University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

量子非局域游戏完美策略的刻画

作者姓名： 禹天石

指导教师： 支丽红 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别： 理学博士

学科专业： 应用数学

培养单位： 中国科学院数学与系统科学研究院

2025 年 6 月

Characterizations of Perfect Strategies for Quantum Nonlocal Games

A dissertation submitted to

University of Chinese Academy of Sciences

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Doctor of Philosophy

in Applied Mathematics

By

Tianshi Yu

Supervisor: Professor Lihong Zhi

Academy of Mathematics and Systems Science,

Chinese Academy of Sciences

June, 2025

中国科学院大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。承诺除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体享有著作权的研究成果，未在以往任何学位申请中全部或部分提交。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人或集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日　　期：

中国科学院大学
学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关收集、保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则，保留并向国家指定或中国科学院指定机构送交学位论文的电子版和印刷版文件，且电子版与印刷版内容应完全相同，允许该论文被检索、查阅和借阅，公布本学位论文的全部或部分内容，可以采用扫描、影印、缩印等复制手段以及其他法律许可的方式保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：　　　　　　　　导师签名：

日　　期：　　　　　　　　日　　期：

摘　要

量子非局域游戏 (也称量子非局域博弈，quantum nonlocal game) 是量子信息中的重要研究领域之一。一个非局域游戏包含两个玩家和一个裁判，玩家需要根据他们各自收到的问题给出回答，再由裁判判定玩家们获胜或失败。在这个过程中，玩家预先知道裁判的判定规则，但他们之间不能互相交流信息。量子理论表明，如果玩家之间可以共享一个纠缠的量子态，那么他们获胜的期望有可能比经典情形更大，这体现了量子优越性。对于一个非局域游戏，如果玩家们有一个策略能够保证他们一定获胜，那么称这个非局域游戏有完美策略。一个重要的问题是，判定在不同的游戏类型和策略要求下，哪些非局域游戏有完美策略。为此，我们利用平方和和迹态等代数工具对两回答游戏、镜像游戏和模仿游戏这几类重要的非局域游戏的完美策略给出了相应的刻画条件。

首先，对于回答集只有两个元素的非局域游戏，已有的结果表明，具有完美量子策略的两回答非局域游戏也存在完美经典策略。我们将这一结果推广至无限维情形，证明了具有完美交换算子策略的两回答游戏也存在完美经典策略。这一结果同时也给出了一个特殊形式的非交换零点定理: 对于两回答游戏的泛游戏代数，其无效决定集 $\mathcal{N}$ 有一维的零点当且仅当 $-1 \notin \mathrm{SOS} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*$，其中 SOS 是 Hermitian 平方和，$\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 是 $\mathcal{N}$ 生成的左理想。

同步游戏在研究图染色问题和 Connes 嵌入猜想中有重要的作用。作为同步游戏的推广，镜像游戏在相应的领域亦有潜在的应用。在镜像游戏的获胜条件中，对于一些特定的问题对，Alice 和 Bob 的回答是互相决定的，这也是“镜像”之名的由来。我们将镜像游戏的完美交换算子策略抽象为泛游戏代数的 $*$-表示，并将 Paulsen 等人为同步游戏引入的由单个玩家确定的的“小代数”推广到镜像游戏上，利用 Watts、Helton 和 Klep 发展的非交换零点定理证明了如下结论：一个正则的镜像游戏有完美的交换算子策略当且仅当 $-1 \notin \widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)} + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1) + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1)^*$，其中 $\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)}$ 是由单个玩家确定的“小代数” $\mathcal{U}(1)$ 上的平方和加上换位子，$\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)$ 是只与单个玩家相关的一个双边理想。利用该结论，我们给出了一个基于非交换 Gröbner 基计算和半定规划的算法，用于判定给定的镜像游戏不存在完美交换算子策略。

模仿游戏是镜像游戏的进一步推广。相比于镜像游戏，模仿游戏的获胜条件中 Alice 的回答同时与 Bob 的问题和回答有关，Bob 亦然。我们证明了，模仿游戏存在完美量子逼近策略当且仅当在两个泛 C*-代数的最小张量积上存在一个双迹态，该双迹态能够诱导出完美的关联矩阵。对于 Alice 的问题集和回答集都是二元集的一类特殊的模仿游戏，我们将模仿游戏与存在迹的 von Neumann 代数联系起来，并证明了模仿游戏存在完美量子逼近策略当且仅当存在一个 von Neumann 代数及其上的一个 amenable 的迹态，使得该迹态能够诱导出完美关联矩阵。

关键词： 两回答游戏, 镜像游戏, 模仿游戏, 完美经典/量子/量子逼近/交换算子策略, 非交换零点定理, GNS 构造, 平方和, 泛游戏代数, 最小张量积, amenable 迹态

Abstract

Quantum nonlocal games constitute a critical research area in quantum information. A nonlocal game involves two players and a referee. The players must provide answers based on their respective questions, and the referee then determines whether the players win or lose. Throughout this process, the players know the referee's judgment rules in advance but cannot communicate with each other. Quantum theory shows that if players can share an entangled quantum state, their probability of winning could be higher than in classical cases, reflecting quantum advantage. If the players have a strategy that guarantees a victory in a nonlocal game, the game is said to have a perfect strategy. An important question is: how to determin which nonlocal games have perfect strategies under different game types and strategic requirements. To address this, we employ algebraic tools such as sum-of-squares and tracial states to characterize perfect strategies for several critical classes of nonlocal games, including two-answer games, mirror games, and imitation games.

For games with a binary answer set, existing results show that any two-answer nonlocal game with a perfect quantum strategy also admits a perfect classical strategy. We extend this result to the infinite-dimensional case, proving that two-answer games with perfect commuting operator strategies also have perfect classical strategies. This result further implies a noncommutative Nullstellensatz of a special form: for the universal game algebra of two-answer games, its invalid determining set $\mathcal{N}$ has a one-dimensional zero if and only if $-1 \notin \mathrm{SOS} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*$, where SOS denotes Hermitian sums of squares, and $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ is the left ideal generated by $\mathcal{N}$.

Synchronous games play significant roles in studying graph coloring problems and the Connes embedding conjecture. As a generalization of synchronous games, mirror games also have potential applications in related fields. These are termed "mirror games" because their winning conditions require Alice's and Bob's answers to determine each other for specific question pairs mutually. We use $*$-representations of universal game algebras and generalize the notion of "small algebras" (introduced by Paulsen et al. for synchronous games) to study the perfect commuting operator strategies for mirror games. Using the noncommutative Nullstellensatz developed by Watts, Helton and Klep, we prove: a regular mirror game admits a perfect commuting operator strategy if and only if $-1 \notin \widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)} + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1) + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1)^*$, where $\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)}$ is the Hermitian sum of squares plus commutators on the "small" algebra $\mathcal{U}(1)$ determined by one player, and $\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)$ is a two-sided ideal determined by one player. Based on this, we provide an algorithm combining noncommutative Gröbner basis computations and semidefinite programming to verify the nonexistence of perfect commuting operator strategies for given mirror games.

Imitation games further generalize mirror games. Unlike mirror games, in the winning conditions of imitation games, Alice's answer depends simultaneously on Bob's questions and answers, and vice versa. We prove that an imitation game has a perfect quantum approximate strategy if and only if there exists a bitracial state on the minimal tensor product of two universal C*-algebras that induces a perfect correlation. For a special class of imitation games where Alice's question and answer sets are both binary, we connect imitation games to tracial von Neumann algebras. Specifically, we show that such games have a perfect quantum approximate strategy if and only if there exists a von Neumann algebra with an amenable tracial state that induces this perfect correlation.

Key Words: Two-Answer Games, Mirror Games, Imitation Games, Perfect Classical/ Quantum/Quantum-Approximate/Commuting-Operator Strategies, Noncommutative Nullstellensatz, GNS Construction, Sum of Squares, Universal Game Algebra, Minimal Tensor Product, Amenable Tracial state

目 录

第 1 章　引言

1.1　问题背景与研究现状

作为研究量子力学中非局域性质的工具，量子非局域游戏 (也称量子非局域博弈，quantum nonlocal game) 是近年来数学、物理和计算机科学的重要研究对象之一，广泛用于自检测 (self-testing)[1,2]，零知识证明[3]，量子密钥分发[4] 等领域。最早的量子非局域性质的验证工具是 Bell 不等式[5]，这个不等式可以用量子非局域游戏的框架来描述[6,7]。对量子系统的结构和维数加以不同的限制，是否会得到不同强度的非局域性质，这是著名的 Tsirelson 问题[8]。为此，我们需要研究不同限制条件下量子非局域游戏有完美策略的条件，这是本文的主要研究内容。

下面介绍量子非局域游戏的框架。

定义 1.1.1. 一个非局域游戏 $\mathcal{G}$ 包括两个玩家 *Alice* 和 *Bob*，以及一个验证者。对于固定的非空有限集合 X, Y 和 A, B，设 $X \times Y$ 上有一个概率分布 $\mu(x, y)$。在按照概率分布 $\mu(x, y)$ 随机选择一对 $(x, y) \in X \times Y$ 后，验证者将元素 x 作为问题发送给 *Alice*，将元素 y 作为问题发送给 *Bob*。*Alice* 和 *Bob* 分别向验证者发送相应的答案 $a \in A$ 和 $b \in B$。在收到每位玩家的答案后，验证者计算评分函数

$$\lambda: \ X \times Y \times A \times B \longrightarrow \{0, 1\}$$

如果 $\lambda(x, y, a, b) = 1$，则称 *Alice* 和 *Bob* 赢得游戏；否则，他们输掉游戏。*Alice* 和 *Bob* 事先知道集合 X, Y, A, B 以及评分函数 λ，并且他们可以在游戏开始前约定他们各自的策略；但在游戏过程中不能相互交流。

$$\begin{tikzcd}
 & Alice \arrow[dr, "a"] & & \\
Verifier \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "y"'] & & Verifier \arrow[r, "\lambda"] & \{0,1\} \\
 & Bob \arrow[ur, "b"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\lambda(x, y, a, b) = \begin{cases} 1 & \checkmark \\ 0 & \times \end{cases}$$

我们首先考虑非局域游戏的经典策略。

定义 1.1.2. 玩家的一个确定性策略由两个函数组成：

$$a : X \longrightarrow A, \ b : Y \longrightarrow B, \tag{1-1}$$

当 *Alice* 收到 x 时，她向验证者发送 $a(x)$；当 *Bob* 收到 y 时，他向验证者发送 $b(y)$。已知问题的概率分布 $\mu(x, y)$，在给定一个确定性策略的情况下，玩家赢得游戏 $\mathcal{G}$ 的期望为

$$\sum_{x,y} \mu(x, y)\lambda(x, y, a(x), b(y)). \tag{1-2}$$

我们也可以为 $\mathcal{G}$ 给出一个概率策略：对于每对 $(x, y) \in X \times Y$，令 *Alice* 和 *Bob* 拥有相互独立的分布 $p_{x,a}, q_{y,b}$，其中 $a \in A, b \in B$。当玩家收到问题 (x, y) 时，*Alice* 以概率 $p_{x,a}$ 发送答案 a 给验证者，*Bob* 以概率 $q_{y,b}$ 发送答案 b 给验证者。在此概率策略下，赢得游戏的期望为

$$\sum_{x,y,a,b} \mu(x, y)p_{x,a}q_{y,b}\lambda(x, y, a, b). \tag{1-3}$$

所有确定性策略和概率策略统称为经典策略。

下面考虑有限维量子策略。

定义 1.1.3. 如果允许 *Alice* 和 *Bob* 共享一个量子纠缠态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$，其中 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 均为有限维 *Hilbert* 空间，则他们可以采用如下的有限维量子策略：

- 当 *Alice* 收到 x 时，她在 $|\psi\rangle$ 的 $\mathcal{H}_A$ 部分上执行投影测量 $P_{x,a}$，并将测量结果 a 发送给验证者。
- 当 *Bob* 收到 y 时，他在 $|\psi\rangle$ 的 $\mathcal{H}_B$ 部分上执行投影测量 $Q_{y,b}$，并将测量结果 b 发送给验证者。

$$\begin{aligned} x \longrightarrow Alice \xrightarrow{\{P_{x,a},\ a\in A\}} |\psi\rangle \longrightarrow a \\ y \longrightarrow Bob \xrightarrow{\{Q_{y,b}\ b\in B\}} |\psi\rangle \longrightarrow b \end{aligned} \tag{量子策略}$$

下面我们介绍关联矩阵的概念。

定义 1.1.4. 无通讯关联矩阵 (*non-signalling correlation*) 是一个函数 p ：$X \times Y \times A \times B \to [0, 1]$，满足：

$$\begin{aligned} &\sum_{b\in B} p(a, b \mid x, y) = \sum_{b\in B} p(a, b \mid x, y'),\ \forall x \in X,\ y, y' \in Y,\ a \in A, \\ &\sum_{a\in A} p(a, b \mid x, y) = \sum_{a\in A} p(a, b \mid x', y),\ \forall x, x' \in X,\ y \in Y,\ b \in B, \\ &\sum_{(a,b)\in A\times B} p(a, b \mid x, y) = 1,\ \forall x \in X,\ y \in Y. \end{aligned}$$

我们用 $C_{ns}(X, Y, A, B)$ 表示所有无通讯关联矩阵的集合。此外，对于一个评分函数 λ，如果 $\lambda(x, y, a, b) = 0 \implies p(a, b \mid x, y) = 0$，则我们称关联矩阵 $p = (p(a, b \mid x, y))_{X\times Y\times A\times B}$ 是完美 (*perfect*) 的。我们用 $C_{ns}(\mathcal{G})$ 表示所有完美的无通讯关联矩阵的集合。

容易看出，对于一个非局域游戏 $\mathcal{G}$，玩家的策略实际上就是确定了一个关联矩阵。

接下来考虑与策略相对应的关联矩阵。我们用 C_c 记录所有经典策略生成的关联矩阵的集合，它是一个闭集。注意到任何概率策略都可以表示为确定性策略的凸组合，因此非局域游戏 $\mathcal{G}$ 在经典策略下的最大获胜期望总能由某个确定性策略取得。

定义 1.1.5. 游戏 $\mathcal{G}$ 的经典值（*classical value*）定义为 $\mathcal{G}$ 的最大获胜期望：

$$\omega_c(\mathcal{G}) = \max_{a,b} \sum_{x,y} \mu(x,y)\lambda(x,y,a(x),b(y)). \tag{1-4}$$

定义 1.1.6. 对于固定的有限集 X,Y,A,B，设关联矩阵 $p \in C_{ns}(X,Y,A,B)$，如果存在有限维 *Hilbert* 空间 $\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_B$ 和单位向量 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$，使得对于所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$，存在投影测量 $\{P_a^x : a \in A\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ 和 $\{Q_b^y : b \in B\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$，满足：

$$p(a,b \mid x,y) = \langle\psi|P_a^x \otimes Q_b^y|\psi\rangle \tag{1-5}$$

换言之，关联矩阵 p 可以由一个有限维量子策略实现，则称 p 为有限维的量子关联矩阵 *(quantum correlation)*。我们用 $C_q(X,Y,A,B)$ 表示所有有限维的量子关联矩阵的集合。

对于给定的有限维量子策略，其获胜期望为

$$\sum_{x,y,a,b} \mu(x,y)\cdot\langle\psi|P_{x,a} \otimes Q_{y,b}|\psi\rangle\cdot\lambda(x,y,a,b). \tag{1-6}$$

定义 1.1.7. 在所有有限维量子策略中，获胜期望的上确界为

$$\omega_q(\mathcal{G}) = \sup_{\substack{\mathcal{H}_A,\mathcal{H}_B,\psi,\\ P_{x,a},Q_{y,b}}} \sum_{x,y,a,b} \mu(x,y)\cdot\langle\psi|P_{x,a} \otimes Q_{y,b}|\psi\rangle\cdot\lambda(x,y,a,b), \tag{1-7}$$

称为游戏 $\mathcal{G}$ 的量子值 *(quantum value)*。

相对于经典策略，量子策略可以具有更大的获胜概率，这是量子优越性的重要体现之一。例如，在 CHSH 游戏中[9]，经典策略的获胜概率上限为 $\frac{3}{4}$，而通过共享纠缠态的量子策略可将成功概率提升至 $\cos^2(\frac{\pi}{8}) \approx 0.85$。

例 1.1.1. [9] *CHSH* 游戏的定义如下：令 $X = Y = A = B = \{0,1\}$，以及打分函数 λ:

λ \ (x,y) / (a,b)	*(0,0)*	*(0,1)*	*(1,0)*	*(1,1)*
(0,0)	*1*	*1*	*1*	*0*
(0,1)	*0*	*0*	*0*	*1*
(1,0)	*0*	*0*	*0*	*1*
(1,1)	*1*	*1*	*1*	*0*

即

$$\lambda(x,y,a,b)=\begin{cases}1,\ x\wedge y=a+b \mod 2;\\ 0,\ else.\end{cases}$$

令问题集 $X\times Y$ 上的概率分布 $\mu(x,y)=\frac{1}{4}$。我们有 $\lambda(x,y,a,b)=1$ 等价于 $a+b=xy \mod 2$，于是

- 经典值 $\omega_c(CHSH)=\frac{3}{4}$;
- 量子值 $\omega_q(CHSH)=\cos^2(\frac{\pi}{8})\approx 0.85$。

对于经典值，设 *Alice* 和 *Bob* 给出回答的分布相互独立，并令 *Alice* 收到 *0* 时回答 *0* 的概率为 s，收到 *1* 时回答 *0* 的概率为 t；*Bob* 收到 *0* 时回答 *0* 的概率为 c，收到 *1* 时回答 *0* 的概率为 d。这完全地给出了一个概率策略，其关联矩阵如下：

p \ (x,y) / (a,b)	*(0,0)*	*(0,1)*	*(1,0)*	*(1,1)*
(0,0)	*sc*	*sd*	*tc*	*td*
(0,1)	*s(1-c)*	*s(1-d)*	*t(1-c)*	*t(1-d)*
(1,0)	*(1-s)c*	*(1-s)d*	*(1-t)c*	*(1-t)d*
(1,1)	*(1-s)(1-c)*	*(1-s)(1-d)*	*(1-t)(1-c)*	*(1-t)(1-d)*

那么获胜的期望

$$\begin{aligned}p_{\text{win,c}}&=\frac{1}{4}(sc+sd+tc+(1-s)(1-c)+(1-s)(1-d)\\&+(1-t)(1-c)+t(1-d)+(1-t)d)\\&=\frac{1}{4}(3-2s-2c+2sc+2sd+2tc-2td)\leqslant\frac{3}{4},\end{aligned}$$

一个使等号成立的解是 $s=c=t=d=0$，此时 $\omega_c(CHSH)=\frac{3}{4}$。

对于量子值，我们记 $2P_0^0-I=F_1$, $2P_0^1-I=F_2$, $2Q_0^0-I=F_3$, $2Q_0^1-I=F_4$。s 设 $|\eta\rangle$ 是状态空间 $\mathcal{H}_A\otimes\mathcal{H}_B$ 中的任意一个单位向量，则获胜的期望

$$2p_{\text{win,q}}-1=\langle\eta\mid(F_1\otimes F_3+F_1\otimes F_4+F_2\otimes F_3-F_2\otimes F_4)\eta\rangle.$$

不难验证

$$\|(F_1\otimes F_3+F_1\otimes F_4+F_2\otimes F_3-F_2\otimes F_4)^2\|_\infty\leqslant 8,$$

因此我们有 $p_{\text{win,q}}\leqslant\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$。特别地，如果我们取

$$F_1=Z,\ F_2=X,\ F_3=\frac{X+Z}{\sqrt{2}},\ F_4=\frac{X-Z}{\sqrt{2}},$$

其中 $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是 *Pauli* 矩阵，且

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

时，上式的等号成立，即

$$\omega_q(CHSH) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \approx 0.85.$$

下面考虑有限维量子策略的推广。如果删去 $\mathcal{H}_A$ 和 $\mathcal{H}_B$ 均为有限维的要求，则我们得到了无穷维量子策略。

我们也可以定义 $\mathcal{G}$ 的一个交换算子策略 (quantum commuting operator strategy)。

定义 1.1.8. 设 $\mathcal{H}$ 为某个 *(*可能是无限维的*) Hilbert* 空间，$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$，对于每对 $(x, y) \in X \times Y$，*Alice* 和 *Bob* 具有投影测量 *(PVM)*$\{P_a^x,\ a \in A\}$ 和 $\{Q_b^y,\ b \in B\}$，分别满足以下交换条件：

$$P_a^x Q_b^y = Q_b^y P_a^x, \quad \forall\,(x, y, a, b) \in X \times Y \times A \times B. \tag{1-8}$$

当 *Alice* 收到问题 x 时，她在 $|\psi\rangle$ 上执行测量 $\{P_a^x,\ a \in A\}$，并将结果 a 发送给验证者；类似地，当 *Bob* 收到问题 y 时，他在 $|\psi\rangle$ 上执行测量 $\{Q_b^y,\ b \in B\}$，并将结果 b 发送给验证者。称 $(\mathcal{H}, |\psi\rangle, \{P_a^x,\ a \in A\}, \{Q_b^y,\ b \in B\})$ 是一个交换算子策略。

这些推广的策略类型可以具有比有限维量子策略更高的获胜概率，因此有重要的研究价值。特别地，如果一个策略能使玩家的获胜概率为 1，那么称这个策略是完美 (perfect) 的。显然完美策略与完美的关联矩阵是一一对应的。

下面考虑与无穷维量子策略、逼近量子策略 (quantum approximate strategy) 以及交换算子算子策略相对应的关联矩阵。

定义 1.1.9 (C_{qs})**.** 如果关联矩阵 p 可以由一个 *(*可能是无穷维的*)* 量子策略实现，则把这样的关联矩阵收集起来，得到的集合记作 $C_{qs}(X, Y, A, B)$ *(quantum spatial correlation)*。

定义 1.1.10 (C_{qa})**.** 将 C_q 的闭包定义为 $C_{qa}(X, Y, A, B)$，即逼近量子关联矩阵 *(quantum approximate correlation)* 的集合。逼近量子关联矩阵对应的策略被称为逼近量子策略。更形式地说，一个关联矩阵

$$p = (p(a, b \mid x, y)) \in C_{qa}(X, Y, A, B)$$

当且仅当：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在有限维 *Hilbert* 空间 $\mathcal{H}_A(\varepsilon), \mathcal{H}_B(\varepsilon)$ 和单位向量 $|\psi_\varepsilon\rangle \in \mathcal{H}_A(\varepsilon) \otimes \mathcal{H}_B(\varepsilon)$，使得对于所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$，存在投影测量 *(PVM)* $\{P_a^x(\varepsilon) : a \in A\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_A(\varepsilon))$ 和 $\{Q_b^y(\varepsilon) : b \in B\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_B(\varepsilon))$，满足：

$$\left| p(a, b \mid x, y) - \langle \psi_\varepsilon | P_a^x(\varepsilon) \otimes Q_b^y(\varepsilon) | \psi_\varepsilon \rangle \right| < \varepsilon. \tag{1-9}$$

定义 1.1.11 (C_{qc}). 如果存在 *Hilbert* 空间 $\mathcal{H}$ 和单位向量 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$，使得对于所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$，存在投影测量 $\{P_a^x : a \in A\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ 和 $\{Q_b^y : b \in B\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$，满足：

$$p(a, b \mid x, y) = \langle \psi | P_a^x Q_b^y | \psi \rangle \tag{1-10}$$

且 $P_a^x Q_b^y = Q_b^y P_a^x$, $\forall (x, y, a, b) \in X \times Y \times A \times B$，即关联矩阵 p 可以由一个交换算子策略实现，将这样的 p 收集起来，得到的集合记作 C_{qc}。

众所周知 $C_{qs} \subseteq C_{qa}$[10]，因此 C_{qs} 的闭包也是 C_{qa}。

利用线性系统游戏 (linear system game)[11] 及其解群[12]，Slofstra[13,14] 证明了 C_q 和 C_{qs} 都不是闭集。这是 Tsirelson 问题的重要进展。因此，有限维量子策略的最大获胜期望 (即量子值，式 (1-7)) 必然可以在 C_{qa} 中取到，但不一定能在 C_q 或 C_{qs} 中取到。

