大矩阵 M 的规范化的零向量, 这里 \mathbf{v}_h 和 \mathbf{v}_l 分别是长度为 $\binom{\rho+m+s}{\rho+m} - \binom{\rho+s}{\rho}$ 和 $\binom{\rho+s}{\rho}$ 的列向量, 那么 $\|\mathbf{v}_h\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

证明. 根据定理 4.4, 我们知道

$$\{L_1(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m})|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m})|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\}$$

是矩阵 M 的零空间的一组基.

选出微分次数最高的一项, 不失一般性, 表示为 L_μ , 它的微分次数为 $\rho - 1$. 把它作用到次数为 $|\alpha|$ 的单项式上, 我们得到

$$L_\mu(\mathbf{y}^\alpha) = \sum_{|\beta|=|\alpha|-\rho+1} c_\beta \mathbf{y}^\beta, \quad c_\beta \in \mathbb{C}. \quad (4.24)$$

如果 $|\alpha| \geq \rho + 1$, 那么 $|\beta| \geq 2$, 因此 $\|L_\mu(\mathbf{y}^\alpha)|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 当 $\|\hat{\mathbf{y}}\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$.

对于 i 从 1 到 μ , 我们有

$$\|(L_i([\mathbf{y}^{\rho+m}, \dots, \mathbf{y}^{\rho+1}]^T)|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\| \leq \|(L_\mu([\mathbf{y}^{\rho+m}, \dots, \mathbf{y}^{\rho+1}]^T)|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.25)$$

并且, 根据对偶性质有,

$$\|L_i(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho-1})|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\| = \mathcal{O}(1). \quad (4.26)$$

对于任意规范化的矩阵 M 的零向量 $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_h^T, \mathbf{v}_l^T]^T$, \mathbf{v} 可以写成 $L_i(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m})|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}$ 的线性组合, 并且 \mathbf{v}_h 是高次的大小为 $\|L_i(\mathbf{y}^\alpha)|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 项的线性组合, 这里的 $|\alpha| \geq \rho + 1$ 并且 $i = 1, \dots, \mu$. 因为 (4.25), (4.26) 和 $\|\mathbf{v}\| = 1$ 所以 $\|\mathbf{v}_h\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2)\|\mathbf{v}_l\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. \square

对于在 (4.17) 中定义的矩阵 M , 由于它的子块 M'_h 的特殊的结构, 详见 (4.19), 存在可逆矩阵 P_1 , 使得 $P_1 M'_h = I$.

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ -M_h & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M'_h & M'_l \\ M_h & M_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \tilde{M}_l \\ \mathbf{0} & M_l - M_h \tilde{M}_l \end{bmatrix},$$

这里, $\tilde{M}_l = P_1 M'_l$. 因此, 计算 M 的零向量等价于计算 $M_l - M_h \tilde{M}_l$ 的零向量.

假设 $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_h^T, \mathbf{v}_l^T]^T$ 是矩阵 M 的一个规范化的零向量,

$$\begin{bmatrix} I & \tilde{M}_l \\ \mathbf{0} & M_l - M_h \tilde{M}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_h \\ \mathbf{v}_l \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

根据推论 4.5, 得到 $\mathbf{v}_h + \tilde{M}_l \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$,

$$\|\tilde{M}_l \mathbf{v}_l\| = \|\mathbf{v}_h\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

另外, 因为 $M_l \mathbf{v}_l - M_h \tilde{M}_l \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$, 所以

$$\|M_l \mathbf{v}_l\| = \|M_h \tilde{M}_l \mathbf{v}_l\| \leq \|M_h\| \|\tilde{M}_l \mathbf{v}_l\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

我们有下面的一个定理:

定理 4.6. 假设 $\{L_1, \dots, L_\mu\}$ 是 G 在 $\hat{\mathbf{y}}$ 的 Max Noether 空间的一组基, 截断的多项式系统

$$G_{\rho+1} = \{\mathbf{T}_k(g_1), \dots, \mathbf{T}_k(g_t)\}$$

经过 m 次延拓后对合, 它的系数矩阵是 $M_l = M_{\rho+1}^{(m)}$.