显然 C_{qc} 是一个闭集，且 $C_{qa} \subseteq C_{qc}$[15]。给定一个交换算子策略，其获胜期望为

$$\sum_{x,y,a,b} \mu(x, y) \cdot \langle \psi | P_a^x \cdot Q_b^y | \psi \rangle \cdot \lambda(x, y, a, b). \tag{1-11}$$

定义 1.1.12. 定义交换算子策略获胜期望的上确界 (由于 C_{qc} 是闭集，它必然可以取到) 为

$$\omega_{co}(\mathcal{G}) = \sup_{\substack{\mathcal{H}, \psi, \\ P_a^x, Q_b^y}} \sum_{x,y,a,b} \mu(x, y) \cdot \langle \psi | P_a^x \cdot Q_b^y | \psi \rangle \cdot \lambda(x, y, a, b) \tag{1-12}$$

称为游戏 $\mathcal{G}$ 的交换算子值 *(quantum commuting operator value)*。

利用平方和松弛和半正定规划方法可以计算 $\omega_{co}(\mathcal{G})$ 的上界[16]。

综上所述我们有

$$C_c \subseteq C_q \subseteq C_{qs} \subseteq C_{qa} \subseteq C_{qc}$$

文献[15,17,18] 利用 C^*-代数和算子系统上的态给出了关联矩阵属于以上这些不同类型的集合的等价条件。需要注意的是，上述每个包含关系都是严格的。第一个严格包含来自 Bell 不等式，后三个严格包含的结论来自[10,13,19–21]。这也导致如下的不等式：

$$\omega_c(\mathcal{G}) \leqslant \omega_q(\mathcal{G}) \leqslant \omega_{co}(\mathcal{G})$$

如果在交换算子策略中将 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 限制为有限维，则有 $\omega_q(\mathcal{G}) = \omega_{co}(\mathcal{G})$ (参见[8,10]) 。在无限维情形下存在游戏 $\mathcal{G}$，使得 $\omega_q(\mathcal{G}) < \omega_{co}(\mathcal{G})$ (参见[13,15])。$C_{qc} = C_{qa}$ 是否成立即著名的 Tsirelson 问题[10,15]。这个问题与 Connes 嵌入猜想[22] 有深刻的联系。

猜想 1.1.1 (Connes 嵌入猜想). *若 M 是一个可分的 II_1 型有限因子，其上有迹态 τ_M，则对任意的 $\epsilon > 0$ 和 M 的任意一个有限子集 $F = \{u_1, \ldots, u_d \mid u_1, \ldots, u_d$是酉元$\}$，存在同态*

$$\Phi : M \to M_n(\mathbb{C})$$

满足 $\Phi(1) = 1$ 以及对每个 $x, y \in F$ 都有:

$$|\tau_M(x^* y) - \mathrm{tr}_{M_n(\mathbb{C})}(\Phi(x^*)\Phi(y))| < \epsilon$$

Connes 猜想在算子代数和 Banach 空间理论中有多个等价的表述，其中之一就是 Connes 猜想成立当且仅当 $C_{qc} = C_{qa}$[15,23,24]。Helton 等人的工作[25,26] 开启了非交换代数上的正零点定理的研究。在[27] 中，Klep 和 Schweighofer 证明了 von Neumann 代数上的 Connes 嵌入猜想等价于迹版本的正零点定理。2020 年，Ji 及其合作者证明了 MIP*=RE，从而 Connes 嵌入猜想是错误的[21]。但我们仍然不知道一个明确的反例。想要了解有关 Connes 嵌入问题的最新研究成果，可以参见[15,24,28]。这也是我们研究量子非局域游戏的主要动机。

考察非局域游戏中使用的量子测量，我们可以将其所满足的关系抽象出来，这样我们就得到了*泛游戏代数* (universal game algebra)[29]。泛游戏代数是研究非局域游戏的策略的重要工具。

定义 1.1.13 (泛游戏代数). *令*

$$\mathbf{e} = (e_a^x)_{x\in X, a\in A} \cup (f_b^y)_{y\in Y, b\in B} \tag{1-13}$$

是一组自由的未定元，记 $\mathbb{C}\langle \mathbf{e}\rangle$ 为 $\mathbf{e}$ 生成的非交换的自由代数。令 $\mathfrak{I}$ 为如下的多项式所生成的双边理想：

$$\left\{e_a^x f_b^y - f_b^y e_a^x \mid \forall x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B\right\} \tag{1-14}$$

$$\cup \left\{(e_a^x)^2 - e_a^x \mid \forall x \in X, a \in A\right\} \cup \left\{(f_b^y)^2 - f_b^y \mid \forall y \in Y, b \in B\right\} \tag{1-15}$$

$$\cup \left\{e_{a_1}^x e_{a_2}^x \mid \forall x \in X,\ a_1 \neq a_2 \in A\right\} \cup \left\{f_{b_1}^y f_{b_2}^y \mid \forall y \in Y,\ b_1 \neq b_2 \in B\right\} \tag{1-16}$$

$$\cup \left\{\sum_{a\in A} e_a^x - 1 \mid \forall x \in X\right\} \cup \left\{\sum_{b\in B} f_b^y - 1 \mid \forall y \in Y\right\}. \tag{1-17}$$

我们定义 $\mathcal{U} = \mathbb{C}\langle \mathbf{e}\rangle/\mathfrak{I}$，并且在 $\mathcal{U}$ 上赋以如下的对合运算 “$*$”:

$$(e_a^x)^* = e_a^x,\ (f_b^y)^* = f_b^y. \tag{1-18}$$

其中一个复数的 “$*$” 等于它的共轭。我们称 $\mathcal{U}$ 是游戏 $\mathcal{G}$ 的泛游戏代数，$\{e_a^x, f_b^y\}$ 是它的投影生成元 (projection generators)。

特别地，记 $\mathcal{U}$ 中所有 $\{e_a^x\}$ 生成的子代数为 $\mathcal{U}(1)$，所有由 $\{f_b^y\}$ 生成的子代数记为 $\mathcal{U}(2)$。

我们首先解释一下泛游戏代数中这些生成元所满足的关系。式 (1-14) 说明 Alice 和 Bob 的测量要可交换，即测量顺序不能对测量结果产生影响；式 (1-15,1-16,1-17) 说明 Alice 和 Bob 的算子是一组求和为 1 的正交投影。

泛游戏代数可以用于刻画一般非局域游戏的完美交换算子策略。文献[29–31] 利用非交换代数几何中的*零点定理 (Nullstellensätze)*[32–34] 和*正零点定理 (Positivstellensätze)*[25,26,35,36]，对一般非局域游戏的完美交换算子策略给出了代数刻画。

一类重要的非局域游戏是同步游戏。对同步游戏的玩家 Alice 和 Bob 而言，在他们收到相同的问题时，当且仅当他们给出相同回答时获胜。Paulsen 及其合作者在文献[30,37,38] 中，通过引入关于一个玩家的代数结构 $\mathcal{U}(1)$，给出了研究同步游戏量子策略的简化框架。他们的研究证明，同步游戏的获胜概率可由 $\mathcal{U}(1)$ 上的迹态在 $e_a^x e_b^y$ 上的取值获得 (详见文献[37] 的定理 5.5，以及文献[30] 的定理 3.2)。这一结论可以应用于图的量子染色问题。文献[19] 利用图的量子染色数改进了 Slofstra[13] 关于 C_q 不是闭集的证明，而文献[39] 则是它的算子代数形式的改写。文献[40] 则给出了线性系统游戏和同步游戏的代数联系。特别地，文献[29] 的定理 8.3 与 8.7 将零点定理与[37,38] 的结论联系起来，简化了同步游戏完美交换算子策略的刻画条件，并利用非交换 Gröbner 基和半正定规划给出同步游戏没有完美交换算子策略的判定算法。

在文献[41] 中，Lupini 等人提出了一类新的非局域游戏——*模仿游戏*，其特点是对于其获胜策略，每个玩家的回答完全由其他玩家的问题和回答决定。所有同步游戏均属于模仿游戏 (因玩家需对相同问题给出相同回答)，但反之不成立。例如：*镜像游戏* (mirror games)、*唯一性游戏* (unique games)[42] 以及*变量赋值游戏* (variable assignment games)[41] 均为非同步的模仿游戏。Lupini 等人进一步为任意模仿游戏构造了相关联的泛 C^*-代数，并证明完美交换算子策略的存在性等价于相应的泛 C^*-代数上存在迹态。同时，对模仿游戏的一个特殊子类镜像游戏，他们证明其存在完美交换算子策略可以利用一个只与玩家 Alice 有关的 C^*-代数上的迹态的存在性来刻画，而镜像游戏存在完美量子逼近策略可以利用迹态的 amenable 性质来刻画。

然而，对于镜像游戏和模仿游戏，文献[41] 给出的完美策略刻画不能直接给出判定给定游戏是否存在完美策略的算法。而对于模仿游戏，其完美量子逼近策略尚无任何刻画条件。本文将就这些问题开展研究。

1.2 主要成果与文章结构

本文的主要成果包括：

(1) 对于两回答游戏 $\mathcal{G} = (X, Y, A, B, \lambda)$，设 $\mathcal{U}$ 是其泛游戏代数，记 $\mathcal{N} = \{e_a^x f_b^y \mid \lambda(x, y, a, b) = 0\}$，$\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 是 $\mathcal{N}$ 生成的左理想，$\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$ 是 $\mathcal{U}$ 上的 Hermitian

平方和。则

$$-1 \notin \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*$$

成立当且仅当存在一维的 *-表示 $\rho : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ 使得

$$\rho(\mathcal{N}) = \{0\}.$$

这一结果可以视为一个特殊形式的非交换零点定理。利用这一结果，我们证明了两回答游戏有完美的交换算子策略当且仅当它有完美的经典策略。Cleve 等人的结果[6] 只是证明了两回答游戏如果有完美的有限维量子策略，那它一定有完美的经典策略。我们的结果将其推广到了无穷维情形。

(2) 对于正则的镜像游戏 $\mathcal{G}$，设其泛游戏代数为 $\mathcal{U}$，则 $\mathcal{G}$ 存在完美交换算子策略，当且仅当 $-1 \notin \widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)} + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1) + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1)^*$。其中 $\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)}$ 是 $\mathcal{U}(1)$ 上的 Hermitian 平方和加上换位子，$\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)$ 是下面的集合

$$\Big\{ e_a^x \Big(\sum_{\substack{a \in A \\ \lambda(\eta(y), y, a, b) = 1}} e_a^{\eta(y)} \Big) \mid \lambda(x, y, a, b) = 0 \Big\}$$

在 $\mathcal{U}(1)$ 中生成的双边理想。特别地，若镜像游戏满足

$$-1 \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}(1)} + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1) + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1)^*, \tag{1-19}$$

则该游戏不存在完美交换策略。类似结论对 Bob 亦成立。相比于[41] 定理 5.1 中的结果，本文的刻画条件是纯代数的，因此可以给出基于非交换 Gröbner 基和半正定规划的判定算法。需要注意的是，这一问题的算法只在一个方向具有终止性，详细的论证参见注4.3.1。

(3) 对于模仿游戏 $\mathcal{G}$，若关联矩阵 $p \in C_{ns}(X, Y, A, B)$ 给出了 $\mathcal{G}$ 的一个完美策略，则

$$p \in C_{qa}(\mathcal{G})$$

当且仅当：存在最小张量代数 $\mathcal{A}(X, A) \otimes_{\min} \mathcal{A}(Y, B)$ 上的态 τ 满足

$$p(a, b \mid x, y) = \tau(e_a^x \otimes f_b^y),$$

且限制态 $\tau|_{\mathcal{A}(X,A)\otimes \mathbf{1}}$ 与 $\tau|_{\mathbf{1}\otimes \mathcal{A}(Y,B)}$ 均为迹态。这是首个关于模仿游戏的完美量子逼近策略的刻画条件。

对于模仿游戏 $\mathcal{G}$，设 $p \in C_{ns}(\mathcal{G})$ 为完美的无通讯关联矩阵。考虑以下两个陈述条件：

(i) $p \in C_{qa}(\mathcal{G})$ 是完美的量子逼近关联矩阵；

(ii) 存在 von Neumann 代数 $\mathscr{U}$ 及其上 amenable 的迹态 τ，以及从泛游戏代数 $\mathcal{U}(1) \otimes_{alg} \mathcal{U}(2)$ 到 $\mathscr{U}$ 的 $*$-同态 ρ，满足

$$\tau \circ \rho(e_a^x \otimes f_b^y) = p(a, b \mid x, y).$$

在本文中，我们证明了 (ii)$\Longrightarrow$(i) 成立，并且在 Alice 的问题集和回答集都是二元集，以及附加了一个游戏本身内蕴的条件[1]的情形下，(i)$\Longrightarrow$(ii) 也成立。我们猜想这两个条件的等价在一般情形下也成立。

本文的结构安排如下：第二章是预备知识，包括泛函分析和算子代数的基础，量子信息基础，以及泛游戏代数的基本性质。第三章将证明两回答游戏有完美交换算子策略必有完美经典策略。第四章将给出正则镜像游戏完美交换算子策略的纯代数刻画条件，并给出相应的算法。第五章将讨论模仿游戏的完美量子逼近策略的刻画。第六章进行总结。

[1]这个条件可以叙述如下：考虑完美量子逼近策略所对应的的迹态的 GNS 构造，要求这个 GNS 表示限制到 $\mathcal{U}(1)$ 和 $\mathcal{U}(2)$ 的泛 C^*-代数上都是单射。

第 2 章　预备知识

本章介绍预备知识，包括泛函分析和算子代数基础，量子信息基础，以及泛游戏代数的基本性质。

2.1　泛函分析基础

本节简要地列出泛函分析和算子代数的基础知识。本节内容的详细证明可以参考[43–46]。

定义 2.1.1 (Hilbert 空间)**.** *我们在复向量空间 $\mathcal{H}$ 上配以内积 $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$，则该内积诱导了 $\mathcal{H}$ 上的范数*

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle\mathbf{x}\mid\mathbf{x}\rangle},\ \forall\mathbf{x}\in\mathcal{H}$$

和距离

$$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{H}.$$

如果该空间对于这个内积诱导的距离是完备的，即每一个 Cauchy 序列都收敛，那么我们称 $\mathcal{H}$ 是 Hilbert 空间。

命题 2.1.1 (Cauchy-Schwarz 不等式)**.** *$|\langle\mathbf{x}\mid\mathbf{y}\rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|$，等号当且仅当 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y},\lambda\in\mathbb{C}$ 时成立。*

定义 2.1.2 (可分性)**.** *如果 $\mathcal{H}$ 中存在一个可数的稠密子集，即存在 $\mathcal{H}$ 的可数子集 $\mathcal{D}$ 使得 $\mathcal{D}$ 的闭包等于 $\mathcal{H}$，那么我们称 $\mathcal{H}$ 是可分的。*

我们有

命题 2.1.2. *有限维 Hilbert 空间一定等距同构于 $\mathbb{C}^n$；无穷维的可分 Hilbert 空间一定等距同构于*

$$l^2 := \left\{ (a_k)_{k=1}^{\infty} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}.$$

也即

命题 2.1.3. *无穷维的可分 Hilbert 空间一定存在一组标准正交基 $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$。此时有 Parseval 等式：对任意 $\mathbf{x}\in\mathcal{H}$，有*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle\mathbf{x}\mid\mathbf{e}_k\rangle\right|^2 = \|\mathbf{x}\|^2.$$

两个 Hilbert 空间 $\mathcal{H},\mathcal{K}$ 的张量积 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 可以定义如下：定义向量空间 $\mathcal{H}\odot\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 的代数张量积，在其上定义内积结构

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \mathbf{h}_i\otimes\mathbf{k}_i \mid \sum_{j=1}^{n} \mathbf{h}_i'\otimes\mathbf{k}_i' \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \langle\mathbf{h}_i\mid\mathbf{h}_i'\rangle\cdot\langle\mathbf{k}_i\mid\mathbf{k}_i'\rangle,\ \forall\mathbf{h}_i,\mathbf{h}_i'\in\mathcal{H},\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_i'\in\mathcal{K}.$$

将 $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ 在这个内积之下完备化，我们就得到了一个 Hilbert 空间，即 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$。

下面我们考虑 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子。

定义 2.1.3. 设 $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是线性算子，如果 $\sup_{\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathcal{H},\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \|A\mathbf{x}\| < \infty$，那么称 A 是 $\mathcal{H}$ 上的一个有界线性算子，并且 A 的范数 $\|A\| = \sup_{\mathbf{0}\neq\mathbf{x}\in\mathcal{H},\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \|A\mathbf{x}\|$。$\mathcal{H}$ 上的全体有界线性算子在映射复合的乘法下构成一个代数，记其为 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$。

在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上可以定义自然的“$*$”运算：设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则存在唯一的线性算子 $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$, $\langle \mathbf{x} \mid A\mathbf{y} \rangle = \langle A^*\mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle$。我们称 A^* 是 A 的伴随算子。特别地，如果 $A^* = A$，那么我们称 A 是自伴算子。

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上可以定义不同的拓扑，每种拓扑都对应着不同的算子收敛性。为了简便我们直接定义这些收敛性，这与直接定义拓扑基等价。

定义 2.1.4 (网)**.** 如果集合 $X = \{x_\lambda \mid \lambda \in I\}$ 满足：指标集 I 上有一个偏序 $\prec$，并且任取 $\lambda_1, \lambda_2 \in I$，都存在 λ_3 使得 $\lambda_3 \succ \lambda_1$，$\lambda_3 \succ \lambda_2$，则称 X 是一个网 *(net)*，并称指标集 I 是定向集 *(directional set)*。

(1) 算子网 $\{A_\lambda \mid \lambda \in I\}$ 被称为按范数收敛 (或一致收敛) 于 A，若任取 $\varepsilon > 0$，存在 $\lambda \in I$ 使得 $\|A_\lambda - A\| < \varepsilon$，这种收敛性的定义对应 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的范数拓扑；

(2) 算子网 $\{A_\lambda \mid \lambda \in I\}$ 被称为强收敛 (或逐点收敛) 于 A，若对任意 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$，都有任取 $\varepsilon > 0$，存在 $\lambda \in I$ 使得 $\|(A_\lambda - A)(\mathbf{x})\| < \varepsilon$，这种收敛性的定义对应 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的强算子拓扑 (strong operator topology)；

(3) 算子网 $\{A_\lambda \mid \lambda \in I\}$ 被称为弱收敛于 A，若对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$，都有任取 $\varepsilon > 0$，存在 $\lambda \in I$ 使得 $\left|\langle \mathbf{x} \mid (A_\lambda - A)\mathbf{y} \rangle\right| < \varepsilon$，这种收敛性的定义对应 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的弱算子拓扑 (weak operator topology)。

容易验证，按范数收敛能够推出强收敛，强收敛能够推出弱收敛。也就是说弱算子拓扑最弱 (开集最少)，而范数拓扑最强 (开集最多)。

我们也可以考虑线性算子的张量积。

命题 2.1.4. 设 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$，则存在唯一的有界线性算子 $S \otimes T \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ 使得

$$S \otimes T(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (S\mathbf{v}) \otimes (T\mathbf{w}),\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \mathbf{w} \in \mathcal{K}.$$

更进一步，$\|S \otimes T\| = \|S\| \cdot \|T\|$。

下面我们介绍 C^*-代数。

定义 2.1.5. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的子代数 *(*即 $\mathcal{A}$ 在加法、复数数乘和乘法下封闭*)*，并且 $\mathcal{A}$ 在范数拓扑下是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的闭子空间，以及最重要的，$\mathcal{A}$ 在”$*$”运算下封闭，则称 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。

我们也可以通过不依赖于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的方式定义 C^*-代数。

定义 2.1.6. 设复代数 $\mathcal{A}$ 上有一个相容的线性运算“$*$”，即满足对任意 $a, b \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$，有

$$(a^*)^* = a,\ (ab)^* = b^*a^*,\ (\lambda a)^* = \overline{\lambda}a^*.$$

$\mathcal{A}$ 上有范数 $\|\cdot\|$，满足 $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$，并且 $\mathcal{A}$ 在范数 $\|\cdot\|$ 下是完备的 (每一个 *Cauchy* 序列都收敛)。最后，范数 $\|\cdot\|$ 和 $*$-运算是相容的，即 $\|a^*a\| = \|a\|^2, \forall a \in \mathcal{A}$。称这样的 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。

定义2.1.5和定义 2.1.6 是等价的，这是著名的 Gelfand-Naimark 定理：

定理 2.1.1 (Gelfand-Naimark)**.** *每个如定义2.1.6所定义的 C^*-代数都等距同构于一个定义2.1.5中的 C^*-代数。*

证明可参考[44] Theorem 1.7.3。

需要注意的是，一个 C^* 代数中可能不含有单位元 $\mathbf{1}$。但是，我们总可以通过直接添加一个单位元的办法将 $\mathcal{A}$ 嵌入到一个含单位元的 C^*-代数中，因此以后如无特殊说明，我们提到 C^* 代数时总是默认它含有单位元。设 $a \in \mathcal{A}$，若 $\exists b \in \mathcal{A}$ 使得 $ab = ba = \mathbf{1}$，则我们称 a 是可逆的；若 $a = a^*$，则称 a 是自伴的。

定义 2.1.7 (谱与正元)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，$a \in \mathcal{A}$。称集合

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\mathbf{1} - a\text{不是可逆元}\right\}$$

是 a 的谱集，记作 $\mathrm{sp}(a)$，其中的数称为谱点。容易验证，如果 $a \in \mathcal{A}$ 是自伴的，那么 $\mathrm{sp}(a) \subseteq \mathbb{R}$。如果自伴元 a 满足 $\mathrm{sp}(a) \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，那么称 a 是一个正元，记作 $a \geq \mathbf{0}$。

将 $\mathcal{A}$ 上的所有有界线性泛函收集起来，则它们在加法和数乘下构成一个线性空间，称为 $\mathcal{A}$ 的对偶空间，记为 $\mathcal{A}^*$。有界线性泛函一定是连续的，并且我们可以定义其范数

$$\|f\| = \sup_{\mathbf{0} \neq a \in \mathcal{A}, \|a\| \leqslant 1} |f(a)|.$$

类似地，对偶空间上也可以定义不同的收敛性，对应不同的拓扑。

(1) 如果网 $\{f_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{A}^*$ 满足：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\alpha \in I$ 使得 $\|f_\alpha - f\| < \varepsilon$，则我们称 $\{f_\alpha\}$ 按范数 (一致) 收敛到 f，对应于 $\mathcal{A}^*$ 上的范数拓扑；

(2) 如果网 $\{f_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq \mathcal{A}^*$ 满足：对任意 $a \in \mathcal{A}$，都有 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\alpha \in I$ 使得 $\left|f_\alpha(a) - f(a)\right| < \varepsilon$，则我们称 $\{f_\alpha\}$ 弱 $*$-收敛到 f，对应于 $\mathcal{A}^*$ 上的弱 $*$-拓扑。

下面我们定义态。

定义 2.1.8 (态)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，$f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的连续线性泛函。对任意的 $a \geq \mathbf{0}$，如果有 $f(a) \geqslant 0$ 成立，则称 f 是一个正线性泛函；如果我们进一步有 $f(\mathbf{1}) = 1$，则我们称 f 是 $\mathcal{A}$ 上的一个态 (*state*)。

不难验证，f 是 $\mathcal{A}$ 上的态当且仅当 f 是正线性泛函且 $\|f\| = 1$，即所有的态都包含在 $\mathcal{A}^*$ 的单位闭球面中。

我们有下面的定理：

定理 2.1.2 (Banach-Alaoglu)**.** $\mathcal{A}^*$ 的单位闭球在弱 $*$-拓扑下是紧集，即 $\mathcal{A}^*$ 的单位闭球的任意一个弱 $*$-开覆盖都存在有限的子覆盖。

我们称一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 是可分的，如果存在 $\mathcal{A}$ 的可数子集 X 使得 X 在范数拓扑下的闭包等于 $\mathcal{A}$。此时我们有如下推论：

推论 2.1.1. $\mathcal{A}$ 是可分 C^*-代数，则任意一个 $\mathcal{A}$ 上的态序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 都有一个弱 $*$-收敛的子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$。

定义 2.1.9 (迹态)**.** 设 $\mathcal{A}$ 是 C^*-代数，称 ϕ 是 $\mathcal{A}$ 上的迹态 *(tracial state)*，如果 $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 是一个态并且满足

$$\tau(ab) = \tau(ba),\ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

特别地，如果 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\mathcal{H}$ 中的单位向量 ψ 满足：其诱导的线性泛函 $a \mapsto \langle a\psi \mid \psi\rangle$ 是迹态，则我们也称单位向量 ψ 是迹态。