对于大约为 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 的容许误差, 我们有

$$\{L_1(\mathbf{v}(\mathbf{y})_\rho) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu(\mathbf{v}(\mathbf{y})_\rho) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\} \quad (4.27)$$

是矩阵 $M_{\rho+1}^{(m)}$ 的零空间的一组基, 这里 $\hat{\mathbf{y}} = -\hat{\mathbf{x}}_{\text{error}}$ 而且

$$\mathbf{v}(\mathbf{y})_\rho^T = [y_1^\rho, y_1^{\rho-1} y_2, \dots, y_1, \dots, y_s, 1]^T.$$

证明. 根据定理 4.4,

$$\{L_1(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m}) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}, \dots, L_\mu(\mathbf{v}(\mathbf{y})_{\rho+m}) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\}$$

是矩阵 M 的零空间的一组基. 根据推论 4.5 以及上面的分析, 我们得到

$$\|M_{\rho+1}^{(m)} L_i(\mathbf{v}(\mathbf{y})_\rho) |_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}}\| = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad 1 \leq i \leq \mu.$$

根据 (4.22), 零向量 (4.27) 是线性无关的. □

注 7. 根据定理 4.6, 如果我们选择一个 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 的容许误差去计算矩阵 M_l 的秩, 那么会发现

$$\dim \text{Nullspace}(M_{\rho+1}^{(m)}) = \dim \text{Nullspace}(M).$$

而且, 乘法矩阵 $\{\tilde{M}_{y_1}, \dots, \tilde{M}_{y_s}\}$ 是由 $M_{\rho+1}^{(m)}$ 的零向量的线性关系解出来的, 详细的解释说明请参考 [48]. 根据定理 4.4 和定理 4.6, 我们有

$$\frac{1}{\mu} \text{Tr}(\tilde{M}_{y_i}) = \frac{1}{\mu} \text{Tr}(M_{y_i}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = -\hat{x}_{i,\text{error}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.28)$$

因此, 我们求出误差部分是具有两倍的准确数字的.

有了上面的讨论, 我们的修正奇异零点的算法已经成熟:

算法：重根修正

输入：► 理想 $I = (f_1, \dots, f_t)$ 的一个孤立的近似的奇异零点 \hat{x} , 容许误差 τ .
 输出：► 修正的解 \hat{x} , 它的重数 μ 和指标 ρ , 准素分支 $Q = (I, P^\rho)$ 和 Max Noether 空间的一组基 $L = \{L_1, \dots, L_\mu\}$.

- 对给定的解 \hat{x} 和容许误差 τ , 应用准素分支算法估计重数 μ 和指标 ρ .
- 假设截断系统 $G_{\rho+1}$ 在 m 次延拓后对合, 由 $M_{\rho+1}^{(m)}$ 的零向量形成乘法矩阵 M_{x_1}, \dots, M_{x_s} , 再由每个乘法矩阵的迹的平均值得到近似根 \hat{y} .
- 令 $\hat{x} = \hat{x} + \hat{y}$ 再一次地运行上面的两个步骤, 每一次运行要根据得到的解 \hat{y} 相应地减小容许误差.
- 如果 \hat{y} 收敛到原点, 那么我们得到具有高精度的修正了的解 \hat{x} . 应用准素分支算法计算准素分支和 Max Noether 空间 II 算法计算理想 I 在这个修正解处的 Max Noether 空间. 否则, 减小容许误差, 重复上面的操作.

定理 4.7. 重根修正算法是一个数值稳定的二次收敛的精化奇异零点的算法.

证明. 通过定理 4.6 和注 7 可以看出算法的二次收敛性. 我们的算法是数值稳定的, 因为我们在计算过程中把系数矩阵作奇异值分解来计算维数和零向量, 从而计算出乘法矩阵. 不仅如此, 我们计算过程中没有进行坐标变换而是通过在近似点处把多项式作多元泰勒展开到指定次数来形成系数矩阵. \square

通过对例子 2.4 的符号和数值情形分别计算, 展示重根修正算法的二次收敛性. 首先是符号情形的:

例 4.2. (2.4 继续) 假定我们已知一个近似解 $\hat{x} = (1 + \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ 和它的指标

$\rho = 3$. 对矩阵 $M_4^{(1)}$ 应用高斯消去, 我们得到了一个 12×10 的上三角矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} I_{5 \times 5} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 1 + \frac{1}{2}\varepsilon & \star & \star & \star & \star & \star \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 0 & 1 & \star & \star & \star & \star \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 0 & 0 & -2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) & -\frac{1}{4}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) & -\frac{3}{16}\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) & \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{144}\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) & -\frac{1}{192}\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5) & \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{32}\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5) & \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \mathbf{0}_{1 \times 5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right],$$

这里的 \star 表示以 ε 作为变元的有理函数.