下面我们定义 C^*-代数的表示。

定义 2.1.10. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，称 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个 $*$-表示，若 $\forall a, b \in \mathcal{A}$，$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ 且 $\pi(a)^* = \pi(a^*)$。特别的，我们要求 $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$。如果 π 还是单射，那么我们称 π 是 $\mathcal{A}$ 的一个忠实 *(faithful)* 表示。

给定 C^*-代数上的一个态，我们可以构造与之相关的表示，这个方法被称为 GNS 构造 (Gelfand-Naimark-Segal construction)。

定义 2.1.11 (GNS 构造)**.** 设 f 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的一个态，如果有 $*$-表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 及向量 $\xi \in \mathcal{H}$ 使得

$$f(a) = \langle \pi(a)\xi \mid \xi\rangle,\ \forall a \in \mathcal{A}.$$

且 $\overline{\pi(\mathcal{A})\xi}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，那我们称 (π, ξ) 是 $\mathcal{A}$ 关于 f 的一个 *GNS* 构造。如果两个 *GNS* 构造 $(\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), \xi), (\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}'), \xi')$ 满足：存在酉算子 $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ 使得 $U\pi(a)U^* = \pi'(a), \forall a \in \mathcal{A}$，那么称 (π, ξ) 和 (π', ξ') 等价。

定理 2.1.3. 设 f 是 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的一个态，则存在一个关于 f 的 *GNS* 构造，并且任何两个关于 f 的 *GNS* 构造都是等价的。

证明. [44] 不难验证态 f 满足：对任意 $a, b \in \mathcal{A}$，有

$$\left|f(b^*a)\right|^2 \leqslant f(a^*a)f(b^*b). \tag{2-1}$$

定义集合

$$N=\{a\in\mathcal{A}\mid f(a^*a)=0\},$$

则对任意 $a\in N$ 及 $x\in\mathcal{A}$，有 $\left|f((xa)^*(xa))\right|^2=\left|f(a^*(x^*xa))\right|^2\leqslant f(a^*x^*xx^*xa)\cdot f(a^*a)=0$，于是 $f((xa)^*(xa))=0$，即 $xa\in N$，N 是一个左理想。作商空间 $\widetilde{\mathcal{H}}=\mathcal{A}/N$，在其上定义内积

$$\langle x+N\mid y+N\rangle=f(y^*x),\ \forall x,y\in\mathcal{A},$$

则

$$\langle x+N\mid x+N\rangle=0\Longrightarrow f(x^*x)=0\Longrightarrow x+N=0+N,$$

即这确实是一个内积。在此内积下将 $\widetilde{\mathcal{H}}$ 完备化即得到 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$。令 $\xi=\mathbf{1}+N\in\mathcal{H}$，及左正则表示

$$\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \pi(a)(x+N)=ax+N,\ \forall a\in\mathcal{A},x+N\in\widetilde{\mathcal{H}}.$$

不难验证如果 $\|a\|_{\mathcal{A}}\leqslant 1$，则 $f(x^*a^*ax)\leqslant f(x^*x)$，从而

$$\|\pi(a)\|=\sup_{0\neq\|x+N\|_{\mathcal{H}}\leqslant 1}\|ax+N\|_{\mathcal{H}}\leqslant\|x\|_{\mathcal{H}},$$

即 $\|a\|_{\mathcal{A}}\leqslant 1\Longrightarrow\|\pi(a)\|\leqslant 1$，从而 $\pi(a)$ 确实是一个有界线性算子且 $\|\pi(a)\|\leqslant\|a\|_{\mathcal{A}}$。

验证 $\pi(ab)=\pi(a)\pi(b)$ 及 $\pi(a^*)=\pi(a)^*$ 不难，我们不再赘述。注意到

$$\pi(A)\xi=\pi(A)(1+N)=\{a+N\mid a\in\mathcal{A}\}=\widetilde{\mathcal{H}}$$

在 $\mathcal{H}$ 中稠密，以及

$$\langle\pi(a)\xi\mid\xi\rangle=\langle a+N\mid\mathbf{1}+N\rangle=f(a),$$

这说明 (π,ξ) 确实是关于 f 的 GNS 构造。最后，关于唯一性，如果 $(\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H}),\xi),(\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H}'),\xi')$ 都满足 GNS 构造的条件，那么稠密子空间 $\pi(\mathcal{A})\xi$ 到 $\pi'(\mathcal{A})\xi'$ 之间有自然的等距映射

$$U_0:\pi(a)\xi\mapsto\pi'(a)\xi',\ \forall a\in\mathcal{A}.$$

显然 U_0 可以唯一地扩张成 $\mathcal{H}\to\mathcal{H}'$ 的等距映射 U，并且由于 $U_0\pi(a)U_0^*=\pi'(a)$ 在稠密集 $\pi'(\mathcal{A})\xi'$ 上成立，我们知道在整个 $\mathcal{H}'$ 上该式也成立。证毕。 □

给定两个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，它们的代数张量积 $\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$ 仍然是一个 $*$-代数。我们可以在其上定义不同的范数，使得 $\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$ 成为一个 C^*-代数。一个 $\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$ 上的范数可以定义成

$$\|a\|_{\max}:=\sup_{\pi}\{\|\pi(a)\|\mid\pi:\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})\text{ 是一个}\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}\text{的表示}\},\tag{2-2}$$

其中 $\mathcal{H}$ 是一个 Hilbert 空间。这个范数被称为最大张量范数。将代数张量积在这个范数下完备化之后我们得到了一个 C^*-代数 $\mathcal{A} \otimes_{\max} \mathcal{B}$，称之为最大张量积。我们也可以定义代数张量积上的另一种范数 (称为最小张量范数)：

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right\|_{\min} := \left\|\sum_{i=1}^{n} \pi_1(a_i) \otimes \pi_2(b_i)\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)}, \tag{2-3}$$

其中 $\pi_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$, $i = 1, 2$ 都是忠实的表示。可以验证这个范数是良定义的，并且与表示 π_1, π_2 的选取无关[46]，因此我们也可以在此范数下将代数张量积完备化，这样得到了另一个 C^*-代数 $\mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{B}$，称为最小张量代数。

定义 2.1.12 (amenable). *[38,46]* *令 $\mathcal{A} \subseteq B(\mathcal{H})$ 是一个 C^*-代数。$\mathcal{A}$ 上的迹态 τ 被称为 amenable 的，如果存在 $B(\mathcal{H})$ 上的态 ρ 使得 $\rho|_{\mathcal{A}} = \tau$，并且 $\rho\left(uTu^*\right) = \rho(T)$ 对任意的 $T \in B(\mathcal{H})$ 和酉元 $u \in \mathcal{A}$ 成立。*

Amenable 的迹态有几种等价的刻画，可以参考 Brown 和 Ozawa 的教材[46]定理 6.2.7。在这里，我们仅列出我们所需要的等价条件。令 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数。回忆其反 C^*-代数 $\mathcal{A}^{op}$ 的定义如下：$\mathcal{A}^{op}$ 作为集合与 $\mathcal{A}$ 相等，并保持 $\mathcal{A}$ 作为 Banach 空间的结构，但乘法 ”$\bullet$” 定义为 $a \bullet b = ba$。

命题 2.1.5. *[46] 令 $\mathcal{A}$ 是 C^*-代数，其上有迹态 τ。以下条件等价：*

(1) τ 是 amenable 的；

(2) 线性映射

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A} \otimes_{alg} \mathcal{A}^{op} &\to \mathbb{C} \\ a \otimes b &\mapsto \tau(ab) \end{aligned}$$

在最小张量范数的意义下是有界的。

下面介绍 von Neumann 代数。

定义 2.1.13. *设 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 的子代数 $\mathcal{M}$ 满足 $\mathbf{1} \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$，且 $\mathcal{M}$ 在弱算子拓扑下是闭集，那么称 $\mathcal{M}$ 是一个 von Neumann 代数。如果 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 的中心 (即与所有 $\mathcal{M}$ 中的元素都交换的元素) 中只有 $\{\lambda \mathbf{1} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$，则称 $\mathcal{M}$ 是一个因子 (factor)。一个 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 被称为有限的，若其中每一个等距 $x \in \mathcal{M}$ 都是酉元。一个 von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ 有限当且仅当 M 上存在忠实的正规的迹态 τ。其中*

(1) τ 是忠实的，即 $\forall x \in \mathcal{M}$, $\tau(x^*x) = 0 \Longleftarrow x = 0$；

(2) τ 是正规的，即 τ 在 M 的单位闭球上是弱连续的。

由于按范数收敛的网一定弱收敛，因此 $\mathcal{M}$ 在范数拓扑下也一定是闭集，即 von Neumann 代数一定是 C^* 代数。von Neumann 代数按照投影元的性质可以分为 I 型，II 型和 III 型，其中 II 型又可以分为 II_1 和 II_∞ 型，关于其定义和性质可以参考[47]。

2.2　量子信息基础

本节介绍量子力学的基本假设。

基本假设 2.2.1. 孤立量子系统的状态空间是 *Hilbert* 空间，量子系统的状态可以由空间中的单位向量描述。我们把状态向量也称为一个量子态 *(quantum state)*。

我们采用狄拉克记号 (Dirac's notion) 来描述量子系统。我们将 Hilbert 空间中的单位向量记为右矢 $|\psi\rangle$，其对偶记为左矢 $\langle\psi|$。一个简单的例子如下。对于一个 2 维的 Hilbert 空间，我们可以选取

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

作为该空间的一组基，它们被称为计算基；我们也可以选取

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

作为该空间的一组基。

有时我们并不能确切地知道量子系统处于哪个状态，而是只能知道系统以概率 p_i 处于状态 $|\psi_i\rangle$，此时我们用密度算子 (density operator) 来描述系统的状态 (混合态)：$\rho = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$。特别地，纯态 $|\psi\rangle$ 的密度算子是秩为 1 的投影算子 $|\psi\rangle\langle\psi|$。

基本假设 2.2.2. 封闭的量子系统的演化可以用状态 *Hilbert* 空间上的酉算子来描述。

我们把状态空间上的酉算子称为量子门。以下是 2 维空间上一些常用的量子门：

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} && \text{(Hadamard 门)}, \\ X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} && \text{(Pauli 门)}. \end{aligned}$$

基本假设 2.2.3. 对密度算子为 ρ 的量子系统进行测量可以用一组测量算子来描述：我们有一组测量算子 $\{M_m \mid \sum_m M_m^* M_m = \mathbf{1}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，这些算子作用在状态空间上，指标 m 表示测量结果。测量后得到结果 m 的概率为

$$p_m = \mathrm{tr}(M_m^* M_m \rho),$$

测量后量子系统的密度算子塌缩为

$$\frac{M_m \rho}{\sqrt{p_m}}.$$

如果不关心测量之后系统的状态，则可以用 POVM 测量 (positive operator-valued measure) 来代替一般测量。在一般测量中定义 $P_m = M_m^* M_m$，则 P_m 满足：

(1) 对每个测量结果 m，P_m 都是半正定算子；

(2) $\sum_m P_m = \mathbf{1}$。

我们称 $\{P_m\}$ 是一组 POVM 测量，测得 m 的概率 $p_m = \mathrm{tr}(P_m\rho)$。特别地，当 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 是纯态时，测得 m 的概率 $p_m = \langle\psi|P_m|\psi\rangle$。

实际上常用的是一种更特殊的 POVM 测量，称为投影测量 (projection-valued measure, PVM)。如果一组 POVM$\{P_m\}$ 额外满足每个 P_m 都是投影算子，即 $(P_m)^2 = P_m = P_m^*$，那么我们称其是一组投影测量。Naimark 扩张定理表明，任何 POVM 都可以改造成更大的 Hilbert 空间上的 PVM。

定理 2.2.1 (Naimark's dilation)**.** *设 $\{P_m\}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的一组 POVM 测量，则存在 Hilbert 空间 $\mathcal{K}$，有界线性映射 $V: \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ 以及 $\mathcal{K}$ 上的一组 PVM 测量 $\{Q_m\}$，使得对每个测量结果 m，都有*

$$P_m = V Q_m V^*.$$

基本假设 2.2.4. *复合量子系统的状态空间是各分系统状态空间的张量积。*

复合系统中最有趣的现象就是量子纠缠态的存在。如果复合系统的状态向量不能写成各分系统的状态向量的张量积，那么称这个复合系统处于纠缠态 (entangle state)。下面的例子是一个典型的纠缠态。

例 2.2.1. *设 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 都是 2 维的，其基底都记为 $|0\rangle, |1\rangle$。则复合系统 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 中下面的量子态就是一个纠缠态：*

$$|\Psi\rangle = \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

不难验证任取 $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ 和 $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$，我们都有 $|\Psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$，细节可以参考[48]。这个态被称为 Bell 态或 EPR (Einstein–Podolsky–Rosen) 对，它也是这个复合系统上的最大纠缠态 (maximal entangle state)。它的一个重要性质是，测量第二个空间的量子态的结果总是与测量第一个空间的量子态的结果相同，即使对第一个空间进行某种操作，这两个测量之间仍然保持这种关系。这种性质可以用于检查设备是否泄密。关于纠缠态的更多性质可以参考[49]。

2.3 泛游戏代数的性质

引言中已经介绍了泛游戏代数的定义 (见定义1.1.13)。下面介绍它的一些性质。

首先，泛游戏代数也可以由不同的生成元生成。

定义 2.3.1. 设回答集 $A=\{a_1,\dots,a_m\}, B=\{b_1,\dots,b_n\}$，在泛游戏代数 $\mathcal{U}$ 中定义

$$c_x=\sum_{k=1}^{m}\exp\left(\frac{2\pi k\mathrm{i}}{m}\right)e^x_{a_k},\ d_y=\sum_{l=1}^{n}\exp\left(\frac{2\pi l\mathrm{i}}{n}\right)f^y_{b_l},$$

则它们满足

$$\begin{aligned}&c_xd_y=d_yc_x,\ \forall x\in X,y\in Y;\\&(c_x)^*=(c_x)^{-1},\ (d_y)^*=(d_y)^{-1};\\&(c_x)^m=(d_y)^n=1.\end{aligned}\tag{2-4}$$

容易验证这是 $\mathcal{U}$ 的一组生成元，称 $\{c_x,d_y\mid\forall x\in X,y\in Y\}$ 为泛游戏代数的循环酉生成元 (*cyclic generators*)。投影生成元也可以通过循环酉生成元变换得到：

$$e^x_{a_j}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(\exp\left(-\frac{2\pi j\mathrm{i}}{m}\right)c_x\right)^k,\ f^y_{b_j}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\exp\left(-\frac{2\pi j\mathrm{i}}{n}\right)d_y\right)^k.$$

式 (2-4) 说明 $\{c_x,d_y\mid\forall x\in X,y\in Y\}$ 按其满足的关系可以生成一个群 G，而 $\mathcal{U}=\mathbb{C}[G]$ 恰是其群代数。将 $\mathcal{U}$ 中所有 $\{e^x_a\}$ 生成的子代数记为 $\mathcal{U}(1)$，所有由 $\{f^y_b\}$ 生成的子代数记为 $\mathcal{U}(2)$。显然 $\mathcal{U}(1)$ 也可以由所有 $\{c_x\}$ 生成，而所有 $\{c_x\}$ 构成 G 的子群，因此 $\mathcal{U}(1)$ 也是群代数。同理 $\mathcal{U}(2)$ 也是群代数。于是有下面的定义：

定义 2.3.2. 由于 $\mathcal{U}(1)$ 是群代数，因此我们可以考虑该群的泛 C^*-代数，即在 $\mathcal{U}(1)$ 上定义如下的范数：

$$\|a\|=\sup\{\|\pi(a)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\mid\forall\pi:\mathcal{U}(1)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})\text{是表示}\}.$$

这确实是一个范数[46]，我们将 $\mathcal{U}(1)$ 在这个范数下的完备化记为 $\mathcal{A}(X,A)$，它是一个 C^*-代数。同理，我们可以定义 $\mathcal{U}(2)$ 的泛 C^*-代数 $\mathcal{A}(Y,B)$。由于 $\mathcal{U}(1)$ 和 $\mathcal{U}(2)$ 的生成元都是可数的，因此 $\mathcal{A}(X,A)$ 和 $\mathcal{A}(Y,B)$ 都是可分的。于是 $\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B)$ 在最小张量范数下亦为可分的。

另外还有

$$\mathcal{U}\simeq\mathcal{U}(1)\otimes_{alg}\mathcal{U}(2).$$

对非局域游戏 $\mathcal{G}=(X,Y,A,B,\lambda)$，其策略可以用泛游戏代数的表示描述如下：

(1)　由于确定性策略要求玩家对收到的问题必须给出确定的回答，即 e^x_a, f^y_b 都只能是 0 或 1。也就是说，游戏 $\mathcal{G}$ 的每个确定性策略可以由 $\mathcal{U}$ 的一个一维复表示 $\pi:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ 诱导，即

$$p(a,b\mid x,y)=\pi(e^x_af^y_b).$$

游戏 $\mathcal{G}$ 的概率策略是确定性策略的凸组合。

(2) 游戏 $\mathcal{G}$ 的每个有限维量子策略可以由 $\mathcal{U}(1)$ 和 $\mathcal{U}(2)$ 的有限维复表示 $\pi_1 : \mathcal{U}(1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $\pi_2 : \mathcal{U}(2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ 以及纠缠态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 诱导 (其中 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是有限维 Hilbert 空间)。即

$$p(a, b \mid x, y) = \langle \psi \mid \pi_1(e_a^x) \otimes \pi_2(f_b^y) \mid \psi \rangle.$$

如果去掉有限维的要求，则得到了无穷维量子策略。

(3) 游戏 $\mathcal{G}$ 的每个交换算子策略可以由 $\mathcal{U}$ 的一个复表示 $\pi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 及 $\mathcal{H}$ 中的单位向量 $|\psi\rangle$ 诱导，即

$$p(a, b \mid x, y) = \langle \psi \mid \pi(e_a^x f_b^y) \mid \psi \rangle.$$

特别地，如果我们要求交换算子策略 $(\pi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), |\psi\rangle \in \mathcal{H})$ 中的 $\mathcal{H}$ 是有限维向量空间，那么，利用双中心化子定理，可以证明：存在一个有限维量子策略 $\pi_1 \otimes \pi_2, \psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 使得这个有限维量子策略所对应的关联矩阵与原来的有限维交换算子策略的关联矩阵相等[18,37]。对于 (2),(3) 而言，表示将泛游戏代数的投影生成元映射成了 Hilbert 空间上的投影算子。游戏的经典值、量子值和交换算子值的表达式可以利用泛游戏代数的表示改写如下：

定义 2.3.3. *设非局域游戏 $\mathcal{G}$ 的泛游戏代数为 $\mathcal{U}$，定义游戏多项式*

$$\Phi_{\mathcal{G}} = \sum_{x,y} \sum_{a,b} \mu(x, y) \lambda(x, y, a, b) e_a^x f_b^y. \tag{2-5}$$

我们有

命题 2.3.1.

$$\omega_c(\mathcal{G}) = \max_{\pi\text{是一维表示}} \pi(\Phi_{\mathcal{G}}); \tag{2-6}$$

$$\omega_q(\mathcal{G}) = \sup_{\pi\text{是有限维表示}, |\psi\rangle \in \mathcal{H}} \langle \psi \mid \pi(\Phi_{\mathcal{G}}) \mid \psi \rangle; \tag{2-7}$$

$$\omega_{co}(\mathcal{G}) = \max_{\pi\text{是任意表示}, |\psi\rangle \in \mathcal{H}} \langle \psi \mid \pi(\Phi_{\mathcal{G}}) \mid \psi \rangle. \tag{2-8}$$

证明是显然的。需要注意的是，式 (2-7) 的证明用到了上面提到的结论：限制 Hilbert 空间是有限维时，交换算子策略一定可以改写成有限维量子策略。

下面我们介绍游戏的决定集 (determining set) 的概念。

定义 2.3.4. *设 $\mathcal{G}$ 为一个非局域游戏，其泛游戏代数为 $\mathcal{U}$。若集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ 满足如下性质：当且仅当 $\pi(\mathcal{F})|\psi\rangle = \{0\}$ 时，二元组 $(\pi, |\psi\rangle)$ 给出一个完美的交换算子策略，则称 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{G}$ 的决定集。*

根据文献[29] 中的定理 3.5，对任意非局域游戏，我们可自然地构造一个决定集：

命题 2.3.2. 设 $\mathcal{G}=(X,Y,A,B,\lambda)$ 为非局域游戏，则其无效元素的集合

$$\mathcal{N}=\{e_a^x f_b^y \mid \lambda(x,y,a,b)=0\} \tag{2-9}$$

构成一个决定集。我们称其为无效决定集。

我们不赘述其证明。这个命题的一个简单但十分本质的理解是，如果一个交换算子策略在无效决定集上给出回答的概率是 0 (即在评分函数为 0 的地方给出回答的概率是 0)，那么这个策略是完美策略，反之亦然。

推论 2.3.1. 无效决定集 $\mathcal{N}$ 在 $\mathcal{U}$ 中所生成的左理想 $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 也是决定集。

这可以由决定集的定义得到。事实上，完美交换算子策略可以视作决定集的“左方向零点”，因此决定集应该对左乘多项式封闭。

下面介绍泛游戏代数 $\mathcal{U}$ 上的 Hermitian 平方和 $\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$：

$$\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}=\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i^* u_i \mid u_i\in\mathcal{U},\ n\in\mathbb{N}\right\}, \tag{2-10}$$

则它可以视作 $\mathcal{U}$ 的正锥。$\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$ 具有阿基米德性质：任取 $u\in\mathcal{U}$，存在 $n\in\mathbb{N}^+$ 使得

$$n-u^*u\in\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}. \tag{2-11}$$

事实上，记 $\mathcal{U}=\mathbb{C}[G]$，不妨设 $u=\sum_{g\in G}u_g\cdot g$，$u_g\in\mathbb{C}$，则我们取 n 为 $\|u\|_1^2=(\sum_{g\in G}|u_g|)^2$ 的向上取整，即有式 (2-11) 成立[50]。类似地，不难验证子代数上的平方和 $\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}(1)}$ 和 $\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}(2)}$ 也满足阿基米德性质。

此外，我们有：$1\in\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$ 是代数内点。这是因为，$\forall u\in\mathcal{U}_{sa}$(自伴元)，都存在充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $\forall\,|\delta|<\varepsilon$，都有 $1+\delta\cdot u\in\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$。事实上，我们可以将 u 写成 $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ 的形式，其中 $\mathbf{x}$ 是一些 $\mathcal{U}$ 中单项式排成的列向量，而 $u\in\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$ 等价于存在半正定的矩阵 A 满足这种形式。那么，原问题转化成存在 ε 使得 $|\delta|<\varepsilon$ 时 $I+\delta\cdot A$ 形式的矩阵都是半正定的，而这是显然的。

以下的分离定理会在下一章用到，它是 Hahn-Banach 定理的一种几何形式：

定理 2.3.1. 设 V 是一个向量空间，$A,B\subseteq V$ 是非空的凸集，并且 $A\cap B=\varnothing$。如果 A 有代数内点，那么 A 和 B 可以用仿射超平面分离。

证明可参考[51] Corollary III.1.7。

第 3 章　两回答游戏的完美策略

3.1　背景介绍

定义 3.1.1. 如果非局域游戏 $\mathcal{G}$ 的回答集 $A = B = \{0, 1\}$，那么我们称 $\mathcal{G}$ 是一个两回答游戏。

显然对于两回答游戏，其无效决定集形如

$$\mathcal{N} = \{e_a^x f_b^a \mid (x, y, a, b) \in \Lambda\}. \tag{3-1}$$

其中 $\Lambda = \{(x, y, a, b) \in X \times Y \times A \times B \mid \lambda(x, y, a, b) = 0\}$。

关于两回答游戏，Cleve 等人证明了下面的命题：

命题 3.1.1. [6] 对于两回答游戏 $\mathcal{G}$，它有完美的有限维量子策略当且仅当它有完美的经典策略，即 $\omega_q(\mathcal{G}) = 1 \iff \omega_c(\mathcal{G}) = 1$。

利用有限维空间上的线性代数即可证明该命题。然而，这个命题在无穷维的情形一直未知。在本章中我们将推广[6] 的证明，利用无穷维空间上的的 Parseval 等式和 Cauchy 不等式证明：两回答游戏 $\mathcal{G}$ 有完美的有限维量子策略当且仅当它有完美的经典策略，即 $\omega_{qc}(\mathcal{G}) = 1 \iff \omega_c(\mathcal{G}) = 1$。

3.2　两回答游戏的完美交换算子策略

我们以如下的"零点定理"的形式给出本章的主定理。这个定理说明，两回答游戏的无效决定集 $\mathcal{N}$ 有一维的零点当且仅当 -1 不能写成泛游戏代数 $\mathcal{U}$ 上的 Hermitian 平方和与决定集 $\mathcal{N}$ 生成的左理想及其共轭理想的和的形式。

定理 3.2.1. 设 $\mathcal{U} = \mathbb{C}\langle\{e_x^a\}_{x\in X, a\in A} \cup \{f_b^y\}_{y\in Y, b\in B}\rangle/\mathfrak{I}$ 是两回答游戏 $\mathcal{G}$ 的泛游戏代数 *(参见定义1.1.13)*，则

$$-1 \notin \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*$$

成立当且仅当存在一维的 $*$-表示

$$\rho : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$$

使得

$$\rho(\mathcal{N}) = \{0\}.$$

其中 $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 表示由无效决定集 $\mathcal{N}$ 生成的左理想，$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \{a^* \mid a \in \mathcal{L}(\mathcal{N})\}$。

为了证明定理3.2.1，首先需要如下定理。这个定理是 Watts, Helton 和 Klep 给出的，它是一般非局域游戏存在完美交换算子策略的等价刻画。

定理 3.2.2. *[29] 以下陈述条件等价:*

(1) 非局域游戏 $\mathcal{G}$ 具有完美交换算子策略;

(2) 存在一个 $*$-表示 $\sigma : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ 满足

$$\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{N}))|\psi\rangle = \{0\}; \tag{3-2}$$

(3)

$$-1 \notin \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*, \tag{3-3}$$

其中 $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 表示由无效决定集 $\mathcal{N}$ 生成的左理想,$\mathcal{L}(\mathcal{N})^* = \{a^* \mid a \in \mathcal{L}(\mathcal{N})\}$。更进一步地,我们可以要求这里的 $\mathcal{H}$ 是可分的。

证明参见[29] 定理 4.3。可分性的要求是原证明没有提及的,我们在这里予以补充。为了论文的完整性,我们在这里列出这个证明,同时补充一些原证明中被省略掉的细节。

证明. 首先,(1) $\Longleftrightarrow$ (2) 来自于无效决定集 $\mathcal{N}$ 的定义,首先,游戏 $\mathcal{G}$ 的每个交换算子策略可以由 $\mathcal{U}$ 的一个复表示 $\pi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 及 $\mathcal{H}$ 中的单位向量 $|\psi\rangle$ 诱导,即

$$p(a, b \mid x, y) = \langle\psi \mid \pi(e_a^x f_b^y) \mid \psi\rangle.$$

于是由 $\mathcal{N}$ 的定义可得:$\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{N}))|\psi\rangle = \{0\}$ 等价于 $\forall e_a^x f_b^y \in \mathcal{N}$,有

$$\langle\psi|\sigma(e_a^x f_b^y)|\psi\rangle = 0,$$

也等价于 $p(a, b \mid x, y) = 0,\ \forall\lambda(x, y, a, b) = 0$,从而等价于 $(\sigma, |\psi\rangle)$ 是一个完美交换算子策略。下面我们来证明 (2) $\Longleftrightarrow$ (3)。

(2)$\Longrightarrow$(3): 用反证法。如果存在这样的 $(\sigma, |\psi\rangle)$ 满足条件 (3-2) 但是

$$-1 \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*,$$

即

$$-1 = h_1 + h_2 + h_3,\ h_1 \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}, h_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{N}), h_3 \in \mathcal{L}(\mathcal{N})^*,$$

那么我们有 $\sigma(h_2) \mid \psi\rangle = 0,\ \langle\psi \mid \sigma(h_3) = 0$,与 $|\psi\rangle$ 作内积后得

$$\langle\psi \mid \sigma(h_2) \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid \sigma(h_3) \mid \psi\rangle = 0,$$

以及 $\langle\psi \mid \sigma(h_1) \mid \psi\rangle \geqslant 0$。于是

$$-1 = -\langle\psi \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid \sigma(h_1 + h_2 + h_3) \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid \sigma(h_1) \mid \psi\rangle \geqslant 0,$$

矛盾!故这一方向成立。

(3)$\Longrightarrow$(2): 如果式 (3-3) 成立,我们通过分离定理和 GNS 构造的方法得到所需的 σ 和 $|\psi\rangle$。根据定理2.3.1,存在一个非零的泛函 $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ 能够分离 -1 和 $\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*$,即

$$f(-1) \leqslant 0, \quad f(\mathrm{SOS}_{\mathcal{A}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*) \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

由于 $\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$ 具有阿基米德性质，因此分离是严格的，即可以假设 $f(-1) = -1$。否则，若 $f(-1) = 0$，则任取 $u \in \mathcal{U}$，有 $f(u^*u) = f(n) - f(\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}) \leqslant 0$，而 $u^*u \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$，$f(u^*u) \geqslant 0$，即 $f(u^*u) = 0$，这推出 $f(\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}) = 0$，从而 $f = 0$，与 f 是非零分离泛函矛盾！

由于 $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 是 $\mathcal{U}$ 的子空间，由

$$f(\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*) \geqslant 0$$

可得

$$f(\mathcal{L}(\mathcal{N})) = \{0\} \text{ 且 } f(\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}) \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

对于任意自伴元 $g = g^* \in \mathcal{U}$，我们可以进行分解 $g = g_1 - g_2$，其中

$$g_1 = \left(\frac{g+1}{2}\right)^* \left(\frac{g+1}{2}\right) \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}},\ g_2 = \frac{1}{4}g^*g + \frac{1}{4} \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}.$$

由阿基米德性质可知存在 $\eta \in \mathbb{N}$ 使得 $\eta - g_1 \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$，因此 $\eta - g \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}$，且 $f(\eta - g) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$，即 $f(g) \in \mathbb{R}$。对于任意 $h \in \mathcal{U}$，利用

$$h = \frac{h + h^*}{2} + \mathrm{i}\frac{h - h^*}{2\mathrm{i}},$$

可得 $f(h^*) = f(h)^*$。

现在进行 GNS 构造。在 $\mathcal{U}$ 上定义半双线性形式

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle = f(\beta^* \alpha),$$

以及 $M = \{\alpha \in \mathcal{U} : f(\alpha^*\alpha) = 0\}$。根据 Cauchy-Schwarz 不等式可知 M 是 $\mathcal{A}$ 的左理想。构造商空间 $\widetilde{H} := \mathcal{A}/M$，并赋予内积 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$。将其完备化得到 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$。

需要说明的是，我们可以要求 $\mathcal{H}$ 是可分 Hilbert 空间。这是因为 $\mathcal{A}$ 只有有限个生成元，通过使用有理系数生成这些生成元的可数稠密子集，再用自然映射将其迁移到商空间上，即可得到 $\mathcal{H}$ 的可分性。

定义商映射 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{H}, \alpha \mapsto \alpha + M$，循环向量 $|\psi\rangle := \phi(1) = 1 + M$，以及左正则表示

$$\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \sigma(\alpha)(p + M) = \alpha p + M.$$

由阿基米德性质易证对任意 $\alpha \in \mathcal{A}$，$\sigma(\alpha)$ 是有界算子，因此 σ 是一个 $*$-表示。

现证明 $\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{N}))|\psi\rangle = \{0\}$。由于 $f(\mathcal{L}(\mathcal{N})) = \{0\}$ 且 $\mathcal{L}(\mathcal{N})^*\mathcal{L}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N})$，可知 $\mathcal{L}(\mathcal{N}) \subseteq M$。因此对任意 $\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{N}) \subseteq M$，有

$$\sigma(\beta)|\psi\rangle = \sigma(\beta)(1 + M) = \beta + M \in M, \quad \text{即} \quad \sigma(\beta)|\psi\rangle = 0 \in \mathcal{H}.$$

即为我们所求。 □

这个定理给出了一般非局域游戏存在完美交换算子策略的纯代数等价条件。但这个代数条件的使用并不容易，主要原因有以下两点：

- $\mathscr{U}$ 包含了两个玩家的所有测量信息，规模较大；
- $\mathcal{L}(\mathcal{N})+\mathcal{L}(\mathcal{N})^*$ 是一个左理想加上其共轭理想 (右理想) 的形式，并不容易处理。

因此我们希望能在特殊情形下对其进行简化。对于同步游戏的情形，Watts 等人在[29] 中已经进行了简化。定理3.2.1实际上是定理3.2.2在两回答的情形下的简化。第四章将给出定理3.2.2在镜像游戏情形下的简化。

接下来回到定理3.2.1的证明。

对于两回答游戏的泛游戏代数，我们记

$$A_x = e_0^x - e_1^x,\ B_y = f_0^y - f_1^y, \tag{3-4}$$

对任意的 $x \in X$，$y \in Y$，显然我们有如下的关系式成立:

$$A_x^2 = B_y^2 = 1, A_x = A_x^*,\ B_y = B_y^*, \tag{3-5}$$

$$e_a^x = \frac{1+(-1)^a A_x}{2},\ f_b^y = \frac{1+(-1)^b B_y}{2},\ \forall a, b \in \{0,1\}. \tag{3-6}$$

首先证明以下命题:

命题 3.2.1. *设 $\mathscr{U}$ 表示两回答游戏的泛游戏代数。假设存在一个 $*$-表示*

$$\sigma : \mathscr{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

以及非零向量 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (其中 $\mathcal{H}$ 为可分 Hilbert 空间)，使得对所有的 $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ ($\mathcal{N}$ 由方程 (3-1) 定义)，有

$$\sigma(\alpha)|\psi\rangle = 0$$

则存在一维 $*$-表示 $\rho : \mathscr{U} \to \mathbb{C}$ 满足

$$\rho(\mathcal{N}) = \{0\}.$$

注 3.2.1. *这个命题将文献[6] 定理 3 中针对两个有限维 Hilbert 空间张量积的论证，推广至无限维 Hilbert 空间的一般情形。实际上，命题3.2.1的条件意味着四元组*

$$(\mathcal{H}, \{\sigma(e_a^x)\}, \{\sigma(f_b^y)\}, |\psi\rangle)$$

为以 $\mathcal{N}$ 为无效决定集的两回答游戏定义了一个完美交换算子策略。进一步地，命题结论表明：由 ρ 诱导的两个映射

$$\begin{aligned} u : X &\to A \\ x &\mapsto a\ (\text{满足 } \rho(e_a^x) = 1) \end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned} v : Y &\to B \\ y &\mapsto b\ (\text{满足 } \rho(f_b^y) = 1) \end{aligned}$$

是良定义的，而且满足：$\forall (x, y, u(x), v(y)) \in X \times Y \times A \times B$，有

$$\rho(e_{u(x)}^x f_{v(y)}^y) = 1,$$

于是 $e_{u(x)}^x f_{v(y)}^y \notin \mathcal{N}$，即 $\lambda(x, y, u(x), v(y)) = 1$，即 u, v 构成了游戏 $\mathcal{G}$ 的一个完美确定性策略。

证明. 我们按如下方式构造一维表示 ρ。由于对任意固定的 (x, y) 有

$$\sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\langle\psi|\sigma(e_a^x f_b^y)|\psi\rangle = 1,$$

故存在 $(x, y, a, b) \in X \times Y \times A \times B$ 使得

$$\langle\psi|\sigma(e_a^x f_b^y)|\psi\rangle \neq 0.$$

令

$$\Pi = \{(x, y, a, b) \in X \times Y \times A \times B : \langle\psi|\sigma(e_a^x f_b^y)|\psi\rangle \neq 0\}, \tag{3-7}$$

则由

$$\sigma(\mathcal{L}(\mathcal{N}))|\psi\rangle = \{0\}$$

可知

$$\Pi \subseteq X \times Y \times A \times B \setminus \Lambda,$$

其中 Λ 为无效决定集 $\mathcal{N}$ 的指标集。

利用生成元 A_x 和 B_y (定义见式 (3-4))，我们可以重写：

$$\begin{aligned}\langle\psi|\sigma(e_a^x f_b^y)|\psi\rangle = &\frac{1}{4}\\ &+\frac{1}{4}(-1)^a\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle\\ &+\frac{1}{4}(-1)^b\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle\\ &+\frac{1}{4}(-1)^{a+b}\langle\psi|\sigma(A_xB_y)|\psi\rangle.\end{aligned} \tag{3-8}$$

由于 $\mathcal{H}$ **可分**，故我们可以选取 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots\}$，特别地，其中我们选择 $|\psi_1\rangle = |\psi\rangle$。定义：

$$k : X \to \mathbb{N} \tag{3-9}$$

$$x \mapsto \min\{j \in \mathbb{N} : \langle\psi_j|\sigma(A_x)|\psi\rangle \neq 0\}; \tag{3-10}$$

$$l : Y \to \mathbb{N} \tag{3-11}$$

$$y \mapsto \min\{j \in \mathbb{N} : \langle\psi_j|\sigma(B_y)|\psi\rangle \neq 0\}. \tag{3-12}$$

与文献[6] 定理 3 中的有限维情形不同，此处需要证明 $k(x)$ 和 $l(y)$ 对任意 $x \in X$, $y \in Y$ 良定。由于 $|\psi\rangle \neq 0$ 且 $\sigma(A_x)^2 = 1$, 因此必存在 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $\langle\psi_j|\sigma(A_x)|\psi\rangle \neq 0$ (否则将导致 $\sigma(A_x)$ 有零特征值，与 $\sigma(A_x)^2 = 1$ 矛盾！)。因此对每个 x，$k(x)$ 确实是可以取到的。同理可证 $l(y)$ 良定。

定义映射:

$$
\begin{aligned}
u: X &\to A \\
x &\mapsto \begin{cases} 0,\ 0 \leqslant \arg\langle\psi_{k(x)}|\sigma(A_x)|\psi\rangle < \pi; \\ 1,\ \pi \leqslant \arg\langle\psi_{k(x)}|\sigma(A_x)|\psi\rangle < 2\pi \end{cases}
\end{aligned} \tag{3-13}
$$

$$
\begin{aligned}
v: Y &\to B \\
y &\mapsto \begin{cases} 0,\ 0 \leqslant \arg\langle\psi_{l(y)}|\sigma(B_y)|\psi\rangle < \pi; \\ 1,\ \pi \leqslant \arg\langle\psi_{l(y)}|\sigma(B_y)|\psi\rangle < 2\pi \end{cases}
\end{aligned} \tag{3-14}
$$

其中 arg 表示取复数的辐角。我们有以下断言:

断言 3.2.1. 对任意 $(x, y, u(x), v(y)) \in X \times Y \times A \times B$，有

$$(x, y, u(x), v(y)) \in \Pi,$$

结合式 *(3-7)* 中集合 Π 的定义，有

$$\langle\psi|\sigma(e^x_{u(x)} f^y_{v(y)})|\psi\rangle \neq 0.$$

在完成命题3.2.1的证明后，我们将给出断言3.2.1的证明。现构造一维 $*$-表示 ρ 如下：对任意 $x \in X$，定义

$$\rho(e^x_{u(x)}) = 1,\ \rho(e^x_{1-u(x)}) = 0;$$

对任意 $y \in Y$，定义

$$\rho(f^y_{v(y)}) = 1,\ \rho(f^y_{1-v(y)}) = 0.$$

通过线性性与同态的性质，我们可以将 ρ 扩张至整个泛游戏代数 $\mathcal{U}$。

由于 $\rho(e^x_a)$ 与 $\rho(f^y_b)$ 仅取 0 或 1，其自然满足交换性。直接验证可知 ρ 满足:

$$\rho(e^x_a)^2 = \rho(e^x_a),\ \rho(f^y_b)^2 = \rho(f^y_b),$$

以及

$$\rho(e^x_0) + \rho(e^x_1) = 1,\ \rho(f^y_0) + \rho(f^y_1) = 1,$$

故 ρ 确为 $\mathcal{U}$ 的 $*$-表示。

由于

$$\rho(e^x_a f^y_b) = 1 \iff (a = u(x)) \wedge (b = v(y)),$$

由断言3.2.1可知

$$\rho(e^x_a f^y_b) = 1 \Longrightarrow (x, y, a, b) \in \Pi. \tag{3-15}$$

因 $\rho(e^x_a f^y_b)$ 取值仅为 0 或 1，且 $\Pi \cap \Lambda = \varnothing$，故对任意 $e^x_a f^y_b \in \mathcal{N}$，有

$$\rho(e^x_a f^y_b) = 0,$$

证毕。 □

注 3.2.2. 对两回答游戏 $\mathcal{G}$, 值 $\langle\psi|\sigma(e_a^x f_b^y)|\psi\rangle$ 等于玩家对问题 (x,y) 给出答案 (a,b) 的概率 $p(a,b\mid x,y)$。由于该交换算子策略是完美策略，因此 $\langle\psi|\sigma(e_a^x f_b^y)|\psi\rangle\neq 0$ 意味着评分函数 $\lambda(x,y,a,b)=1$。断言*3.2.1*表明

$$\lambda(x,y,u(x),v(y))=1,$$

即由 *(3-13)* 和 *(3-14)* 定义的映射 $u:X\to A$ 与 $v:Y\to B$ 就是该两回答游戏的完美确定性经典策略。

断言*3.2.1*的证明. 将 $a=u(x)$ 与 $b=v(y)$ 代入 (3-8) 计算得：

$$\begin{aligned}\langle\psi|\sigma(e_{u(x)}^x f_{v(y)}^y)|\psi\rangle=&\frac{1}{4}\\&+\frac{1}{4}(-1)^{u(x)}\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle\\&+\frac{1}{4}(-1)^{v(y)}\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle\\&+\frac{1}{4}(-1)^{u(x)+v(y)}\langle\psi|\sigma(A_xB_y)|\psi\rangle.\end{aligned}\tag{3-16}$$

注意到 $\sigma(A_x)$ 与 $\sigma(B_y)$ 为交换的自伴算子，因此 $\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle$, $\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle$ 及 $\langle\psi|\sigma(A_xB_y)|\psi\rangle$ 均为实数。

若 $\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle\neq 0$，因 $|\psi_1\rangle=|\psi\rangle$ 可得 $k(x)=1$。根据 (3-13)：

- 当 $\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle>0$ 时，$u(x)=0,(-1)^{u(x)}=1$；
- 当 $\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle<0$ 时，$u(x)=1,(-1)^{u(x)}=-1$；

故恒有

$$(-1)^{u(x)}\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle>0.$$

同理，若 $\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle\neq 0$，则

$$(-1)^{v(y)}\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle>0.$$

因此，当 $\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle$ 或 $\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle$ 非零时，我们有

$$\frac{1}{4}(-1)^{u(x)}\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle+\frac{1}{4}(-1)^{v(y)}\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle>0.$$

结合 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{u(x)+v(y)}\langle\psi|\sigma(A_xB_y)|\psi\rangle\geqslant 0$，可得

$$\langle\psi|\sigma(e_{u(x)}^x f_{v(y)}^y)|\psi\rangle>0.$$

现只需考虑 $\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle=\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle=0$ 的情形。针对无限维可分 Hilbert 空间，我们需要修改[6] 定理 3 的论证，利用 Cauchy-Schwarz 不等式与 Parseval 恒等式证明：

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{u(x)+v(y)}\langle\psi|\sigma(A_xB_y)|\psi\rangle>0.$$

反设

$$(-1)^{u(x)+v(y)}\langle\psi|\sigma(A_xB_y)|\psi\rangle=-1\tag{3-17}$$

成立。由 Cauchy-Schwarz 不等式：

$$\begin{aligned}&\left|(-1)^{u(x)+v(y)}\langle\psi|\sigma(A_xB_y)|\psi\rangle\right|\\ \leqslant&\left\|(-1)^{u(x)}\sigma(A_x)|\psi\rangle\right\|\cdot\left\|(-1)^{v(y)}\sigma(B_y)|\psi\rangle\right\|.\end{aligned}$$

由于 $|\psi\rangle$ 是单位向量且 $\sigma(A_x),\sigma(B_y)$ 的特征值仅为 ±1，可得

$$\|(-1)^{u(x)}\sigma(A_x)|\psi\rangle\|=1 \text{ 且 } \|(-1)^{v(y)}\sigma(B_y)|\psi\rangle\|=1.$$

结合 Cauchy-Schwarz 不等式的等号条件与假设 (3-17)，得：

$$(-1)^{u(x)}\sigma(A_x)|\psi\rangle=-(-1)^{v(y)}\sigma(B_y)|\psi\rangle. \tag{3-18}$$

根据 Parseval 恒等式，我们有：

$$(-1)^{u(x)}\sigma(A_x)|\psi\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{u(x)}\langle\sigma(A_x)\psi|\psi_j\rangle\cdot|\psi_j\rangle,$$

及

$$(-1)^{v(y)}\sigma(B_y)|\psi\rangle=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{v(y)}\langle\sigma(B_y)\psi|\psi_j\rangle\cdot|\psi_j\rangle,$$

方程 (3-18) 说明，对任意 $j\in\{1,2,\ldots\}$ 有：

$$(-1)^{u(x)}\langle\sigma(A_x)\psi|\psi_j\rangle=-(-1)^{v(y)}\langle\sigma(B_y)\psi|\psi_j\rangle, \tag{3-19}$$

但此式在 $j=\min\{k(x),l(y)\}$ 时必然不成立：若 $k(x)\neq l(y)$，显然矛盾；若 $k(x)=l(y)=j$，则辐角 $\arg\left((-1)^{u(x)}\langle\sigma(A_x)\psi|\psi_j\rangle\right)$ 与 $\arg\left((-1)^{v(y)}\langle\sigma(B_y)\psi|\psi_j\rangle\right)$ 均位于 $[0,\pi)$，再次导致矛盾！

故当 $\langle\psi|\sigma(A_x)|\psi\rangle=\langle\psi|\sigma(B_y)|\psi\rangle=0$ 时，必有

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{u(x)+v(y)}\langle\psi|\sigma(A_xB_y)|\psi\rangle>0,$$

即

$$\langle\psi|\sigma(e^x_{u(x)}f^y_{v(y)})|\psi\rangle>0,$$

断言得证。 □

最后证明定理 3.2.1：

定理 3.2.1 的证明. ($\Longleftarrow$) 用反证法。反设此方向不成立，即存在 $*$-表示 ρ 满足 $\rho(\mathcal{N})=\{0\}$，则

$$-1=\rho(-1)\in\rho(\mathrm{SOS}_{\mathcal{A}})\geqslant 0,$$

矛盾！

($\Longrightarrow$) 由定理 3.2.2 与命题3.2.1 直接可得。 □

显然有完美确定性策略的游戏一定有完美的交换算子策略。另一方面，按照定理3.2.2，$-1 \notin \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*$ 等价于游戏 $\mathcal{G}$ 有完美交换算子策略，而由定理3.2.1，在两回答游戏的情形下，这与 $\mathcal{N}$ 有一维的零点等价。而游戏 $\mathcal{G}$ 的每个确定性策略可以由 $\mathcal{U}$ 的一个一维复表示 $\pi : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ 诱导，即

$$p(a, b \mid x, y) = \pi(e_a^x f_b^y).$$

于是 $\mathcal{N}$ 有一维的零点等价于 $\mathcal{G}$ 的有完美的确定性策略。综上所述，有

推论 3.2.1. *对于两回答游戏 $\mathcal{G}$，它有完美的交换算子策略当且仅当它有完美的经典策略。*

3.3　总结与讨论

定理3.2.1的证明中最关键的地方是关于任意维数的 Hilbert 空间的处理。首先，我们需要保证 $\mathcal{H}$ 的可分性 (这可以由定理3.2.2中的可分性证明来保证)，这样才可以得到式 (3-10) 和 (3-12) 中 k, l 的定义，而 k, l 的良定义性不再由有限维空间直接得到，因此需要单独说明；其次，我们需要调整[6] 中使用 Cauchy 不等式和 Parseval 等式的使用方式，以保证得到良定义的系数是相反数 (式 (3-18) 到 (3-19) 的推导)。