显然后面五行的元素都是 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. 把这五行看成是零然后计算零向量从而形成乘法矩阵, 得到的乘法矩阵是相对于正规集 $\{x_1, x_2, 1\}$ 的:

$$M_{x_1} = \begin{bmatrix} -2 - 2\varepsilon & -1 & -3\varepsilon - \varepsilon^2 \\ 4 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & 2 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & 6\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{x_2} = \begin{bmatrix} 4 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & 2 - \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & 6\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ -8 & -4 - 2\varepsilon & -12\varepsilon - \varepsilon^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

矩阵 M_{x_1} 和矩阵 M_{x_2} 的迹的平均值都是 $-\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. 把这个结果加上 $\hat{\mathbf{x}}$, 我们得到了修正的解: $(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), 2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))$.

下面要展示的是数值的情形:

例 4.3. (2.4 继续) 假设已知的近似解为 $\hat{\mathbf{x}} = (1.001, 1.998)$, 选择容许误差 $\tau = 10^{-3}$, 使用重根修正算法估计重数和指标.

- 矩阵 $M_3^{(1)}$ 的奇异值为:

$$\{3.1234, \dots, 1.8285, 2.8400 \times 10^{-4}, 4.4717 \times 10^{-10}, 1.3509 \times 10^{-20}\}$$

所以 $d_3^{(1)} = 3$.

- 矩阵 $M_3^{(2)}$ 的奇异值为:

$$\{3.1234, \dots, 1.8285, 2.8400 \times 10^{-4}, 2.3352 \times 10^{-9}, 3.2703 \times 10^{-13}\}$$

所以 $d_3^{(2)} = 3$.

- 矩阵 $M_4^{(1)}$ 的奇异值为:

$$\{3.5118, \dots, 4.6516 \times 10^{-2}, 1.2633 \times 10^{-6}, 6.1389 \times 10^{-13}, 6.4274 \times 10^{-20}\}$$

所以 $d_4^{(1)} = 3$.

从上面的计算可以看出对于选择的容许误差 $\tau = 10^{-3}$, 得到的重数 $\mu = 3$ 和指标 $\rho = 3$. 乘法矩阵由 $M_4^{(1)}$ 的零空间形成, 再由乘法矩阵的迹的平均值计算出根:

$$\hat{\mathbf{y}} = (-0.001000696, 0.002003323).$$

把 $\hat{\mathbf{y}}$ 加上 $\hat{\mathbf{x}}$, 我们得到了修正了的根 $\hat{\mathbf{x}}$. 再使用重根修正算法两次, 每次把输出作为下一次的输入, 分别选择容许误差: 10^{-5} 和 10^{-8} , 得到修正根:

$$\hat{\mathbf{x}} = (1 - 3.5470 \times 10^{-16}, 2 - 2.3068 \times 10^{-15}).$$

4.5 复杂度分析和实验

关于多项式系统的对合基的算法有很多的文章, 比如 [5, 17, 49]. 但是, 关于算法复杂度的讨论却是寥寥无几. 在文章 [9] 中, 作者给出了计算 D-模的 Janet 基的算法复杂度是双指数的. 在文章 [18] 中, 作者给出了布尔 Gröbner 基的势的一些估计. 对于布尔 Pommaret 基, 他们给出了一个势为单指数的例子, 并且作了复杂度是单指数的猜测. 因为我们所研究的多项式系统 $F_k = T_k(F) \cup P^k$ 是非常特殊的. 正如上面章节所提到的那样, 截断的系数矩阵 $M_k^{(j)}$ 已经提供了我们计算重根结构的充足信息, 并且可以进行奇异零点的修正.

通过对算法分析, 我们得到了复杂度:

定理 4.8. 重根修正算法的复杂度是:

$$\mathcal{O} \left(t \binom{\rho+s}{s}^3 \right)$$

证明. 重根修正算法中计算零向量的矩阵至多是 $t\binom{\rho+s}{s} \times \binom{\rho+s}{s}$ 的. \square

下面的实验选择 Digits := 14 使用软件 Maple 11 在 Windows 环境下运行. 多项式系统 DZ1 和 DZ2 是从 [15] 中选取的. 多项式系统 D2 [14] 是正维数的, 但是我们仍然可以计算孤立零点的准素分支. 其它的例子选自 PHCpack demos <http://www.math.uic.edu/~jan/>.