以下是对我们这个定理的一些评注与讨论。

注 3.3.1. *在文献[29] Section 5 中，Watts、Helton 和 Klep 讨论了一种特殊类型的非局域游戏：torically determined game。一个非局域博弈被称为 torically determined game，如果该游戏存在具有以下形式的决定集 F：*

$$F = \{\beta_i g_i - 1 \mid \beta_i \in \mathbb{C},\ g_i \in G\},$$

其中 G 是泛游戏代数作为群代数时的生成群。Watts、Helton 和 Klep 证明了对于 torically determined 的游戏，判定其是否具有完美交换算子策略的问题可转化为一个判定子群成员的问题[29] Section 5。但该结果不能用于证明我们的定理，原因在于：若将 $\mathcal{N}$ 视为游戏的决定集，其元素未必能表示为 $\beta g - 1$（$\beta \in \mathbb{C}, g \in G$）的形式。换言之，两回答游戏不一定是 torically determined 游戏。

注 3.3.2. *当回答集 A 或 B 包含三个及以上元素时，我们的定理 3.2.1不再成立，因为存在具有完美交换算子策略但无完美经典策略的非局域游戏[6,13]。从另一角度看，此时方程 (3-8) 不再成立，导致我们无法得到类似结论。*

注 3.3.3. *代数 $\mathcal{A}$ 是有限生成的，集合 $\mathcal{N}$ 也是有限的。然而定理的证明依赖于无限维空间，目前尚不清楚能否简化证明以规避无限维空间的使用。*

第 4 章　镜像游戏的完美策略

本章我们讨论另一类非局域游戏：镜像游戏。

4.1　问题背景与预备知识

首先介绍同步游戏 (synchronous game)。

定义 4.1.1. *设非局域游戏 $\mathcal{G} = (X, X, A, A, \lambda)$，即 Alice 与 Bob 具有相同的问题集和回答集，并且当 Alice 和 Bob 收到相同的问题 x 时，他们给出不同的回答则一定不能获胜。即 $\forall x \in X$，有*

$$\lambda(x, x, a, b) = 0,\ a \neq b.$$

则称 $\mathcal{G}$ 是一个同步游戏。

同步游戏在图的量子染色问题上有重要的应用。对于同步游戏的完美策略，已经有以下结果[29,30,37,38]：

命题 4.1.1. *设 $\mathcal{G}$ 是一个同步游戏，其泛游戏代数为 $\mathcal{U}$，与 Alice 相关联的泛 C^*-代数 (定义2.3.2) 为 $\mathcal{A}(X, A)$，令*

$$\mathcal{I} = \langle \{e_a^x e_b^y \mid \lambda(x, y, a, b) = 0\} \rangle_{\mathcal{U}(1)}$$

是所有 $\{e_a^x e_b^y \mid \lambda(x, y, a, b) = 0\}$ 在 $\mathcal{U}(1)$ 中生成的双边理想，以及

$$\mathcal{A}(\mathcal{G}) = \mathcal{U}(1)/\mathcal{I}.$$

则

(1) [30,37] 关联矩阵 $p = (p(a, b \mid x, y))$ 给出 $\mathcal{G}$ 的一个完美交换算子策略当且仅当存在一个忠实的迹态 $\tau : \mathcal{A}(\mathcal{G}) \to \mathbb{C}$ 使得

$$p(a, b \mid x, y) = \tau(e_a^x e_b^y).$$

(2) [38] 关联矩阵 $p = (p(a, b \mid x, y))$ 给出 $\mathcal{G}$ 的一个完美量子逼近策略当且仅当 p 满足 $\lambda(x, y, a, b) = 0 \Longrightarrow p(a, b \mid x, y) = 0$ 并且存在一个 amenable 的迹态 (定义2.1.12) $\tau : \mathcal{A}(X, A) \to \mathbb{C}$ 使得

$$p(a, b \mid x, y) = \tau(e_a^x e_b^y).$$

(3) [29] $\mathcal{G}$ 有一个完美交换算子策略当且仅当

$$-1 \notin \widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)} + \mathcal{I} + \mathcal{I}^*$$

其中 $\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)}$ 的定义为

$$\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)} = \{a \in \mathcal{U}(1) \mid \exists b \in \mathrm{SOS}_{\mathcal{U}(1)},\ a - b = \sum_{j=1}^{k} (a_j b_j - b_j a_j),\ a_j, b_j \in \mathcal{U}(1)\}.$$

其中，命题4.1.1的结论 (3) 可以直接给出判定同步游戏没有完美交换算子策略的算法。我们将这一结果推广到了更一般的一类非局域游戏：镜像游戏。下面我们给出镜像游戏的定义。

定义 4.1.2 (镜像游戏)**.** 设 $\mathcal{G}$ 为具有问题集 $X \times Y$、回答集 $A \times B$ 和评分函数 $\lambda : X \times Y \times A \times B \to \{0,1\}$ 的非局域游戏，其中 $X \times Y$ 服从均匀分布。称 $\mathcal{G}$ 为镜像游戏，若存在映射 $\xi : X \to Y$ 和 $\eta : Y \to X$ 满足：

$$\lambda(x,\xi(x),a,b) \cdot \lambda(x,\xi(x),a',b) = 0,\ \forall x \in X, a \neq a' \in A, b \in B, \tag{4-1}$$

$$\lambda(\eta(y),y,a,b) \cdot \lambda(\eta(y),y,a,b') = 0,\ \forall y \in Y, a \in A, b \neq b' \in B. \tag{4-2}$$

同步游戏显然是镜像游戏，取 ξ 和 η 都是恒等映射即可看出。

作为同步游戏的推广，镜像游戏满足：对问题对 $(x,\xi(x))$ 而言，Alice 的回答由 Bob 的回答决定；相对应地，对问题对 $(\eta(y),y)$，Bob 的回答由 Alice 的回答决定。

例 4.1.1. 设非局域游戏 $\mathcal{G}$ 满足：$X = Y = A = B = \{0,1\}$，评分函数 λ 如下表所示：

λ \ (x,y) / (a,b)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	1	0	1	0
(0,1)	0	0	1	1
(1,0)	0	1	0	0
(1,1)	1	0	0	1

则我们容易验证 $\mathcal{G}$ 是一个镜像游戏，其中

$$\xi : 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 0,\ \eta : 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 1.$$

对一个镜像游戏 $\mathcal{G}$，设其泛游戏代数为 $\mathcal{U} = \mathbb{C}\langle \{e_x^a\}_{x\in X, a\in A} \cup \{f_b^y\}_{y \in Y, b\in B}\rangle / \mathfrak{I}$ (定义1.1.13)，在其上定义：

$$q_{y,b}^{\eta(y)} = \sum_{\substack{a\in A \\ \lambda(\eta(y),y,a,b)=1}} e_a^{\eta(y)}, \tag{4-3}$$

$$p_{x,a}^{\xi(x)} = \sum_{\substack{b\in B \\ \lambda(x,\xi(x),a,b)=1}} f_b^{\xi(x)}. \tag{4-4}$$

定义 4.1.3. 设 $\mathcal{G} = (X,Y,A,B,\lambda)$ 为非局域游戏。对任意 $x \in X, y \in Y, a \in A$ 及 $b \in B$，记

$$E_{x,y}^a = \{b \in B : \lambda(x,y,a,b) = 1\}, \tag{4-5}$$

$$E_{x,y}^b = \{a \in A : \lambda(x,y,a,b) = 1\}. \tag{4-6}$$

称该镜像游戏是正则的，当且仅当满足

$$\bigcup_{a\in A} E^a_{x,\xi(x)} = B \text{ 且 } \bigcup_{b\in B} E^b_{\eta(y),y} = A, \quad \forall x\in X, y\in Y. \tag{4-7}$$

注记：此条件首次出现于[41]，但未予命名。本章中只考虑正则的镜像游戏。

引理 4.1.1. 镜像游戏 $\mathcal{G}$ 是正则的，当且仅当其泛游戏代数满足：

$$\sum_{a\in A} p^{\xi(x)}_{x,a} = 1,\ \forall x\in X \text{ 且 } \sum_{b\in B} q^{\eta(y)}_{y,b} = 1,\ \forall y\in Y. \tag{4-8}$$

证明. 由正则性定义及泛游戏代数性质直接可得。 □

例 4.1.2. 对于例 *4.1.1* 定义的镜像游戏 $\mathcal{G}$，可以计算得：

$$q^{\eta(0)}_{0,0} = e^0_0, \quad q^{\eta(0)}_{0,1} = e^0_1, \quad q^{\eta(1)}_{1,0} = 0, \quad q^{\eta(1)}_{1,1} = e^0_0 + e^0_1 = 1.$$

易验证对任意 $y\in Y$ 有：

$$\sum_{b\in B} q^{\eta(y)}_{y,b} = 1.$$

类似地可得：

$$p^{\xi(0)}_{0,0} = f^0_0, \quad p^{\xi(0)}_{0,1} = f^0_1, \quad p^{\xi(1)}_{1,0} = 1, \quad p^{\eta(1)}_{1,1} = 0.$$

对任意 $x\in X$ 有：

$$\sum_{a\in A} p^{\xi(x)}_{x,a} = 1.$$

因此 $\mathcal{G}$ 是正则的镜像游戏。

设 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)$ 为 $\mathcal{U}(1)$ 的由下式生成的双边理想：

$$\left\{ e^x_a q^{\eta(y)}_{y,b} \mid \lambda(x,y,a,b) = 0 \right\}, \tag{4-9}$$

并设 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}2)$ 为 $\mathcal{U}(2)$ 的由下式生成的双边理想：

$$\left\{ f^y_b p^{\xi(x)}_{x,a} \mid \lambda(x,y,a,b) = 0 \right\}. \tag{4-10}$$

例 4.1.3. 我们继续例 *4.1.2* 的计算。双边理想 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)$ 由以下元素生成：

$$\{e^0_0e^0_1,\ e^0_1e^0_0,\ 0,\ e^0_0,\ e^0_1,\ e^1_1e^0_0,\ e^1_1e^0_1, 0, 0\}.$$

显然 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)$ 在 $\mathcal{U}(1)$ 中由 $\{e^0_0,\ e^0_1\}$ 生成。

对于镜像游戏的完美交换算子策略，[41] 定理 6.3 利用 C^*-代数上的迹条件给出了以下的刻画条件：

命题 4.1.2. [41] 设 $\mathcal{G}$ 为镜像游戏，且关联矩阵 $p = (p(a,b\mid x,y))_{X\times Y\times A\times B} \in C_{ns}$ 是完美的关联矩阵，则下列陈述等价：

(1) $p \in \mathcal{C}_{qc}$ 给出了 $\mathcal{G}$ 的一个完美交换算子策略;

(2) 存在迹态 $\tau : \mathcal{A}(X, A) \to \mathbb{C}$ 及保持单位元的 $*$-同态 $\rho : \mathcal{A}(Y, B) \to \mathcal{A}(X, A)$，满足 $\rho(\mathcal{S}_{Y,B}) \subseteq \mathcal{S}_{X,A}$ [1]，使得

$$p(a, b \mid x, y) = \tau(e_a^x \rho(f_b^y)), \quad x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B,$$

其中 $\mathcal{S}_{X,A} = \mathrm{span}\{e_a^x : x \in X, a \in A\}$，$\mathcal{S}_{Y,B} = \mathrm{span}\{f_b^y : y \in Y, b \in B\}$。

但是，这个刻画并不能直接给出算法。因此，推广命题4.1.1的 (3) 到镜像游戏的情形是十分必要的，这是本章的主要结果。

4.2 镜像游戏的完美交换算子策略

以下是本章的主定理。

定理 4.2.1. *设 $\mathcal{G}$ 是正则的镜像游戏，其泛游戏代数 (定义1.1.13) 为*

$$\mathcal{U} = \mathbb{C}\langle\{e_x^a\}_{x\in X, a\in A} \cup \{f_b^y\}_{y\in Y, b\in B}\rangle/\mathfrak{I},$$

无效决定集为 $\mathcal{N}$ (定义于命题2.3.2)，则其存在完美交换算子策略当且仅当满足以下任一等价条件:

(1) 存在 $*$-表示 $\pi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ 满足

$$\pi(\mathcal{L}(\mathcal{N}))|\psi\rangle = \{0\}; \tag{4-11}$$

(2) 存在 $*$-表示 $\pi' : \mathcal{U}(1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和迹态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ 满足

$$\pi'(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))|\psi\rangle = \{0\}; \tag{4-12}$$

(3) 存在 $*$-表示 $\pi'' : \mathcal{U}(2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和迹态 $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ 满足

$$\pi''(\mathcal{J}(\mathrm{mir}2))|\phi\rangle = \{0\}; \tag{4-13}$$

(4) 存在 $\mathcal{U}(1)$ 的 $*$-表示 π_0' 将其映射至迹 von Neumann 代数 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足

$$\pi_0'(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)) = \{0\}; \tag{4-14}$$

(5) 存在 $\mathcal{U}(2)$ 的 $*$-表示 π_0'' 将其映射至迹 von Neumann 代数 $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 满足

$$\pi_0''(\mathcal{J}(\mathrm{mir}2)) = \{0\}. \tag{4-15}$$

为证明定理4.2.1，我们引入若干引理。

引理 4.2.1. *对任意 $x \in X$ 和 $a \in A$，有 $e_a^x - p_{x,a}^{\xi(x)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$。类似地，对任意 $y \in Y$ 和 $b \in B$，有 $f_b^y - q_{y,b}^{\eta(y)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$，其中 $p_{x,a}^{\xi(x)}, q_{y,b}^{\eta(y)}$ 分别定义于式 (4-4) 和式 (4-3)。*

[1] 原文[41] 中 $\mathcal{S}_{X,A}$ 与 $\mathcal{S}_{Y,B}$ 的顺序有误，此处给出正确形式。

证明. 首先由 $\sum_{a'\in A} e^x_{a'} = 1$，可得：

$$
\begin{aligned}
& e^x_a - p^{\xi(x)}_{x,a} \\
&= e^x_a - \left(\sum_{a'\in A} e^x_{a'}\right) p^{\xi(x)}_{x,a} = e^x_a - e^x_a \cdot p^{\xi(x)}_{x,a} \\
&\quad + \left(\sum_{a'\neq a} e^x_{a'}\right) \cdot \left(\sum_{b\in B,\lambda(x,\xi(x),a,b)=1} f^{\xi(x)}_b\right) \\
&= e^x_a \cdot \left(1 - \sum_{b\in B,\lambda(x,\xi(x),a,b)=1} f^{\xi(x)}_b\right) \\
&\quad + \sum_{a'\neq a} \sum_{b\in B,\lambda(x,\xi(x),a,b)=1} e^x_{a'} f^{\xi(x)}_b.
\end{aligned}
$$

注意到：

$$
1 - \sum_{b\in B,\lambda(x,\xi(x),a,b)=1} f^{\xi(x)}_b = \sum_{b\in B,\lambda(x,\xi(x),a,b)=0} f^{\xi(x)}_b.
$$

根据 $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 的定义，有：

$$
\begin{aligned}
& e^x_a \left(1 - \sum_{b\in B,\lambda(x,\xi(x),a,b)=1} f^{\xi(x)}_b\right) \\
&= \sum_{b\in B,\lambda(x,\xi(x),a,b)=0} e^x_a f^{\xi(x)}_b \in \mathcal{L}(\mathcal{N}).
\end{aligned}
$$

另一方面，根据镜像游戏的定义，当 $a' \neq a$ 且 $\lambda(x,\xi(x),a,b) = 1$ 时，有 $\lambda(x,\xi(x),a',b) = 0$。因此有 $e^x_{a'} f^{\xi(x)}_b \in \mathcal{N}$，从而：

$$
\sum_{a'\neq a} \sum_{b\in B,\lambda(x,\xi(x),a,b)=1} e^x_{a'} f^{\xi(x)}_b \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-16}
$$

因此得证：

$$
e^x_a - p^{\xi(x)}_{x,a} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-17}
$$

类似地，$f^y_b - q^{\eta(y)}_{y,b}$ 可改写为：

$$
\begin{aligned}
f^y_b - q^{\eta(y)}_{y,b} &= f^y_b - q^{\eta(y)}_{y,b} \left(\sum_{b'\in B} f^y_{b'}\right) \\
&= f^y_b - q^{\eta(y)}_{y,b} f^y_b + \sum_{b'\neq b} q^{\eta(y)}_{y,b} f^y_{b'} \\
&= \left(1 - \sum_{a\in A,\lambda(\eta(y),y,a,b)=1} e^{\eta(y)}_a\right) \cdot f^y_b \\
&\quad + \sum_{b'\neq b} \sum_{a\in A,\lambda(\eta(y),y,a,b)=1} e^{\eta(y)}_a f^y_{b'}.
\end{aligned}
$$

同理可得：

$$\left(1-\sum_{a\in A,\lambda(\eta(y),y,a,b)=1} e_a^{\eta(y)}\right)\cdot f_b^y = \sum_{a\in A,\lambda(\eta(y),y,a,b)=0} e_a^{\eta(y)} f_b^y \in \mathcal{L}(\mathcal{N}),$$

并由镜像游戏定义得：

$$\sum_{b'\neq b}\sum_{a\in A,\lambda(\eta(y),y,a,b)=1} e_a^{\eta(y)} f_{b'}^y \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-18}$$

故证得：

$$f_b^y - q_{y,b}^{\eta(y)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-19}$$

□

引理 4.2.2. 以下的包含关系成立：

$$\{e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \mid \lambda(x,y,a,b)=0\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N}); \tag{4-20}$$

$$\{f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)} \mid \lambda(x,y,a,b)=0\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-21}$$

证明. 注意到：

$$e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} = e_a^x f_b^y - e_a^x\left(f_b^y - q_{y,b}^{\eta(y)}\right)$$

由于 $\lambda(x,y,a,b)=0$，我们知道 $e_a^x f_b^y \in \mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N})$。由引理 4.2.1，$f_b^y - q_{y,b}^{\eta(y)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$。因此有

$$e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-22}$$

对于 $f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)}$，有：

$$\begin{aligned} f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)} &= f_b^y e_a^x - f_b^y\left(e_a^x - p_{x,a}^{\xi(x)}\right) \\ &= e_a^x f_b^y - f_b^y\left(e_a^x - p_{x,a}^{\xi(x)}\right) \quad (\text{因 } e_a^x \text{ 与 } f_b^y \text{ 交换}) \end{aligned}$$

由 $\lambda(x,y,a,b)=0$ 我们仍有 $e_a^x f_b^y \in \mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N})$，且由引理 4.2.1 知 $e_a^x - p_{x,a}^{\xi(x)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$。故：

$$f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-23}$$

证毕。 □

引理 4.2.3. 以下包含关系成立：$\mathcal{J}(\mathrm{mir1}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N})$，$\mathcal{J}(\mathrm{mir2}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N})$。

证明. 首先考虑一个单项式

$$w(e) = e_{a_1}^{x_1}\cdots e_{a_t}^{x_t} \in \mathcal{U}(1),$$

我们有以下等式:

$$
\begin{aligned}
& e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_t}^{x_t} - p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_{t-1}}^{x_{t-1}} \\
= & e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_t}^{x_t} - e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_{t-1}}^{x_{t-1}} p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} \\
= & e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_{t-1}}^{x_{t-1}} \left(e_{a_t}^{x_t} - p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} \right) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}).
\end{aligned}
$$

进一步可得

$$
\begin{aligned}
& e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_{t-1}}^{x_{t-1}} e_{a_t}^{x_t} - p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} p_{x_{t-1},a_{t-1}}^{\xi(x_{t-1})} \cdots p_{x_1,a_1}^{\xi(x_1)} \\
= & e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_t}^{x_t} - p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_{t-1}}^{x_{t-1}} \\
& + p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} \left(e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_{t-1}}^{x_{t-1}} - p_{x_{t-1},a_{t-1}}^{\xi(x_{t-1})} e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_{t-2}}^{x_{t-2}} \right) \\
& + \cdots + p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} \cdots p_{x_2,a_2}^{\xi(x_2)} \left(e_{a_1}^{x_1} - p_{x_1,a_1}^{\xi(x_1)} \right) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}).
\end{aligned}
\tag{4-24}
$$

记

$$
p_{x_1,a_1}^{\xi(x_1)} \cdots p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} = w(p),
$$

注意到 $p_{x_t,a_t}^{\xi(x_t)} \cdots p_{x_1,a_1}^{\xi(x_1)} = w^*(p)$ (对多项式取对合)，因此等式 (4-24) 可改写为

$$
w(e) - w^*(p) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-25}
$$

考虑形式为

$$
z = \sum_{\substack{x,y,a,b,\ \lambda(x,y,a,b)=0 \\ u,w}} u(e) \cdot e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \cdot w(e) \in \mathcal{J}(\mathrm{mir1}),
$$

的任意元素，其中 $u(e), w(e)$ 是 $\mathcal{U}(1)$ 中的单项式且满足 $\lambda(x,y,a,b)=0$。我们作如下计算:

$$
\begin{aligned}
z &= \sum \left(u(e) \cdot e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \cdot \big(w(e) - w^*(p) \big) + u(e) \cdot e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} w^*(p) \right) \\
&= \sum \left(u(e) \cdot e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \cdot \big(w(e) - w^*(p) \big) + w^*(p)\, u(e) \cdot e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \right).
\end{aligned}
$$

第二个等号成立是因为 $w^*(p)$ 属于 $\mathcal{U}(2)$ 中的多项式，因此与 $\mathcal{U}(1)$ 中元素可交换。根据式 $(4-25)$，有

$$
u(e) \cdot e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \cdot \big(w(e) - w^*(p) \big) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}), \tag{4-26}
$$

同时由引理 4.2.2 知

$$
w^*(p) \cdot u(e) \cdot e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \tag{4-27}
$$

于是有：每个 $z \in \mathcal{J}(\mathrm{mir1})$ 都满足 $z \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$，综上可得 $\mathcal{J}(\mathrm{mir1}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N})$。

同理，我们有以下的计算:

$$
\begin{aligned}
& f_{b_1}^{y_1} \cdots f_{b_t}^{y_t} - q_{y_t,b_t}^{\eta(y_t)} f_{b_1}^{y_1} \cdots f_{y_{t-1}}^{y_{t-1}} \\
= & f_{b_1}^{y_1} \cdots f_{b_t}^{y_t} - f_{b_1}^{y_1} \cdots f_{b_{t-1}}^{y_{t-1}} q_{y_t,b_t}^{\eta(y_t)} \\
= & f_{b_1}^{y_1} \cdots f_{b_{t-1}}^{y_{t-1}} (f_{b_t}^{y_t} - q_{y_t,b_t}^{\eta(y_t)}) \in \mathcal{L}(\mathcal{N}).
\end{aligned}
\tag{4-28}
$$

类似可得

$$\begin{aligned} w(f) - w^*(q) = &f_{b_1}^{y_1} \cdots f_{b_{t-1}}^{y_{t-1}} f_{b_t}^{y_t} \\ &- q_{y_t,b_t}^{\eta(y_t)} q_{y_{t-1},b_{t-1}}^{\eta(y_{t-1})} \cdots q_{y_1,y_1}^{\eta(y_1)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \end{aligned} \tag{4-29}$$

对于形如

$$z' = \sum u(f) \cdot f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)} \cdot w(f) \in \mathcal{J}(\mathrm{mir2})$$

的元素，我们有

$$\begin{aligned} z' &= \sum \Big(u(f) \cdot f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)} \cdot \big(w(f) - w^*(q) \big) + u(f) \cdot f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)} w^*(q) \Big) \\ &= \sum \Big(u(f) \cdot f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)} \cdot \big(w(f) - w^*(q) \big) + w^*(q) u(f) \cdot f_b^y p_{x,a}^{\xi(x)} \Big) \\ &\in \mathcal{L}(\mathcal{N}). \end{aligned}$$

因此可得 $\mathcal{J}(\mathrm{mir2}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{N})$。 □

引理 4.2.4. 设 $(\pi, |\psi\rangle)$ 为正则镜像游戏 $\mathcal{G}$ 的完美交换算子策略，则 $|\psi\rangle$ 在 $\pi(\mathcal{U}(1))$ 和 $\pi(\mathcal{U}(2))$ 上均为迹态 *(定义2.1.9)*。

证明. 对 $\pi(\mathcal{U}(1))$，只需证对任意不同的 $e_{a_1}^{x_1}$ 和 $e_{a_2}^{x_2}$ 有：

$$\langle\psi|\pi(e_{a_1}^{x_1})\pi(e_{a_2}^{x_2})|\psi\rangle = \langle\psi|\pi(e_{a_2}^{x_2})\pi(e_{a_1}^{x_1})|\psi\rangle,$$