我们用 s , ρ 和 μ 来分别表示变元个数, 指标和重数. 第五列一个箭头标示出了近似根经过一次运算的准确数字个数的变化. 算法的 Maple 程序和实验结果可以在下面网址找到: <http://www.mmrc.iss.ac.cn/~lzhil/Research/hybrid/polysolver>.

System	s	ρ	μ	# Digits
cmbs1	3	5	11	2 → 7 → 14
cmbs2	3	4	8	2 → 5 → 14
mth191	3	3	4	2 → 6 → 13 → 15
LVZ	3	8	18	4 → 7 → 14
KSS	5	5	16	3 → 7 → 13 → 14
Caprasse	4	3	4	3 → 9 → 12 → 13
DZ1	4	11	131	2 → 8 → 15
DZ2	3	8	16	3 → 7 → 14
tangents1	6	4	4	2 → 6 → 12 → 13
D2	3	5	5	2 → 4 → 7 → 14
Ojika1	2	3	3	2 → 4 → 8 → 14
Ojika2	3	2	2	2 → 4 → 9 → 13
Ojika3	3	3	4	2 → 4 → 9 → 13
Ojika4	3	3	3	2 → 6 → 13
Cyclic9	9	3	4	3 → 5 → 11 → 13

表 4.1: 算法实验

4.6 总结

在文章 [11, 27, 28, 29, 42, 44] 中给出了各种各样的修正近似奇异零点的办

法. 我们的工作是基于多项式系统的对合约化形式, 而且给出了算法二次收敛性的证明. 我们的方法是不同于 [28, 29, 42, 44], 他们的方法叫做 Deflation, 他们通过添加变元和新的多项式到原来的系统中, 使得得到的系统把奇异零点扩充之后作为一个正则的零点的一部分, 于是利用经典的牛顿迭代就可以提高这个近似解的精度. 我们用来修正奇异零点的矩阵的列是 $\binom{\rho+s}{s}$, 当指标 ρ 很大的时候, 我们的算法效率就不高. 例如 [22], 变量个数是 10, 指标可能是 11, 我们处理不了这个问题. 我们下一步就是要利用我们矩阵的一些特殊的结构的特性, 缩小矩阵, 正如 [58] 中, Zeng 为了处理这种大系统而提出的高效的算法.

第五章 结论与展望

多项式系统求解问题，如果是准确系数的多项式方程，可以用 Gröbner 基，特征列，结式的方法等求解：这些方法要有序的选择，是依赖于坐标的，在处理浮点系数的多项式方程时就会遇到数值困难，比如选择的首项的系数是一个很小的浮点数。多项式方程组跟常系数的线性齐次偏微分方程组有着自然的一一对应关系。因此偏微分方程组的对合理论在多项式系统中的应用被广泛探讨。而且基于多项式系统的对合理论，在文章 [48, 59] 中给出了算法：利用符号数值的方法把多项式系统延拓投影到对合形式从而求解零维的多项式系统。这种方法没有序的选择，不依赖于坐标，因而具有强健的数值稳定性。不仅如此，这种方法还保留了理想的结构，也就是保留了重根的结构的信息。所以，文章 [56] 深入探讨了如何计算出这种对合方法保留的重根的结构的信息。

我们对多项式奇异根的重数感兴趣，这里我们所说的重数，不仅仅是算术意义上的单根，二重根，三重根等，而是在更强的代数意义上给出这个奇异零点所在的准素分支的描述，我们定义的重根结构是指计算出这个准素分支的对偶空间的一组基。因为算术意义上的重数不能给我们关于准素分支的充足的信息。

通过回顾牛顿迭代等方法，我们说明了提出广义的二次收敛牛顿算法的动机。这种广义的牛顿迭代是采用文章 [56] 中用于计算对合形式的系数矩阵的一个子块进行运算，所以算法具有传统的对合方法的数值稳定性并且提高了计算的效率。

虽然我们已经大大缩小了用在重根修正的迭代中的矩阵，但是对于一些较大的例子，我们仍然无法处理，所以利用系数矩阵的结构特性，采用缩小的矩阵进行计算是我们的下一步工作。在 [58] 中，Zeng 为了处理较大的多项式系统而提出了改进的算法，他利用封闭子空间条件在计算中间进行一些处理，使得最后应用的矩阵由原来行列全都扩张，缩小到行数保持不变，等于多项式方程组的个数，列数至多为封闭子空间不再变化时的维数。但是这种封闭性对于数值运算似乎不稳定，无法应用到我们方法中进行重根修正。