之后，通过对单项式的次数进行归纳，以及态的线性性质即可得到所需结论。

为了证明以上事实，注意到：由于 $(\pi, |\psi\rangle)$ 是 $\mathcal{G}$ 的完美交换算子策略，根据定义 2.3.4 和命题 2.3.2 可知 $\pi(\mathcal{L}(\mathcal{N}))|\psi\rangle = \{0\}$。由引理 4.2.1 知每个元素 $e_a^x - p_{x,a}^{\xi(x)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$，因此有

$$\pi(e_{a_1}^{x_1} - p_{x_1,a_1}^{\xi(x_1)})|\psi\rangle = 0, \quad \text{且} \quad \pi(e_{a_2}^{x_2} - p_{x_2,a_2}^{\xi(x_2)})|\psi\rangle = 0.$$

于是得到

$$\begin{aligned} &\langle\psi|\pi(e_{a_1}^{x_1})\pi(e_{a_2}^{x_2})|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\pi(e_{a_1}^{x_1})\pi(p_{x_2,a_2}^{\xi(x_2)})|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\pi\left(e_{a_1}^{x_1} p_{x_2,a_2}^{\xi(x_2)}\right)|\psi\rangle && (\pi\text{ 为同态表示}) \\ &= \langle\psi|\pi\left(p_{x_2,a_2}^{\xi(x_2)} e_{a_1}^{x_1}\right)|\psi\rangle && (p_{x_2,a_2}^{\xi(x_2)}\text{ 与 } e_{a_1}^{x_1}\text{ 可交换}) \\ &= \langle\psi|\pi(p_{x_2,a_2}^{\xi(x_2)})\pi(e_{a_1}^{x_1})|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\pi(e_{a_2}^{x_2})\pi(e_{a_1}^{x_1})|\psi\rangle. \end{aligned}$$

这表明 $a \mapsto \langle\psi|a|\psi\rangle$ 在 $\pi(\mathcal{U}(1))$ 上构成迹态。

同理，利用 $f_b^y - q_{y,b}^{\eta(y)} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ 可证得 $|\psi\rangle$ 在 $\pi(\mathcal{U}(2))$ 上亦为迹态。 □

现在我们可以证明定理4.2.1了。

定理 *4.2.1* 的证明. 我们将证明 (1) $\iff$ (2) $\iff$ (4) 和 (1) $\iff$ (3) $\iff$ (5)。

首先，根据决定集的定义，(1) 等价于完美交换算子策略的存在性。

(1) $\Longrightarrow$ (2): 假设 $(\pi, |\psi\rangle)$ 是满足 (1) 条件的交换算子策略，我们令 π' 为 π 在 $\mathscr{U}(1)$ 上的限制。显然有：

$$\pi'(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))|\psi\rangle = \pi(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))|\psi\rangle \subseteq \pi(\mathcal{L}(\mathcal{N}))|\psi\rangle = \{0\},$$

其中第一个等号来自限制操作，包含关系由引理 4.2.3 得出，第二个等号由命题 2.3.2 得出。根据引理 4.2.4，$|\psi\rangle$ 是迹态，因此 (1) $\Longrightarrow$ (2) 得证。

(2) $\Longrightarrow$ (1): 使用 $(\pi', |\psi\rangle)$ 我们可以定义如下的正线性泛函：

$$\ell' : \mathscr{U}(1) \to \mathbb{C}, \quad h \mapsto \langle\psi|\pi'(h)|\psi\rangle.$$

由于 $|\psi\rangle$ 是迹态，ℓ' 具有迹性。将 ℓ' 扩展为 $\mathscr{U}$ 上的线性泛函 ℓ，其作用在单项式上为：

$$\ell : w(e)u(f) \mapsto \ell'\left(w(e)u^*(q)\right),$$

其中当 $u(f) = f_{b_1}^{y_1} \cdots f_{b_{t-1}}^{y_{t-1}} f_{b_t}^{y_t}$ 时，

$$u^*(q) = q_{y_t,b_t}^{\eta(y_t)} q_{y_{t-1},b_{t-1}}^{\eta(y_{t-1})} \cdots q_{y_1,b_1}^{\eta(y_1)}.$$

我们证明 ℓ 是良定义的。正则性条件保证：

$$\sum_{b\in B} q_{y,b}^{\eta(y)} = 1, \ \forall y \in Y. \qquad \text{(由引理 4.1.1)}$$

因此有：

$$\ell\left(\sum_{b\in B} f_b^y\right) = \ell'\left(\sum_{b\in B} q_{y,b}^{\eta(y)}\right) = \langle\psi|\psi\rangle = 1, \ \forall y \in Y.$$

另一方面，

$$\ell\left(\sum_{b\in B} f_b^y\right) = \ell(1) = \ell'(1) = 1.$$

故 ℓ 确为良定义。

接下来证明 ℓ 能分离 -1 和 $\mathrm{SOS}_{\mathscr{U}} + \mathcal{L}(\mathcal{N}) + \mathcal{L}(\mathcal{N})^*$。这个证明是[29] 中定理 8.3 的推广。

由于 $|\psi\rangle$ 是迹态，ℓ 具有对称性：对所有 $h \in \mathscr{U}(1)$ 有 $\ell\left(h^*\right) = \ell(h)^*$。验证 ℓ 的正性：令 $h = \sum_{i,j} \beta_{ij} w_i(e) u_j(f) \in \mathscr{U}$，则：

$$h^*h = \sum_{i,j}\sum_{k,s} \beta_{ij}^* \beta_{ks} \cdot w_i^*(e) w_k(e) u_j^*(f) u_s(f),$$

从而：

$$\ell\left(h^*h\right) = \sum_{i,j}\sum_{k,s} \beta_{ij}^* \beta_{ks} \cdot \ell'\left(w_i^*(e) w_k(e) u_s^*(f) u_j(f)\right) \tag{4-30}$$

设:

$$\check{h}=\sum_{i,j}\beta_{ij}w_i(e)u_j^*(q)\in\mathcal{U}(1)$$

则:

$$\check{h}^*\check{h}=\sum_{i,j}\sum_{k,s}\beta_{ij}^*\beta_{ks}u_j(q)w_i^*(e)w_k(e)u_s^*(q),$$

$$\ell'\left(\check{h}^*\check{h}\right)=\sum_{i,j}\sum_{k,s}\beta_{ij}^*\beta_{ks}\ell'\left(u_j(q)w_i^*(e)w_k(e)u_s^*(q)\right) \tag{4-31}$$

由 ℓ' 的迹性可得:

$$\begin{aligned}&\ell'\left(w_i^*(e)w_k(e)u_s^*(q)u_j(q)\right)\\ =&\ell'\left(u_j(q)w_i^*(e)w_k(e)u_s^*(q)\right),\end{aligned}$$

这说明式 (4-30) 和式 (4-31) 的值相等，因此:

$$\ell\left(h^*h\right)=\ell'\left(\check{h}^*\check{h}\right)\geqslant 0,$$

即：$\ell(\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}})\geqslant 0.$。

最后证明 $\ell(\mathcal{L}(\mathcal{N}))=\{0\}$。$\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 中的元素形如:

$$w(e)u(f)e_a^xf_b^y=w(e)e_a^xu(f)f_b^y \tag{4-32}$$

其中 $\lambda(x,y,a,b)=0$。将 ℓ 作用于式 (4-32) 得:

$$\ell\left(w(e)e_a^xu(f)f_b^y\right)=\ell'\left(w(e)e_a^xq_{y,b}^{\eta(y)}u^*(q)\right).$$

由于 $e_a^xq_{y,b}^{\eta(y)}\in\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)$，故:

$$w(e)e_a^xq_{y,b}^{\eta(y)}u^*(q)\in\mathcal{J}(\mathrm{mir}1).$$

因此:

$$\ell'\left(w(e)e_a^xq_{y,b}^{\eta(y)}u^*(q)\right)=0.$$

已证 $\ell(-1)=-1$ 且:

$$\ell\left(\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}+\mathcal{L}(\mathcal{N})+\mathcal{L}(\mathcal{N})^*\right)\subseteq\mathbb{R}_{\geqslant 0},$$

故 $-1\notin\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}}+\mathcal{L}(\mathcal{N})+\mathcal{L}(\mathcal{N})^*$。之后用类似于定理3.2.2 (即[29] 定理 4.3) 的证明过程即可得到 (1) 的结论。

(2) $\Longrightarrow$ (4): 现在已经有满足条件 (2) 的 $(\pi',|\psi\rangle)$，其中 $\pi':\mathcal{U}(1)\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 $*$-表示，$|\psi\rangle$ 是迹态。构造满足 (4) 的 von Neumann 代数 $\mathcal{W}$ 和 $\pi_0':\mathcal{U}(1)\to\mathcal{W}$ 如下。

将 $\{\pi'(\mathcal{U}(1))|\psi\rangle\}\subseteq\mathcal{H}$ 的完备化记为 $\check{\mathcal{H}}$，显然 $\check{\mathcal{H}}$ 是 $\mathcal{H}$ 的闭子空间。则 π' 自然诱导 $*$-表示 $\check{\pi}'$: $\mathcal{U}(1)\to\mathcal{B}(\check{\mathcal{H}})$。令 $\mathcal{W}=\mathcal{B}(\check{\mathcal{H}})$ 和 $\pi_0'=\check{\pi}'$，下面证明它们即为 (4) 所需。

首先注意到 $\mathcal{B}(\check{\mathcal{H}})$ 在弱算子拓扑下是闭集，故其确实是 von Neumann 代数；其次，由于 $|\psi\rangle$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上的迹态，则 $|\psi\rangle$ 在 $B(\check{\mathcal{H}})$ 上亦为迹态，因此映射 $\tau:\mathcal{B}(\check{\mathcal{H}})\to\mathbb{C}, a\mapsto\langle\psi|a|\psi\rangle$ 是 $\mathcal{B}(\check{\mathcal{H}})$ 上的迹线性泛函，且 $(\mathcal{B}(\check{\mathcal{H}}),\tau)$ 构成迹 von Neumann 代数；最后，还要验证 $\check{\pi}'(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))=\{0\}$，这只需验证如下断言：

断言 4.2.1. 对任意 $u\in\mathcal{U}(1)$ 及 $|\phi\rangle=\pi'(u)|\psi\rangle\in\check{\mathcal{H}}$，有 $\check{\pi}'(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))|\phi\rangle=\{0\}$.

下面验证该断言，计算可得：

$$\begin{aligned}
&\check{\pi}'(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))|\phi\rangle\\
=&\pi'(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)u)|\psi\rangle &&(\text{由 }\phi\text{ 的定义})\\
=&\pi'(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))|\psi\rangle &&(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)\text{ 为双边理想})\\
=&\{0\} &&(\text{由条件 (2)}).
\end{aligned}$$

该方向证完。

(4) $\Longrightarrow$ (2): 从条件 (4) 中定义的迹 von Neumann 代数 $\mathcal{W}$ 及其迹 τ 出发，由定理2.1.3(GNS 构造)，我们得到：存在 Hilbert 空间 $\mathcal{K}$、单位向量 $|\rho\rangle\in\mathcal{K}$ 及 $*$-表示 $\pi_1':\mathcal{W}\to\mathcal{B}(\mathcal{K})$，使得

$$\tau(a)=\left\langle\pi_1'(a)\rho\mid\rho\right\rangle,\quad a\in\mathcal{W}.$$

由于 τ 为迹，因此 ρ 是 $\pi_1'(\mathcal{W})$ 的迹态。此时，$*$-表示 $\pi_1'\circ\pi_0':\mathcal{U}(1)\to\mathcal{B}(\mathcal{K})$ 与 $|\rho\rangle\in\mathcal{K}$ 即满足条件 (2)。

(1) $\Longrightarrow$ (3): 该证明与 (1) $\Longrightarrow$ (2) 类似，但需使用引理 4.2.3和引理4.2.4中关于 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}2)$ 和 $\mathcal{U}(2)$ 的结论。

(3) $\Longrightarrow$ (1): 此证明与 (2) $\Longrightarrow$ (1) 结构相似。这里，我们将线性泛函 $\ell':\mathcal{U}(2)\to\mathbb{C}$ 延拓为代数 $\mathcal{U}$ 上的线性泛函 ℓ_1，定义如下：

$$\ell_1:\ u(e(2))w(e(1))\mapsto\ell'\left(u(e(2))w^*(p)\right).$$

由于 $\sum_{a\in A}p_{x,a}^{\xi(x)}=1,\forall x\in X$，可知 ℓ_1 良定义。关于 $\ell_1(\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}})\geqslant 0$ 的证明与 (2) $\Longrightarrow$ (1) 中对应部分类似。

为证 $\ell_1(\mathcal{L}(\mathcal{N}))=\{0\}$，注意到 $\mathcal{U}(1)$ 与 $\mathcal{U}(2)$ 元素可交换，故 $\mathcal{N}$ 中元素可表为 $f_b^ye_a^x$ 形式。此时 $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ 中的元素为形如

$$w(e)u(f)f_b^ye_a^x=u(f)f_b^yw(e)e_a^x \tag{4-33}$$

的单项式线性组合，其中 $\lambda(x,y,a,b)=0$。将 ℓ_1 作用于 (4-33) 得

$$\ell_1\left(u(f)f_b^yw(e)e_a^x\right)=\ell'\left(u(f)f_b^yp_{x,a}^{\xi(x)}w^*(p)\right).$$

因为 $f_b^yp_{x,a}^{\xi(x)}\in\mathcal{J}(\mathrm{mir}2)$，故 $u(f)f_b^yp_{x,a}^{\xi(x)}w^*(p)\in\mathcal{J}(\mathrm{mir}2)$。由此可得

$$\ell'\left(u(f)f_b^yp_{x,a}^{\xi(x)}w^*(p)\right)=0,$$

即 $\ell_1(\mathcal{L}(\mathcal{N}))=\{0\}$。之后仍类似于定理3.2.2即证。

最后，(3) $\Longrightarrow$ (5) 与 (5) $\Longrightarrow$ (3) 的证明可分别类比 (2) $\Longrightarrow$ (4) 与 (4) $\Longrightarrow$ (2) 的证明过程。这样我们就完成了整个定理的证明。 □

注 4.2.1. *当镜像游戏不满足正则性条件时，定理 4.2.1 可能不成立。例如，若令评分函数 λ 对所有问题及答案恒为 0，此时由于 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)=\mathcal{J}(\mathrm{mir}2)=\{0\}$，该游戏不是正则镜像游戏。此时定理 4.2.1 的条件 (2) 与 (4) 自动成立，但显然 $\mathcal{G}$ 不存在完美交换算子策略。因此，定理 4.2.1 的结论仅对正则镜像游戏有效。*

在文献[27] 中，Klep 与 Schweighofer 证明了 von Neumann 代数上 Connes 嵌入猜想等价于迹版本的正零点定理。关于迹优化的最新进展可参见[36,52,53]。文献[29] 的定理 8.7 指出，若 $*$-代数 $\mathcal{A}$ 满足阿基米德条件 (即对任意 $a\in\mathcal{A}$，存在 $\varepsilon\in\mathbb{N}$ 使得 $\varepsilon-a^*a\in\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{A}}$)，其中

$$\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{A}}=\{a\in\mathcal{A}\mid\exists b\in\mathrm{SOS}_{\mathcal{A}},\ a-b\ \text{为换位子之和}\},\tag{4-34}$$

$\mathfrak{L}\subseteq\mathcal{A}$ 是一个左理想, 那么以下条件等价:

- 存在 $*$-表示 $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 与非零迹态 $|\psi\rangle\in\mathcal{H}$ 满足

$$\pi(f)|\psi\rangle=0,\ \forall f\in\mathfrak{L};\tag{4-35}$$

- 存在 $*$-表示 $\pi:\mathcal{A}\to\mathcal{F}$ 至迹 von Neumann 代数 $(\mathcal{F},\tau)$ 满足

$$\tau(\pi(f))=0,\ \forall f\in\mathfrak{L};\tag{4-36}$$

-

$$-1\notin\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{A}}+\mathfrak{L}+\mathfrak{L}^*.\tag{4-37}$$

我们在 2.3 节中已经说明，$\mathcal{U}(1)$ 与 $\mathcal{U}(2)$ 均为群代数，且 $\mathcal{U}(1)$ 与 $\mathcal{U}(2)$ 满足阿基米德性 (注意 $\mathrm{SOS}_{\mathcal{A}}\subseteq\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{A}}$)。结合上述等价条件 (4-35), (4-37) 与本文定理 4.2.1 的条件 (2),(4)，可得如下推论:

推论 4.2.1. *设正则镜像游戏 $\mathcal{G}$ 的泛游戏代数为 $\mathcal{U}$，无效决定集为 $\mathcal{N}$，则 $\mathcal{G}$ 存在完美交换算子策略，当且仅当 $-1\notin\widetilde{\mathrm{SOS}}_{\mathcal{U}(1)}+\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)+\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)^*$。特别地，若镜像游戏满足*

$$-1\in\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}(1)}+\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)+\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)^*,\tag{4-38}$$

则该游戏不存在完美交换策略。类似结论对 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}2)$ 亦成立。

推论4.2.1没有用到任何范数结构，是一个纯代数的刻画条件，因此可以设计相应的算法来检验对给定的游戏，条件 (4-38) 是否成立。

注意到 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)$ 为双边理想，故 $\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)+\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)^*$ 仍为双边理想，其生成元集为

$$\left\{e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)},\ q_{y,b}^{\eta(y)} e_a^x \mid \lambda(x,y,a,b)=0\right\}.\tag{4-39}$$

对此类理想成员问题，可采用非交换 Gröbner 基方法进行判定[54–57]。

4.3　程序与示例

我们先介绍非交换的 Gröbner 基的定义。

定义 4.3.1. 给定自由代数 $\mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle$ 中的双边理想 J 及单项式序，若子集 $B \subset J$ 的首项集合 $\mathrm{LT}(B)$ 能够生成理想 J 的首项集合 $\mathrm{LT}(J)$，则称子集 B 为 J 的 *Gröbner* 基。

我们有以下的事实：

- 给定理想 J 的 Gröbner 基 GB，非交换多项式满足

$$f \in J \iff f \to_{\mathrm{GB}} 0.$$

其中 $\to_{\mathrm{GB}}$ 表示用 Gröbner 基 GB 约化该多项式。

- 在非交换情形下，有限生成理想的 Gröbner 基可能包含无穷多个元素。

Helton 等人开发的 **NCAlgebra** 包 (Mathematica 环境下) 可用于计算非交换 Gröbner 基。

根据推论 4.2.1，我们可以通过非交换 Gröbner 基与半定规划证明正则镜像游戏 $\mathcal{G}$ 不存在完美交换算子策略。具体步骤如下：

(1) 令 $\mathbb{C}\langle e \rangle$ 为由生成元集 $\{e_a^x \mid x \in X,\ a \in A\}$ 生成的自由代数，Π 为从 $\mathbb{C}\langle e \rangle$ 到 $\mathscr{U}(1)$ 的典范投影。则 $\Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))$ 是 $\mathbb{C}\langle e \rangle$ 中由

$$\begin{gathered} \left\{ e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)} \mid \lambda(x,y,a,b) = 0 \right\} \\ \cup \left\{ (e_a^x)^2 - e_a^x,\ e_{a_1}^x e_{a_2}^x,\ \sum_{a \in A} e_a^x - 1 \right\} \end{gathered} \tag{4-40}$$

生成的双边理想。因此 $\Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)) + \Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))^*$ 为由

$$\begin{gathered} \left\{ e_a^x q_{y,b}^{\eta(y)},\ q_{y,b}^{\eta(y)} e_a^x \mid \lambda(x,y,a,b) = 0 \right\} \\ \cup \left\{ (e_a^x)^2 - e_a^x,\ e_{a_1}^x e_{a_2}^x,\ \sum_{a \in A} e_a^x - 1 \right\} \end{gathered} \tag{4-41}$$

生成的双边理想。

(2) 计算 $\Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)) + \Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))^*$ 的非交换 Gröbner 基 GB。

(i) 若 $1 \in \mathrm{GB}$，则有

$$-1 \in \mathrm{SOS}_{\mathbb{C}\langle e \rangle} + \Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1)) + \Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}1))^*, \tag{4-42}$$

从而可得

$$-1 \in \mathrm{SOS}_{\mathscr{U}(1)} + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1) + \mathcal{J}(\mathrm{mir}1)^*, \tag{4-43}$$

即该游戏不存在完美策略。

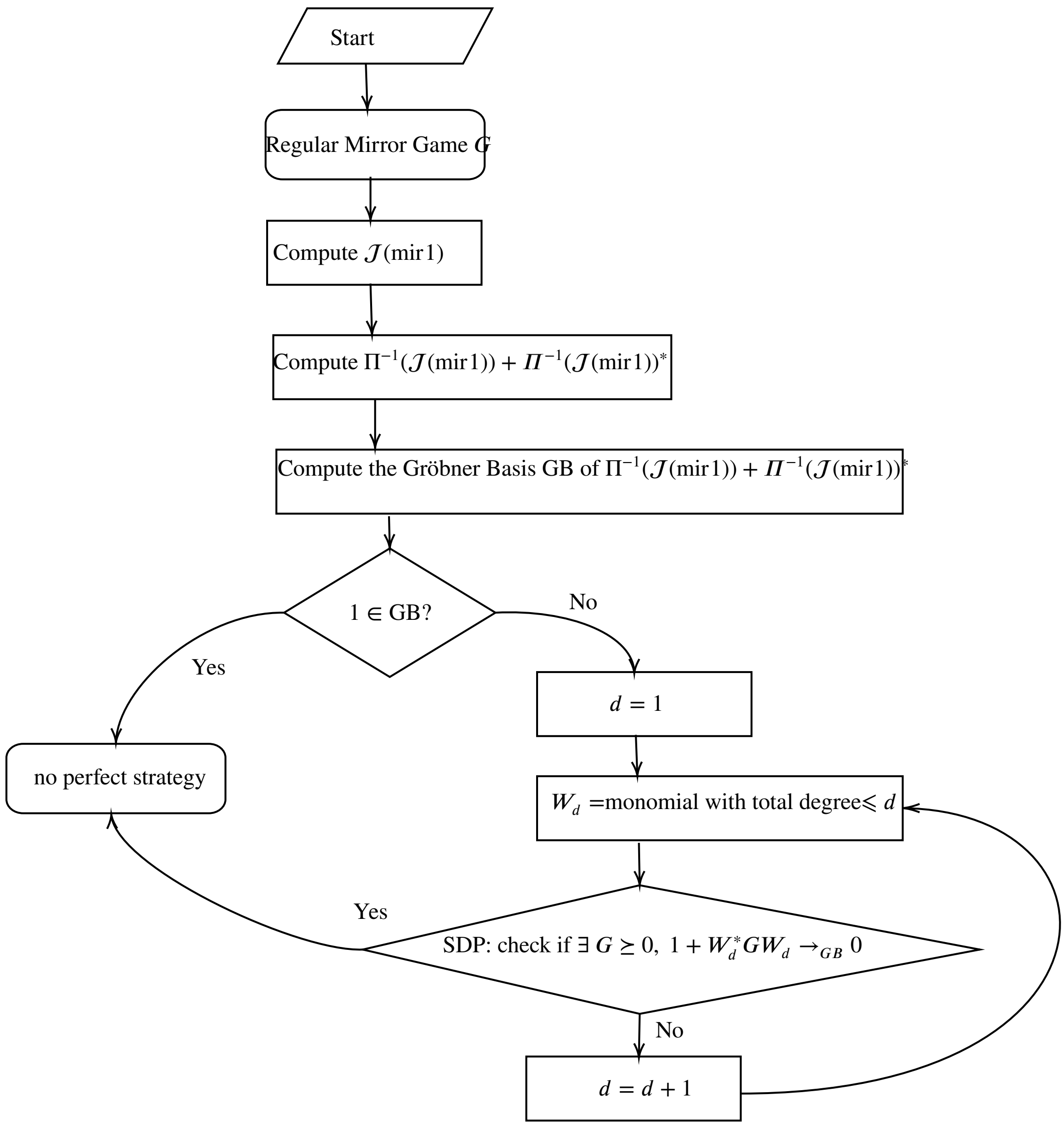
(ii) 否则，检验是否存在多项式 $s_j \in \mathcal{U}(1)$ 使得

$$1 + \sum_{j=1}^{k} s_j^* s_j \in \Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}\,1)) + \Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir}\,1))^*.$$

令 W_d 为 $\mathbb{C}\langle e\rangle$ 中总次数不超过 d 的单项式构成的列向量。使用半定规划求解器判断是否存在半正定矩阵 G 满足

$$1 + W_d^* G W_d \to_{\mathrm{GB}} 0 \tag{4-44}$$

- 若 (4-44) 存在解 G，则镜像游戏无完美策略；
- 否则，令 $d := d + 1$ 并重复本步骤。



注 4.3.1. 因为两个及以上变量生成的自由代数是**非诺特**的，计算非交换 *Gröbner* 基的 *Buchberger* 算法可能不终止[57,58]，因此本过程可能无法在有限步内结束。

而对于半正定规划的部分，若在某个次数 d 终止，则可验证镜像游戏无完美交换算子策略；否则无法判定其存在性。事实上，根据[41] 定理 5.1，模仿游戏 $\mathcal{G}$ 存在完美交换算子策略当且仅当其 C^*-代数 $C^*(\mathcal{G})$ 上存在迹态。而由[59] 注 2.21，$C^*(\mathcal{G})$ 是自由超图 C^*-代数，不存在有限步内终止的算法判定自由超图 C^*-代数是否存在迹态 ([59] 定理 3.6)。因此，不存在有限步终止的算法可判定镜像游戏 (作为模仿游戏子类) 的完美交换策略存在性。

例 4.3.1. *继续考虑例4.1.1中的非局域游戏。令 $\mathbb{C}\langle e\rangle$ 为由 $\{e^i_j \mid (i,j)\in\{0,1\}^2\}$ 生成的自由代数，$\mathcal{U}(1)$ 为泛游戏代数 $\mathcal{U}$ 中由相同生成元构成的子代数。考虑自然投影 $\Pi:\mathbb{C}\langle e\rangle\to\mathcal{U}(1)$。*

注意到 $\mathcal{J}(\mathrm{mir1})$ 是对 $*$ 运算封闭的，故有

$$\mathcal{J}(\mathrm{mir1})+\mathcal{J}(\mathrm{mir1})^*=\mathcal{J}(\mathrm{mir1}),$$

且

$$\begin{aligned}&\Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir1}))\\&=\{e^0_0,\ e^0_1,\ e^0_0+e^0_1-1,\ e^1_0+e^1_1-1,\\&\quad e^0_0e^0_1,\ e^0_1e(1^0_0,\ e^1_0e^1_1,\ e^1_1e^1_0,\\&\quad (e^0_0)^2-e^0_0,\ (e^0_1)^2-e^0_1,\\&\quad (e^1_0)^2-e^1_0,\ (e^1_1)^2-e^1_1\}\end{aligned}$$

为 $\mathbb{C}\langle e\rangle$ 中的双边理想。显然

$$-1\in\mathrm{SOS}_{\mathcal{U}(1)}+\mathcal{J}(\mathrm{mir1})\iff -1\in\mathrm{SOS}_{\mathbb{C}\langle e\rangle}+\Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir1}))$$

使用 NCAlgebra 软件（见 https://github.com/NCAlgebra/）可计算得 $\Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir1}))$ 的 Gröbner 基包含 1，即

$$-1\in\Pi^{-1}(\mathcal{J}(\mathrm{mir1}))$$

故此游戏无完美交换算子策略。

总结本章的内容，我们证明了：对于同步游戏的推广镜像游戏，在正则条件下，其有完美交换算子策略等价于 -1 不能写成 $\mathcal{U}(1)$ 上的 Hermitian 平方和与换位子以及双边理想 $\mathcal{J}(\mathrm{mir1})+\mathcal{J}(\mathrm{mir1})^*$ 的和的形式，而这个条件是纯代数的，因此基于非交换 Gröbner 基和半正定规划，我们给出了判定一个正则镜像游戏没有完美交换算子策略的算法。

第 5 章　模仿游戏的完美策略

本章我们讨论镜像游戏的推广：模仿游戏。

5.1　背景介绍与预备知识

定义 5.1.1. *非局域游戏* $\mathcal{G}=(X,Y,A,B,\lambda)$ *称为***模仿游戏** *(imitation game)，若其满足以下两个条件：*

(a) 对任意 $x\in X$ *及不同的元素* $a,a'\in A$*，存在* $y\in Y$ *使得*

$$\sum_{b\in B}\lambda(a,b\mid x,y)\lambda\left(a',b\mid x,y\right)=0,$$

(b) 对任意 $y\in Y$ *及相异元素* $b,b'\in B$*，存在* $x\in X$ *使得*

$$\sum_{a\in A}\lambda(a,b\mid x,y)\lambda\left(a,b'\mid x,y\right)=0.$$

按照以上定义，镜像游戏显然是模仿游戏。定义5.1.1中的条件(a)和(b) 表明，对 $\mathcal{G}$ 的一个完美策略来说，Alice 和 Bob 的回答是互相被对方的回答确定的。与镜像游戏不同的是，镜像游戏中需要保持互相确定的问题对 (x,y) 与 Alice 和 Bob 的回答无关，而模仿游戏中保持互相确定的问题对 (x,y) 中，由 Alice 收到的问题 x 与 Alice 对该问题的回答才能确定 Bob 的回答 y，Bob 这一边同理。

对于一般的非局域游戏，也可以通过泛 C^*-代数上的不同的迹态条件来给出相应类型的关联矩阵，结论如下：

命题 5.1.1. *[15] 设* $p=(p(a,b\mid x,y))_{X\times Y\times A\times B}\in C_{ns}(X,Y,A,B)$*，则：*

(1) $p\in C_q(X,Y,A,B)$ *当且仅当存在定义在* $\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B)$ *上的有限维的态* τ*(即其 GNS 构造得到的是一个有限维空间)，使得*

$$p(a,b\mid x,y)=\tau(e_a^x\otimes f_b^y).$$

(2) $p\in C_{qa}(X,Y,A,B)$ *当且仅当存在定义在* $\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B)$ *上的态* τ*，使得*

$$p(a,b\mid x,y)=\tau(e_a^x\otimes f_b^y).$$

(3) $p\in C_{qc}(X,Y,A,B)$ *当且仅当存在定义在* $\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\max}\mathcal{A}(Y,B)$ *上的态* τ*，使得*

$$p(a,b\mid x,y)=\tau(e_a^x\otimes f_b^y).$$

证明参见 Fritz 的工作[15] Proposition 3.4 或 Paulsen 与 Todorov 的工作[18] Theorem 2.10。需要注意的是，Fritz 的命题[15] Proposition 3.4 是用 POVM 表述

的，但我们可以通过 Naimark 扩张定理 (定理2.2.1) 或利用[37] 定理 5.3 将命题转化成用 PVM 表述，即本章中的形式。

对非局域游戏 $\mathcal{G}$ 而言，我们把所有完美无通讯策略对应的关联矩阵记作 $C_{ns}(\mathcal{G})$，其中完美交换算子策略对应的关联矩阵的集合记作 $C_{qc}(\mathcal{G})$，所有完美的逼近量子关联矩阵 (即 $p \in C_{qa}$ 且 $\lambda(x,y,a,b) = 0 \implies p(a,b \mid x,y) = 0$ 的关联矩阵) 的集合记作 $C_{qa}(\mathcal{G})$，类似地我们也可以定义 $C_q(\mathcal{G})$, $C_{qs}(\mathcal{G})$。

为了突出代数生成元的指标集，本章中我们将泛游戏代数的两个子代数 $\mathcal{U}(1)$ (见定义2.3.1的下方) 记为 $\mathbb{C}\langle X, A\rangle$，$\mathcal{U}(2)$ 记为 $\mathbb{C}\langle Y, B\rangle$。

对于模仿游戏，文献[41] 中已经得到了以下的结论：

命题 5.1.2. *[41] 设模仿游戏 $\mathcal{G}$ 的泛游戏代数为 $\mathcal{U} = \mathbb{C}\langle\{e_x^a\}_{x\in X, a\in A} \cup \{f_b^y\}_{y\in Y, b\in B}\rangle/\mathfrak{I}$ (见定义1.1.13)。定义 $C^*(\mathcal{G}) = C^*(\mathcal{U})/\mathcal{I}(\mathcal{N})$，其中 $C^*(\mathcal{U})$ 为 $\mathcal{U}$ 生成的泛 C^* 代数，$\mathcal{I}(\mathcal{N})$ 是无效决定集生成的双边理想，则*

(1) 关联矩阵 $p \in C_{qc}(\mathcal{G})$ (即它是 $\mathcal{G}$ 的完美交换算子策略) 当且仅当 $C^*(\mathcal{G}) \neq 0$ 且存在迹态 $\tau : C^*(\mathcal{G}) \to \mathbb{C}$ 使得

$$\tau(e_a^x f_b^y) = p(a,b \mid x,y), \forall x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B;$$

(2) $C_q(\mathcal{G}) = C_{qs}(\mathcal{G})$。

然而，这个命题没有对 $C_{qa}(\mathcal{G})$ 进行讨论，这就是我们本章的主要任务。

对于镜像游戏的情形，文献[41] 给出了如下结果：

命题 5.1.3. *[41] 设 $\mathcal{G}$ 为镜像游戏，且关联矩阵 $p = (p(a,b \mid x,y))_{X\times Y\times A\times B} \in C_{ns}(\mathcal{G})$，则下列陈述等价：*

(1) $p \in C_{qa}(\mathcal{G})$;

(2) 存在 amenable 的迹态 $\tau : \mathcal{A}(X,A) \to \mathbb{C}$ 及保持单位元的 $*$-同态 $\rho : \mathcal{A}(Y,B) \to \mathcal{A}(X,A)$，满足 $\rho(\mathcal{S}_{Y,B}) \subseteq \mathcal{S}_{X,A}$ [1]，使得

$$p(a,b \mid x,y) = \tau(e_a^x \rho(f_b^y)), \quad x \in X, y \in Y, a \in A, b \in B,$$

其中 $\mathcal{S}_{X,A} = \mathrm{span}\{e_a^x : x \in X, a \in A\}$，$\mathcal{S}_{Y,B} = \mathrm{span}\{f_b^y : y \in Y, b \in B\}$。

该刻画利用了由一个玩家的指标确定的代数 $\mathcal{A}(X,A)$ 上的 amenable 的迹态。我们旨在将命题 5.1.3 推广至模仿游戏情形，即利用由一个玩家的投影生成的更小的代数来刻画完美量子逼近策略。定理 5.2.3 将引入的 von Neumann 代数 $\mathscr{U}$ 即起此作用。定理 5.2.2 为模仿游戏 $\mathcal{G}$ 提供了 $p \in C_{qa}(\mathcal{G})$ 的充分条件。不同于文献[30] 定理 3.2 的结果，我们仅在 $|X| = |A| = 2$ 的情形下证明了定理 5.2.2 的逆命题成立。该定理是否可推广至一般情形仍然是开放问题，值得进一步探究。

[1] 原文[41] 中 $\mathcal{S}_{X,A}$ 与 $\mathcal{S}_{Y,B}$ 的顺序有误，此处给出正确形式。

5.2　模仿游戏的完美量子逼近策略

首先我们给出一个命题5.1.1的加强版本，它是命题5.1.2在完美量子逼近策略的情形下的对应。

定理 5.2.1. 设 $\mathcal{G} = (X, Y, A, B, \lambda)$ 为模仿游戏，且无通讯关联矩阵 $p \in \mathcal{C}_{ns}(\mathcal{G})$ 为完美的关联矩阵 *(见定义1.1.4)*。则以下条件等价：

(1) $p \in \mathcal{C}_{qa}(\mathcal{G})$;

(2) 存在 $\mathcal{A}(X, A) \otimes_{\min} \mathcal{A}(Y, B)$ 上的态 τ 满足

$$p(a, b \mid x, y) = \tau(e_a^x \otimes f_b^y),$$

且限制态 $\tau\big|_{\mathcal{A}(X,A)\otimes \mathbf{1}}$ 与 $\tau\big|_{\mathbf{1}\otimes \mathcal{A}(Y,B)}$ 均为迹态。

证明. (2)⇒(1) 可直接由命题 5.1.1 推得。现证 (1)⇒(2)。

因 $p \in \mathcal{C}_{qa}(\mathcal{G})$, 据 (1-9) 知对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有限维 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_1(\varepsilon), \mathcal{H}_2(\varepsilon)$、单位向量 ψ_ε、PVM 族 $\{P_a^x(\varepsilon) : a \in A\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1(\varepsilon))$ (对每个 $x \in X$) 以及 $\{Q_b^y(\varepsilon) : b \in B\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_2(\varepsilon))$ (对每个 $y \in Y$)，使得

$$\left| p(a, b \mid x, y) - \langle \psi_\varepsilon | P_a^x(\varepsilon) \otimes Q_b^y(\varepsilon) | \psi_\varepsilon \rangle \right| < \varepsilon.$$

而由完美策略的定义，$p = (p(a, b \mid x, y)) \in \mathcal{C}_{qa}(\mathcal{G})$ 当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda(x, y, a, b) = 0$，我们有

$$\langle \psi_\varepsilon | P_a^x(\varepsilon) \otimes Q_b^y(\varepsilon) | \psi_\varepsilon \rangle < \varepsilon. \tag{5-1}$$

对任意 $x \in X$，$y \in Y$ 及 $b \in B$，定义

$${}^x\Pi_b^y(\varepsilon) = \sum_{a \in A, \lambda(x,y,a,b)=1} P_a^x(\varepsilon),$$

则 ${}^x\Pi_b^y(\varepsilon)$ 为 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1(\varepsilon))$ 中的投影。于是由式 (5-1) 可得

$$\begin{aligned}
&\langle \psi_\varepsilon | (1 - {}^x\Pi_b^y(\varepsilon)) \otimes Q_b^y(\varepsilon) | \psi_\varepsilon \rangle \\
= &\sum_{a \in A, \lambda(x,y,a,b)=0} \langle \psi_\varepsilon | P_a^x(\varepsilon) \otimes Q_b^y(\varepsilon) | \psi_\varepsilon \rangle \\
= &\sum_{a \in A, \lambda(x,y,a,b)=0} p(a, b \mid x, y) \\
< &\, |A| \varepsilon.
\end{aligned}$$

因 $(1 - {}^x\Pi_b^y(\varepsilon)) \otimes Q_b^y(\varepsilon)$ 为幂等元，故

$$\left\| (1 - {}^x\Pi_b^y(\varepsilon)) \otimes Q_b^y(\varepsilon) | \psi_\varepsilon \rangle \right\| = \langle \psi_\varepsilon | (1 - {}^x\Pi_b^y(\varepsilon)) \otimes Q_b^y(\varepsilon) | \psi_\varepsilon \rangle^{\frac{1}{2}} < M_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

由模仿游戏的定义，对 $b \neq b'$ 及 $y \in Y$，存在 $x \in X$ 使得

$$\sum_{a \in A} \lambda(x, y, a, b) \lambda\left(x, y, a, b'\right) = 0.$$

对如此选取的 x, y, b, b'，有

$$\begin{aligned}&\left\langle \psi_\varepsilon \left| {}^x\Pi_b^y(\varepsilon) \otimes Q_{b'}^y(\varepsilon) \right| \psi_\varepsilon \right\rangle \\ =& \sum_{a\in A, \lambda(x,y,a,b)=1} \left\langle \psi_\varepsilon \left| P_a^x(\varepsilon) Q_{b'}^y(\varepsilon) \right| \psi_\varepsilon \right\rangle \\ =& \sum_{a\in A, \lambda(x,y,a,b)=1} p(a, b' \mid x, y).\end{aligned}$$

由模仿游戏的条件，当 $\lambda(x, y, a, b) = 1$ 时 $p(a, b' \mid x, y) < \varepsilon$，故

$$\left\langle \psi_\varepsilon \left| {}^x\Pi_b^y(\varepsilon) \otimes Q_{b'}^y(\varepsilon) \right| \psi_\varepsilon \right\rangle < |A|\varepsilon,$$

即

$$\| {}^x\Pi_b^y(\varepsilon) \otimes Q_{b'}^y(\varepsilon) |\psi_\varepsilon\rangle \| < M_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

定义

$$\Pi_b^y(\varepsilon) = \bigwedge_{x\in X} {}^x\Pi_b^y(\varepsilon),$$

上式中投影算子的交定义为全空间 $\mathcal{H}$ 到所有 ${}^x\Pi_b^y(\varepsilon)$ 的像空间的交的投影。由投影的 De Morgan 律得

$$1 - \Pi_b^y(\varepsilon) = \bigvee_{x\in X} (1 - {}^x\Pi_b^y(\varepsilon)).$$

从而有

$$\begin{aligned}&\left\| (1 - \Pi_b^y(\varepsilon)) \otimes Q_b^y(\varepsilon) |\psi_\varepsilon\rangle \right\| \\ =& \left\| (\bigvee_{x\in X} (1 - {}^x\Pi_b^y(\varepsilon))) \otimes Q_b^y(\varepsilon) |\psi_\varepsilon\rangle \right\| \\ \leqslant& \sum_{x\in X} \left\| (1 - {}^x\Pi_b^y(\varepsilon)) \otimes Q_b^y(\varepsilon) |\psi_\varepsilon\rangle \right\| \\ <& M_3 \varepsilon^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

对 $b' \neq b \in B$，亦有

$$\left\| \Pi_b^y(\varepsilon) \otimes Q_{b'}^y(\varepsilon) |\psi_\varepsilon\rangle \right\| \leqslant \| {}^x\Pi_b^y(\varepsilon) \otimes Q_{b'}^y(\varepsilon) |\psi_\varepsilon\rangle \| < M_4 \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

现在我们可以证明以下的不等式：

$$\begin{aligned}&\left\| \left(1 \otimes Q_b^y(\varepsilon) - \Pi_b^y(\varepsilon) \otimes 1 \right) |\psi_\varepsilon\rangle \right\| \\ =& \left\| \left(1 \otimes Q_b^y(\varepsilon) - \Pi_b^y(\varepsilon) \otimes \sum_{b'\in B} Q_{b'}^y(\varepsilon) \right) |\psi_\varepsilon\rangle \right\| \\ \leqslant& \left\| (1 - \Pi_b^y(\varepsilon)) \otimes Q_b^y(\varepsilon) |\psi_\varepsilon\rangle \right\| + \sum_{b'\neq b} \left\| \Pi_b^y(\varepsilon) \otimes Q_{b'}^y(\varepsilon) |\psi_\varepsilon\rangle \right\| \\ <& M_5 \varepsilon^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

因此，对任意 $y_1, y_2 \in Y$ 及 $b_1, b_2 \in B$，有

$$\begin{aligned}
&\left|\langle\psi_\varepsilon|\Big((1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))(1\otimes Q_{b_2}^{y_2}(\varepsilon)) - (1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))(\Pi_{b_2}^{y_2}(\varepsilon)\otimes 1)\Big)|\psi_\varepsilon\rangle\right| \\
=&\left|\langle(1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))\psi_\varepsilon \mid \Big(1\otimes Q_{b_2}^{y_2}(\varepsilon) - \Pi_{b_2}^{y_2}(\varepsilon)\otimes 1\Big)\psi_\varepsilon\rangle\right| \\
\leqslant&\left\|(1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))|\psi_\varepsilon\rangle\right\|\cdot\left\|\Big(1\otimes Q_{b_2}^{y_2}(\varepsilon) - \Pi_{b_2}^{y_2}(\varepsilon)\otimes 1\Big)|\psi_\varepsilon\rangle\right\| \\
<&M_6\varepsilon^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

由张量积的定义，下面的交换性是显然的：

$$\langle\psi_\varepsilon|(1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))(\Pi_{b_2}^{y_2}(\varepsilon)\otimes 1)|\psi_\varepsilon\rangle = \langle\psi_\varepsilon|(\Pi_{b_2}^{y_2}(\varepsilon)\otimes 1)(1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))|\psi_\varepsilon\rangle,$$

类似可得

$$\left|\langle\psi_\varepsilon|\Big((\Pi_{b_2}^{y_2}(\varepsilon)\otimes 1)(1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon)) - (1\otimes Q_{b_2}^{y_2}(\varepsilon))(1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))\Big)|\psi_\varepsilon\rangle\right| < M_7\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

综上得关键估计式

$$\left|\langle\psi_\varepsilon|\Big((1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))(1\otimes Q_{b_2}^{y_2}(\varepsilon)) - (1\otimes Q_{b_2}^{y_2}(\varepsilon))(1\otimes Q_{b_1}^{y_1}(\varepsilon))\Big)|\psi_\varepsilon\rangle\right| < M_8\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (5\text{-}2)$$

现构造所需态 τ。选取 $\{P_a^x(\varepsilon) : a \in A\}$ 与 $\{Q_b^y(\varepsilon) : b \in B\}$ 后，可得 $*$-同态

$$\begin{aligned}
\pi_{\varepsilon,A} : \mathcal{A}(X,A) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1(\varepsilon)) \\
e_a^x &\mapsto P_a^x(\varepsilon),
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
\pi_{\varepsilon,B} : \mathcal{A}(Y,B) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2(\varepsilon)) \\
f_b^y &\mapsto Q_b^y(\varepsilon).
\end{aligned}$$

根据 Brown 与 Ozawa 的专著[46] 推论 3.5.5，$\pi_{\varepsilon,A}\otimes_{\min}\pi_{\varepsilon,B} : \mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1(\varepsilon)\otimes\mathcal{H}_2(\varepsilon))$ 为有界 $*$-同态，故对任意 $\varepsilon > 0$，

$$\begin{aligned}
\tau_\varepsilon : \mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B) &\to \mathbb{C} \\
e_a^x\otimes f_b^y &\mapsto \langle\psi_\varepsilon|P_a^x(\varepsilon)\otimes|\psi_\varepsilon\rangle
\end{aligned}$$

为 $\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B)$ 上的态。取 $\varepsilon = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$，得到态序列 $\{\tau_{\frac{1}{n}}\}$。由 Banach-Alaoglu 定理知存在弱 $*$-聚点 τ。结合估计式

$$\left|\tau_\varepsilon((1\otimes f_{b_1}^{y_1})(1\otimes f_{b_2}^{y_2}) - (1\otimes f_{b_2}^{y_2})(1\otimes f_{b_1}^{y_1}))\right| < M_8\varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

由 ε 的任意性得

$$\tau((1\otimes f_{b_1}^{y_1})(1\otimes f_{b_2}^{y_2}) - (1\otimes f_{b_2}^{y_2})(1\otimes f_{b_1}^{y_1})) = 0,$$

通过归纳可证 $\tau\big|_{\mathbf{1}\otimes\mathcal{A}(Y,B)}$ 为迹态。同理可证 $\tau\big|_{\mathcal{A}(X,A)\otimes 1}$ 的迹性。 □

接下来，我们为模仿游戏 $\mathcal{G}$ 的 $p \in C_{qa}(\mathcal{G})$ 提供一个充分条件。

定理 5.2.2. 设 $\mathcal{G} = (X, Y, A, B, \lambda)$ 为模仿游戏，且无通讯关联矩阵 $p \in C_{ns}(\mathcal{G})$ 为完美关联。若存在 von Neumann 代数 $\mathcal{U}$、$*$-同态 $\rho : \mathbb{C}\langle X, A\rangle \otimes_{alg} \mathbb{C}\langle Y, B\rangle \to \mathcal{U}$ 及 $\mathcal{U}$ 上的 *amenable* 的迹态 τ 使得

$$\tau \circ \rho(e_a^x \otimes f_b^y) = p(a, b \mid x, y), \tag{5-3}$$

则 $p \in C_{qa}(\mathcal{G})$ 成立。

证明. 由于 τ 在 $\mathcal{U}$ 上是 amenable 的，根据命题2.1.5 (即[46] 定理 6.2.7)，存在态

$$\sigma : \mathcal{U} \otimes_{\min} \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$$

满足

$$\sigma(a \otimes b^{\mathrm{op}}) = \tau(ab).$$

利用 ρ 可定义以下 $*$-同态：

$$\begin{aligned} \rho_1 : \mathbb{C}\langle X, A\rangle &\to \mathcal{U} \\ e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_n}^{x_n} &\mapsto \rho(e_{a_1}^{x_1} \cdots e_{a_n}^{x_n} \otimes 1), \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} \rho_2 : \mathbb{C}\langle Y, B\rangle &\to \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \\ f_{b_1}^{y_1} \cdots f_{b_n}^{y_n} &\mapsto \rho(1 \otimes f_{b_n}^{y_n} \cdots f_{b_1}^{y_1})^{\mathrm{op}}. \end{aligned}$$