参考文献

- [1] 奚梅成. 数值分析方法. 中国科学技术大学出版社, 合肥, 1995.
- [2] 支丽红. 符号和数值混合计算. 符号计算选讲, pages 235–272, 2003. 王东明主编.
- [3] 吴文俊. 混合计算. 21 世纪 100 个交叉科学难题:656–657, 2005. 李嘉先生主编.
- [4] 支丽红. 符号和数值混合计算. 系统科学与数学, 28(8):1040–1052, 2008.
- [5] Joachim Apel. A Gröbner approach to involutive bases. *J. Symbolic Comput.*, 19:441–457, 1995.
- [6] W. Auzinger and H. Stetter. An elimination algorithm for the computation of all zeros of a system of multivariate polynomial equations. *Intern. Series in Numer. Math.*, 86:11–30, 1988.
- [7] D. Bates, C. Peterson, and A. Sommese. A numerical-symbolic algorithm for computing the multiplicity of a component of an algebraic set. *Journal of Complexity*, 22:475–489, 2006.
- [8] J. Bonasia, F. Lemaire, G. Reid, R. Scott, and L. Zhi. Determination of approximate symmetries of differential equations. In *CRM Proceedings and Lecture Notes*, pages 233–249, 2004.
- [9] A. Chistov and D. Ggorier. Complexity of a Janet basis of a D-module. Preprints in MPIM, 2007.
- [10] C. Christensen. Newton’s method for resolving affected equations. *The College Mathematics Journal*, 27:330–340, 1996.
- [11] R. Corless, P. Gianni, and B. Trager. A reordered Schur factorization method for zero-dimensional polynomial systems with multiple roots. In Küchlin,

- editor, *Proc. 1997 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput. ISSAC'97*, pages 133–140, New York, 1997. ACM Press.
- [12] D. Cox, J. Little, and D. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1992. Undergraduate Texts in Mathematics.
- [13] A. Damiano, I. Sabadini, and D. Struppa. Computational methods for the construction of a class of Noetherian operators. *Experiment. Math.*, 16:41–55, 2007.
- [14] B. Dayton. Numerical local rings and local solutions of nonlinear systems. In Jan Verschelde and Stephen M. Watt, editors, *SNC’07 Proc. 2007 Internat. Workshop on Symbolic-Numeric Comput.*, pages 79–86, New York, N. Y., 2007. ACM Press.
- [15] B. Dayton and Z. Zeng. Computing the multiplicity structure in solving polynomial systems. In Kauers [21], pages 116–123.
- [16] J. Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F5). In T. Mora, editor, *Proc. 2002 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput. ISSAC’02*, pages 75–83, New York, 2002. ACM Press.
- [17] V. Gerdt and Y. Blinkov. Involutive bases of polynomial ideals. *Mathematics and Computers in Simulation*, 45:519–541, 1998.
- [18] V. Gerdt and M. Zinin. A Pommaret division algorithm for computing Gröbner bases on Boolean rings. In Jeffrey [20], pages 95–102.
- [19] P. Gianni, B. Trager, and G. Zacharias. Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals. *J. Symbolic Computation*, 6:149–167, 1988.
- [20] David Jeffrey, editor. *ISSAC 2008 Proc. 2008 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput.*, New York, N. Y., 2008. ACM Press.
- [21] Manuel Kauers, editor. *ISSAC’05 Proc. 2005 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput.*, New York, N. Y., 2005. ACM Press.

- [22] H. Kobayashi, H. Suzuki, and Y. Sakai. Numerical calculation of the multiplicity of a solution to algebraic equations. *Math. Comp.*, 67(221):257–270, 1998.
- [23] M. Kreuzer and L. Robbiano. *Computational Commutative Algebra 2*. Springer, 2005.
- [24] M. Kuranishi. On E.Cartan’s prolongation theorem of exterior differential systems. *Amer. J. Math*, 79:1–47, 1957.
- [25] Y. Lakshman. A single exponential bound on the complexity of computing Gröbner bases of zero dimensional ideals. *Effective Methods in Algebraic Geometry, Progress in Mathematics*, pages 227–234, 1994.
- [26] D. Lazard. Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations. In *Proc. European Conf. Comput. Algebra. Lect. Notes in Comp. Sci.*, 162, Springer, pages 146–157, 1983.
- [27] G. Lecerf. Quadratic Newton iteration for systems with multiplicity. *Foundations of Computational Mathematics*, 2(3):247–293, 2002.
- [28] A. Leykin, J. Verschelde, and A. Zhao. Newton’s method with deflation for isolated singularities of polynomial systems. *Theoretical Computer Science*, 359:111–122, 2006.
- [29] A. Leykin, J. Verschelde, and A. Zhao. Higher-order deflation for polynomial systems with isolated singular solutions. Jan 2007.
- [30] A. Leykin, J. Verschelde, and A. Zhao. Newton’s method with deflation for isolated singularities of polynomial systems. *IMA Volume 146: Algorithms in Algebraic Geometry, edited by Alicia Dickenstein, Frank-Olaf Schreyer, and Andrew J. Sommese*, pages 79–97, 2008.
- [31] M. Marinari, T. Mora, and H. Möller. Gröbner duality and multiplicities in polynomial solving. In A. H. M. Levelt, editor, *Proc. 1995 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput. (ISSAC’95)*, pages 167–179, New York, N. Y., 1995. ACM Press.

- [32] M. Marinari, T. Mora, and H. Möller. On multiplicities in polynomial system solving. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348:3283–3321, 1996.
- [33] H. Möller. Systems of algebraic equations solved by means of endomorphisms, 1993.
- [34] H. Möller and T. Sauer. H-bases for polynomial interpolation and system solving. *Advances Comput. Math.*, 12:23–35, 2000.
- [35] H. Möller and H. Stetter. Multivariate polynomial equations with multiple zeros solved by matrix eigenproblems. *Numer. Math.*, 70:311–329, 1995.
- [36] H. Möller and R. Tenberg. Multivariate polynomial system solving using intersections of eigenspaces. *J. symbolic Computation*, 30:1–19, 2001.
- [37] B. Mourrain. Isolated points, duality and residues. *J. of Pure and Applied Algebra*, 117 & 118:469–493, 1996.
- [38] B. Mourrain. A new criterion for normal form algorithms. In M. Fossorier, H. Imai, S. Lin, and A. Poli, editors, *AAECC*, volume 1719, pages 430–443, Berlin, 1999. Springer.
- [39] B. Mourrain and P. Trébuchet. Solving projective complete intersection faster. In C. Traverso, editor, *Proc. 2000 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput. ISSAC'00*, pages 430–443, New York, 2000. ACM Press.
- [40] B. Mourrain and P. Trébuchet. Algebraic methods for numerical solving. In *Proceedings of the 3rd International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing*, pages 42–47, 2002.
- [41] B. Mourrain and P. Trébuchet. Generalized normal forms and polynomial system solving. In Kauers [21], pages 253–260.
- [42] T. Ojika. Modified deflation algorithm for the solution of singular problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 123:199–221, 1987.
- [43] T. Ojika. A numerical method for branch points of a system of nonlinear algebraic equatuions. *Applied Numerical Mathematics*, 4:419–430, 1988.

- [44] T. Ojika, S. Watanabe, and T. Mitsui. Deflation algorithm for the multiple roots of a system of nonlinear equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 96:463–479, 1983.
- [45] J. Pommaret. *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*. Gordon and Breach Science Publishers, 1978.
- [46] G. Reid, R. Scott, W. Wu, and L. Zhi. Algebraic and geometric properties of nearby projectively involutive polynomial systems. Manuscript, 2005.
- [47] G. Reid, J. Tang, and L. Zhi. A complete symbolic-numeric linear method for camera pose determination. In J. Sendra, editor, *Proc. 2003 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput. ISSAC'03*, pages 215–223, New York, 2003. ACM Press.
- [48] G. Reid and L. Zhi. Solving polynomial systems via symbolic-numeric reduction to geometric involutive form. *J. symbolic Computation*, 2008.
- [49] W. Seiler. *Involution - The formal theory of differential equations and its applications in computer algebra and numerical analysis*. Habilitation thesis, Univ. of Mannheim, Germany, 2002.
- [50] H. Stetter. *Numerical Polynomial Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2004.
- [51] P. Trébuchet. *Vers une Résolution Stable et Rapide des Équations Algébriques*. Dissertation, Université Pierre et Marie Curie, France, 2002.
- [52] van der Waerden B. L. *Algebra*. Frederick Ungar Pub. Co., 1970.
- [53] J. Verschelde. Algorithm 795: Phcpack: A general-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 25:251–276, 1999.
- [54] A. Wittkopf and G. Reid. Fast differential elimination in C: The CDiffelim Environment. *Comp. Phys. Comm.*, 139(2):192–217, 2001.
- [55] W. Wu. On a hybrid method of polynomial equation solving. *MM-Preprint*, pages 1–10, 1993.

- [56] X. Wu and L. Zhi. Computing the multiplicity structure from geometric involutive form. In Jeffrey [20], pages 325–332.
- [57] X. Wu and L. Zhi. Determining singular solutions of polynomial systems via symbolic-numeric reduction to geometric involutive form. To appear, 2009.
- [58] Z. Zeng. The closedness subspace method for computing the multiplicity structure of a polynomial system. To appear, 2009.
- [59] L. Zhi and G. Reid. Solving nonlinear polynomial system via symbolic-numeric elimination method. In J. Faugére and F. Rouillier, editors, *Proc. International conference on polynomial system solving*, pages 50–53, 2004.

发表文章目录

- [1] Xiaoli Wu, and Lihong Zhi. Computing the multiplicity structure from geometric involutive form. In David Jeffrey, editor, *ISSAC 2008 Proc. 2008 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput.*, New York, N. Y., 2008. ACM Press.
- [2] Xiaoli Wu, and Lihong Zhi. Determining singular solutions of polynomial systems via symbolic- numeric reduction to geometric involutive form. Jan. 2009 Mathematics- Mechanization Research Preprints.

个人简介

吴晓丽，女，吉林省，1980 年出生。 E-mail: xlwu@amss.ac.cn

教育状况

- 2004.9–2009.7 中国科学院数学与系统科学研究院，系统所，博士研究生。
方向：符号与数值混合计算，导师：吴文俊、支丽红。
- 2000.9–2004.7 中国科学技术大学，数学系，本科。
- 1999.9–2000.7 吉林省油田高级中学。
- 1996.9–1999.7 吉林省松原市高级中学。

会议活动

- 2008年 7 月，第33届国际符号和代数计算会议，会议上做报告，奥地利，林茨。
- 2007 年 11 月，数学与系统科学研究院系统所青年学术会议，北京。
- 2007 年 6 月，The First Chinese-SALSA Workshop，北京大学。
- 2007 年 3 月，The Second NCSU-China Symbolic Computation Collaboration Workshop，杭州。
- 2006 年 2 月，奥地利LINZ大学的符号和数值计算讨论班，奥地利，林茨。

获奖经历

- 2007 年中国科学院研究生院数学科学学院三好学生。
- 2003 年中国科学技术大学奖学金二等奖。
- 2002 年中国科学技术大学奖学金三等奖。

致 谢

在此向多年来给予我关心和帮助的各位老师、同学、朋友和家人表示衷心的感谢！

首先要特别感谢我的导师支丽红老师！

大学毕业论文就在支老师指导下完成，在科院学习的五年里，支老师教诲我们做学问还有做人。

这篇论文的内容从选题到研究再到写作都是在支老师的悉心指导下完成的。她活跃的思维、崇高的敬业精神和严谨的治学态度都深深影响了我并值得我学习。

特别感谢数学机械化中心的各位老师！特别感谢吴文俊院士、高小山研究员、李子明研究员，王定康副研究员、从他们那里我学习到了很多的知识并且获得了很多的帮助。同时感谢周代珍老师的热心帮助。

特别感谢现在或曾经在数学机械化中心学习的李冰玉师姐、杨争锋师兄、孟晓徽师姐、李斌师弟、孙东霞、马月师妹、郭峰、李子佳、李楠师弟。以及其他同学！感谢李子明老师的计算代数几何课程，使我更清楚的完成基础理论介绍部分！感谢一起上讨论班的王定康老师和孙瑶师弟、张梅师妹，通过讨论班上的讨论交流让我学习到了很多知识。

特别感谢数学与系统科学研究院和中国科学院研究生院的其他老师、同学及各位好友！感谢他们对我在学习和生活上的关心和帮助，同大家一起度过的很多愉快的时光给我留下了许多美好的回忆。

还要特别感谢数学与系统科学研究院和中科院研究生院的各位老师！他们的辛勤工作为我们创造了良好的学习和生活环境。

最后感谢爱人陈绍示对我的学习上生活中的帮助！感谢我的父母三十年的养育教导！