通过泛性质将 ρ_1 与 ρ_2 连续延拓至 $\mathcal{A}(X, A)$ 和 $\mathcal{A}(Y, B)$，分别记为 θ_1 与 θ_2。再次应用[46] 推论 3.5.5 可得：

$$\theta : \mathcal{A}(X, A) \otimes_{\min} \mathcal{A}(Y, B) \to \mathcal{U} \otimes_{\min} \mathcal{U}^{\mathrm{op}}, \;\; a \otimes b \mapsto \theta_1(a) \otimes \theta_2(b)$$

为有界 $*$-同态。

定义

$$\varphi : \mathcal{A}(X, A) \otimes_{\min} \mathcal{A}(Y, B) \to \mathbb{C}$$

为 $\varphi = \sigma \circ \theta$。由其构造可知 φ 为态，且满足

$$\varphi(e_a^x \otimes f_b^y) = \sigma(\theta_1(e_a^x) \otimes \theta_2(f_b^y)) = \tau(\rho(e_a^x \otimes 1)\rho(1 \otimes f_b^y)) = \tau \circ \rho(e_a^x \otimes f_b^y) = p(a, b \mid x, y).$$

故 $p \in C_{qa}(\mathcal{G})$ 得证。 $\square$

定理 5.2.2 的形式与文献[30] 定理 3.2 相似，但后者为充要条件。我们证明了当 $|X| = |A| = 2$ 且附加一定的内蕴条件时定理 5.2.2 的逆命题成立，并推测其在一般情况下亦成立。

定理 5.2.3. *设 $\mathcal{G}=(X,Y,A,B,\lambda)$ 为模仿游戏，满足 $|X|=|A|=2$ 且 $p\in C_{qa}(\mathcal{G})$。根据命题 5.1.1，存在 $\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B)$ 上的态 φ 使得*

$$\varphi(e_a^x\otimes f_b^y)=p(a,b\mid x,y).$$

通过 GNS 构造可得 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$、单位向量 $|\psi\rangle\in\mathcal{H}$ 及 $*$-表示

$$\pi:\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B)\to\mathcal{B}(\mathcal{H}) \tag{5-4}$$

满足

$$\varphi(a)=\langle\psi|\pi(a)|\psi\rangle,\quad \forall a\in\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B).$$

令

$$\mathfrak{A}:=\pi(\mathcal{A}(X,A)\otimes\mathbf{1}),\quad \mathfrak{B}:=\pi(\mathbf{1}\otimes\mathcal{A}(Y,B)). \tag{5-5}$$

显然 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 均为 C^*-代数。假设 $\pi\big|_{\mathcal{A}(X,A)\otimes 1}:=\pi_1$ 和 $\pi\big|_{1\otimes\mathcal{A}(Y,B)}:=\pi_2$ 是单射，则存在 von Neumann 代数 $\mathscr{U}$、$*$-同态 $\rho:\mathbb{C}\langle X,A\rangle\otimes_{alg}\mathbb{C}\langle Y,B\rangle\to\mathscr{U}$ 及 $\mathscr{U}$ 上的 amenable 的迹态 τ 使得

$$\tau\circ\rho(e_a^x\otimes f_b^y)=p(a,b\mid x,y). \tag{5-6}$$

证明. 由于 φ 是可分 C^*-代数 $\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B)$ 上的收缩的线性泛函，Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 是可分内积空间

$$\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B)/\{x\in\mathcal{A}(X,A)\otimes_{\min}\mathcal{A}(Y,B):\varphi(x^*x)=0\}$$

的完备化，其内积定义为 $\langle x|y\rangle:=\varphi(y^*x)$。特别地，$C(X,A)\otimes_{alg}C(Y,B)$ 在商空间中的象在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

令

$$\mathscr{U}=\overline{\mathfrak{A}}^{\mathrm{WOT}},\quad \mathscr{V}=\overline{\mathfrak{B}}^{\mathrm{WOT}} \tag{5-7}$$

分别为 $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ 的弱算子拓扑闭包。此时 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 是互为交换的 von Neumann 代数。根据[45] 定理 5.1.2，$\mathfrak{A}$ 的弱算子闭包与强算子闭包一致（均为 $\mathscr{U}$），$\mathscr{V}$ 也如此同理。

由于 $\pi|_{\mathcal{A}(X,A)\otimes 1}:=\pi_1$ 和 $\pi|_{1\otimes\mathcal{A}(Y,B)}:=\pi_2$ 是单射，其逆映射 π_1^{-1} 与 π_2^{-1} 构成等距表示。根据[46] 推论 3.5.5 可得**态**

$$\begin{aligned}\phi:\mathfrak{A}\otimes_{\min}\mathfrak{B}&\to\mathbb{C}\\ a\otimes b&\mapsto\varphi(\pi_1^{-1}(a)\otimes\pi_2^{-1}(b)).\end{aligned}$$

定义态

$$\begin{aligned}\tau:\mathscr{U}&\to\mathbb{C},\\ a&\mapsto\langle\psi|a|\psi\rangle.\end{aligned}$$

下面证明 τ 和 $\mathscr{U}$ 即为定理所需。我们将证明过程拆分成以下的断言：

断言 5.2.1. *τ 是 $\mathfrak{A}$ 上的迹态。*

证明思路类似[41] 定理 5.1。令

$$P_a^x = \pi(e_a^x \otimes 1) \in \mathfrak{A}\ (x \in X, a \in A); \quad Q_b^y = \pi(1 \otimes f_b^y) \in \mathfrak{B}\ (y \in Y, b \in B). \tag{5-8}$$

这些 P_a^x 与 Q_b^y 均为投影算子。对任意 $x \in X, y \in Y, b \in B$，定义投影

$$^x\Pi_b^y = \sum_{\substack{a\in A \\ \lambda(x,y,a,b)=1}} P_a^x \in \mathfrak{A}. \tag{5-9}$$

由 p 的完美性可得：

$$\langle \psi | Q_b^y | \psi \rangle = \sum_{a\in A} \langle \psi | P_a^x Q_b^y | \psi \rangle = \sum_{\substack{a\in A \\ \lambda(x,y,a,b)=1}} \langle \psi | P_a^x Q_b^y | \psi \rangle = \langle \psi | {}^x\Pi_b^y Q_b^y | \psi \rangle,$$

由于 $(I -{}^x \Pi_b^y)Q_b^y$ 是幂等元，可得

$$\| \left(I - {}^x\Pi_b^y\right) Q_b^y|\psi\rangle\|^2 = \langle \psi | \left(I -{}^x \Pi_b^y\right) Q_b^y | \psi \rangle = 0,$$

即

$$^x\Pi_b^y Q_b^y|\psi\rangle = Q_b^y|\psi\rangle, \quad x \in X, y \in Y, b \in B. \tag{5-10}$$

根据模仿游戏的定义，对 $b \neq b' \in B$ 和 $y \in Y$，存在 $x \in X$ 满足

$$\sum_{a\in A} \lambda(x, y, a, b)\lambda(x, y, a, b') = 0,$$

对此特定选取的 x, y, b, b'，有

$$\langle \psi | {}^x\Pi_b^y Q_{b'}^y | \psi \rangle = \sum_{\substack{a\in A \\ \lambda(x,y,a,b)=1}} \langle \psi | P_a^x Q_{b'}^y | \psi \rangle = 0,$$

故得

$$^x\Pi_b^y Q_{b'}^y |\psi\rangle = 0. \tag{5-11}$$

类似于[41] 的处理方式，定义

$$\Pi_b^y = \bigwedge_{x\in X} {}^x\Pi_b^y \in \mathcal{U}. \tag{5-12}$$

由 (5-10), (5-11) 及模仿游戏定义可得

$$\Pi_b^y Q_b^y|\psi\rangle = Q_b^y|\psi\rangle;$$
$$\Pi_b^y Q_{b'}^y|\psi\rangle = 0 \quad (b' \neq b).$$

因此有

$$\Pi_b^y|\psi\rangle = \Pi_b^y \left(\sum_{b'\in B} Q_{b'}^y \right) |\psi\rangle = \Pi_b^y Q_b^y|\psi\rangle = Q_b^y|\psi\rangle, \quad \forall y \in Y, b \in B. \tag{5-13}$$

类似地，定义

$$ {}^y\Xi_a^x = \sum_{\substack{b\in B \\ \lambda(x,y,a,b)=1}} Q_b^y \in \mathfrak{B}, \tag{5-14}$$

以及

$$\Xi_a^x = \bigwedge_{y\in Y} {}^y\Xi_a^x \in \mathscr{V}, \tag{5-15}$$

可得

$$\Xi_a^x|\psi\rangle = P_a^x|\psi\rangle, \quad \forall x \in X, a \in A. \tag{5-16}$$

令 $\mathcal{K}_{\mathscr{U}}$ (对应地 $\mathcal{K}_{\mathscr{V}}$) 表示 $\{A|\psi\rangle : A \in \mathscr{U}\}$ (对应地 $\{B|\psi\rangle : B \in \mathscr{V}\}$) 的闭包。对任意 $x_1, \ldots, x_n \in X$ 和 $a_1, \ldots, a_n \in A$，有

$$P_{a_1}^{x_1} \cdots P_{a_n}^{x_n}|\psi\rangle = \Xi_{a_n}^{x_n} \cdots \Xi_{a_1}^{x_1}|\psi\rangle \in \mathcal{K}_{\mathscr{V}}, \tag{5-17}$$

由此可得 $\mathcal{K}_{\mathscr{U}} \subseteq \mathcal{K}_{\mathscr{V}}$，同理 $\mathcal{K}_{\mathscr{V}} \subseteq \mathcal{K}_{\mathscr{U}}$。令 $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{\mathscr{U}} = \mathcal{K}_{\mathscr{V}}$，显然 $\mathcal{K}$ 在投影算子 P_a^x 和 Q_b^y 作用下不变。因此可将其限制在 $\mathcal{K}$ 上讨论，不妨设 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$。根据[41] 定理 5.1 的证明可知

$$\Pi_b^y \Pi_b^{y'} = 0 \quad 且 \quad \sum_{b\in B} \Pi_b^y = 1. \tag{5-18}$$

基于上述讨论，可得关键等式：

$$\begin{aligned}
\langle\psi|P_{a_1}^{x_1} P_{a_2}^{x_2}|\psi\rangle &= \langle\psi|P_{a_1}^{x_1}\Xi_{a_2}^{x_2}|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|\Xi_{a_2}^{x_2} P_{a_1}^{x_1}|\psi\rangle \\
&= \langle\Xi_{a_2}^{x_1}\psi|\Xi_{a_1}^{x_1}|\psi\rangle \\
&= \langle P_{a_2}^{x_2}\psi|P_{a_1}^{x_1}|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|P_{a_2}^{x_2} P_{a_1}^{x_1}|\psi\rangle,
\end{aligned}$$

即

$$\langle\psi|P_{a_1}^{x_1} P_{a_2}^{x_2}|\psi\rangle = \langle\psi|P_{a_2}^{x_2} P_{a_1}^{x_1}|\psi\rangle.$$

通过归纳法与线性性可证 τ 在 $\mathfrak{A}$ 上构成迹态。

断言 5.2.2. *τ 为 $\mathscr{U}$ 上的迹态。*

设 $a, b \in \mathscr{U}$。由于已证 $\mathcal{H}$ 可分，根据[44] 定理 1.2.2 的推论，存在序列 $\{a_n\} \subset \mathfrak{A}$, $\{b_n\} \subset \mathfrak{A}$ 使得 $a_n \to a$, $b_n \to b$ 在强算子拓扑下收敛。由乘法运算的序列连续性，可得 $a_n b_n \to ab$ 在强算子拓扑下收敛 (参见[60] 问题 113)。

特别地，对任意正实数 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N$ 时，

$$\left|\langle\psi|(ab - a_n b_n)|\psi\rangle\right| \leqslant \||\psi\rangle\| \cdot \|(ab - a_n b_n)|\psi\rangle\| < \varepsilon, \tag{5-19}$$

由于已证 τ 是 $\mathfrak{A}$ 上的迹态，即

$$\langle\psi|(a_n b_n - b_n a_n)|\psi\rangle = 0. \tag{5-20}$$

类似可证

$$\left|\langle\psi|(ba-b_na_n)|\psi\rangle\right| \leqslant \||\psi\rangle\| \cdot \|(ba-b_na_n)|\psi\rangle\| < \varepsilon. \tag{5-21}$$

联立方程 (5-19), (5-20) 与 (5-21) 可知，对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$|\langle\psi|(ab-ba)|\psi\rangle| \leqslant \left|\langle\psi|(ab-a_nb_n)|\psi\rangle\right| + \left|\langle\psi|(a_nb_n-b_na_n)|\psi\rangle\right| + \left|\langle\psi|(ba-b_na_n)|\psi\rangle\right| < 2\varepsilon. \tag{5-22}$$

因 ε 可任意小，故推得对任意 $a, b \in \mathscr{U}$ 有

$$\langle\psi|(ab-ba)|\psi\rangle = 0.$$

这表明 τ 是 $\mathscr{U}$ 上的迹态。

断言 5.2.3. τ 是 *amenable* 的迹态。

根据[46] 定理 6.2.7(即命题2.1.5)，我们需要构造有界线性泛函

$$\sigma : \mathscr{U} \otimes_{\min} \mathscr{U}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$$

满足

$$\sigma(a \otimes b^{\mathrm{op}}) = \tau(ab).$$

现给出 σ 的具体构造：定义

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{U} \otimes_{\min} \mathscr{V} &\to \mathbb{C} \\ a \otimes b &\mapsto \langle\psi|ab|\psi\rangle, \end{aligned}$$

我们需证 Φ 有界 (即连续)。由[47] 定理 4.4.7，Φ 是双正规的。因 $|X| = |A| = 2$，$\mathcal{A}(X, A)$ 等距同构于群 C^*-代数 $\mathbb{C}^*(\mathbb{Z}_2^{*2})$。由于 $\pi|_{\mathcal{A}(X,A)\otimes 1}$ 是等距映射，故 $\mathfrak{A}$ 等距于 $\mathcal{A}(X, A) \simeq \mathbb{C}^*(\mathbb{Z}_2^{*2})$。因群 $\mathbb{Z}_2^{*2}$ 是 amenable 的[24](其上存在一个左平移不变的概率测度)，因此 $\mathfrak{A}$ 是 exact 的，即存在一个忠实表示 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 以及以下交换图逐点地渐近成立：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d, "\phi_n"'] & & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ M_{k_n}(\mathbb{C}) \arrow[urr, "\psi_n"'] & & \end{tikzcd}$$

由[46] 定理 9.3.1，$\mathfrak{A}$ 具有如下的性质 C ([46] 定义 9.2.2): 对任意的 C^*-代数 B，

$$\mathfrak{A}^{**} \otimes_{alg} B^{**} \hookrightarrow (\mathfrak{A} \otimes_{\min})^{**}$$

在最小张量范数下是连续的，其中 $\mathfrak{A}^{**}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的二次对偶，$\hookrightarrow$ 是典则的嵌入映射。

结合 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ 在弱算子拓扑下分别在 $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ 中稠密 (即式 (5-7) 成立)，并且 $\Phi|_{\mathfrak{A}\otimes_{\min}\mathfrak{B}} = \phi$，根据[46] 引理 9.2.9 可知 Φ 连续 (即关于最小张量积范数有界)。为方便引用，我们在这里重新叙述此引理如下：

引理 5.2.1. *([46] 引理 9.2.9)* 设 M, N 为 von Neumann 代数，$B \subset M$ 和 $D \subset N$ 分别为其弱稠密的 C^*-子代数。若 $\Phi : M \otimes_{alg} N \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是双正规的保持单位元的完全正映射，且 B 具有性质 C，Φ 在 $B \otimes_{alg} D$ 上关于最小张量范数连续，则 Φ 在 $M \otimes_{alg} N$ 上亦然。

现定义 $*$-同态 $s : \mathscr{U}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{V}$。首先在 $\mathfrak{A}^{\mathrm{op}}$ 上定义：

$$s((P^{x_n}_{a_n} \cdots P^{x_1}_{a_1})^{\mathrm{op}}) = s\left((P^{x_1}_{a_1})^{\mathrm{op}} \bullet \cdots \bullet (P^{x_n}_{a_n})^{\mathrm{op}}\right) = \Xi^{x_1}_{a_1} \cdots \Xi^{x_n}_{a_n}, \tag{5-23}$$

显然这是 $\mathfrak{A}^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathscr{V}$ 的 $*$-同态。根据 (5-17) 有

$$s(a^{\mathrm{op}})|\psi\rangle = a|\psi\rangle, \forall a \in \mathfrak{A}. \tag{5-24}$$

将 s 延拓至 $\mathscr{U}^{\mathrm{op}}$。设 $a^{\mathrm{op}} \in \mathscr{U}^{\mathrm{op}}$，取强算子拓扑收敛于 a^{op} 的序列 $\{a^{\mathrm{op}}_n\} \subset \mathfrak{A}$。对任意 $|\xi\rangle \in \mathcal{H}$，存在 $\{b_t\} \subset \mathscr{U}$ 使得

$$|\xi\rangle = \lim_{t\to\infty} c_t|\psi\rangle.$$

即对 $\forall\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbb{N}$，当 $t > N_1$ 时

$$\||\xi\rangle - c_t|\psi\rangle\| < \varepsilon. \tag{5-25}$$

下面证明 $\{s(a^{\mathrm{op}}_n)|\xi\rangle\}$ 是 Cauchy 序列。首先有

$$\|s(a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m)|\xi\rangle\| \leqslant \|s(a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m)b_s|\psi\rangle\| + \|s(a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m)(|\xi\rangle - b_s\psi\rangle)\|, \tag{5-26}$$

由于 $\{a^{\mathrm{op}}_n\}$ 是强收敛的，根据一致有界原理，可知 $\{\|a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m\|\}$ 存在一致上界。结合 s 在 $\mathfrak{A}$ 上的有界性 (由于 s 是 $\mathfrak{A}$ 上的同态，从而使谱收缩)，我们可以推出 $s(a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m) \in \mathcal{V}$ 是有界算子，即

$$\|s(a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m)\| \leqslant M_1,$$

进而可取 $t > N_1$ 使得

$$\|s(a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m)(|\xi\rangle - b_s\psi\rangle)\| < M_1\varepsilon. \tag{5-27}$$

对于 $\|s(a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m)b_s|\psi\rangle\|$，有

$$\begin{aligned}
&\|s(a^{\mathrm{op}}_n - a^{\mathrm{op}}_m)b_s|\psi\rangle\|^2 \\
&= \|b_s(a_n - a_m)|\psi\rangle\|^2 \\
&= \langle\psi|(a_n - a_m)^* b^*_s b_s(a_n - a_m)|\psi\rangle \\
&= \langle\psi|b^*_s b_s(a_n - a_m)(a_n - a_m)^*|\psi\rangle && \text{(5-28)} \\
&\leqslant \langle\psi|b^*_s b_s|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\psi|(a_n - a_m)(a_n - a_m)^*|\psi\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \langle\psi|b^*_s b_s|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\psi|(a_n - a_m)^*(a_n - a_m)|\psi\rangle^{\frac{1}{2}}, && \text{(5-29)}
\end{aligned}$$

其中 (5-28) 与 (5-29) 利用了 $\tau(\cdot) = \langle\psi|\cdot|\psi\rangle$ 的迹性。

当 $s \to \infty$ 时，

$$\langle\psi|b_s^* b_s|\psi\rangle^{\frac{1}{2}} = \|b_s|\psi\rangle\| \to \||\xi\rangle\|.$$

取充分大 s 使

$$\langle\psi|b_s^* b_s|\psi\rangle^{\frac{1}{2}} < 2\||\xi\rangle\|.$$

由于

$$\langle\psi|(a_n - a_m)^*(a_n - a_m)|\psi\rangle^{\frac{1}{2}} = \|(a_n - a_m)|\psi\rangle\|,$$

且 $\{a_n^{\mathrm{op}}\}$ 在强算子拓扑下收敛于 a^{op}，同时 $\mathcal{U}^{\mathrm{op}}$ 与 $\mathcal{U}$ 的元素及拓扑结构一致，可知 $\{a_n|\psi\rangle\}$ 是 Cauchy 序列。即对 $\forall\varepsilon > 0$，存在 $N_2 \in \mathbb{N}$ 使得当 $\forall n, m > N_2$ 时，

$$\langle\psi|(a_n - a_m)^*(a_n - a_m)|\psi\rangle^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

不失一般性，可设 $\varepsilon < 1$。于是存在 $M_2 = \sqrt{2\||\xi\rangle\|} > 0$ 使得

$$\|s(a_n^{\mathrm{op}} - a_m^{\mathrm{op}})b_s|\psi\rangle\| < M_2\varepsilon, \tag{5-30}$$

结合 (5-26), (5-27) 与 (5-30)，$\{s(a_n^{op})|\xi\rangle\}$ 确为 Cauchy 序列。记 $s(a^{op})|\xi\rangle$ 为其极限。不难验证此延拓是良定义的。

下面证明 s 是 $*$-同态。设 $a^{\mathrm{op}}, b^{\mathrm{op}} \in \mathcal{U}^{\mathrm{op}}$，对应序列 $\{a_n^{op}\}, \{b_n^{op}\} \subset \mathfrak{A}^{op}$ 分别强收敛于它们。由乘法运算的序列连续性，$a_n^{op} \bullet b_n^{op} = (b_n a_n)^{op}$ 强收敛于 $a^{op} \bullet b^{op} = (ba)^{op}$。对任意 $|\xi\rangle \in \mathcal{H}$，有

$$\begin{aligned} s(a^{op} \bullet b^{op})|\xi\rangle &= \lim_{n\to\infty} s(a_n^{op} \bullet b_n^{op})|\xi\rangle & (5\text{-}31)\\ &= \lim_{n\to\infty} s(a_n^{op})s(b_n^{op})|\xi\rangle & (5\text{-}32)\\ &= \lim_{n\to\infty} s(a_n^{op})s(b^{op})|\xi\rangle \\ &= s(a^{op})s(b^{op})|\xi\rangle, \end{aligned}$$

其中式 (5-31) 根据 s 的定义获得，式 (5-32) 成立是因为 s 是 $\mathfrak{A}$ 上的 $*$-同态。因此 s 是从 $\mathcal{U}^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathcal{V}$ 的 $*$-同态，其有界性由[44] 定理 1.3.2 保证。此外，根据 s 的连续性 (即有界性)，可知式 (5-24) 对所有 $a^{\mathrm{op}} \in \mathcal{U}^{\mathrm{op}}$ 成立。

定义 $\sigma : \mathcal{U} \otimes_{\min} \mathcal{U}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$ 为

$$\sigma = \Phi \circ (\mathrm{id} \otimes s), \tag{5-33}$$

其有界性已证。对任意 $a \in \mathcal{U}$ 和 $b \in \mathcal{U}^{\mathrm{op}}$，有

$$\sigma(a \otimes b^{\mathrm{op}}) = \Phi(a \otimes s(b^{\mathrm{op}})) = \langle\psi|a \cdot s(b^{\mathrm{op}})|\psi\rangle = \langle\psi|a \cdot b|\psi\rangle = \tau(ab). \tag{5-34}$$

故 τ 是 amenable 的迹态。

最后，令

$$\rho : \mathbb{C}\langle X, A\rangle \otimes_{alg} \mathbb{C}\langle Y, B\rangle \to \mathscr{U}$$
$$e_a^x \otimes f_b^y \mapsto P_a^x \cdot \Pi_b^y.$$

由 (5-18) 知 ρ 良定义。直接计算得

$$\begin{aligned} \tau \circ \rho(e_a^x \otimes f_b^y) &= \langle \psi | P_a^x \Pi_b^y | \psi \rangle = \langle \psi | P_a^x Q_b^y | \psi \rangle \\ =&\langle \psi | \pi(e_a^x \otimes f_b^y) | \psi \rangle = \varphi(e_a^x \otimes f_b^y) = p(a, b \mid x, y). \end{aligned} \tag{5-35}$$

定理得证。 □

注 5.2.1. *定理 5.2.3 中使用的 von Neumann 代数* $\mathscr{U} = \overline{\pi(\mathcal{A}(X, A) \otimes \mathbf{1})}^{\mathrm{WOT}}$ *(其中 $*$-同态 π 如 (5-4) 所定义) 与命题 5.1.3 中的小代数 $\mathcal{A}(X, A)$ 起着相同作用。此处选择 von Neumann 代数而非 C^*-代数，是因为 (5-12) 中定义的 Π_b^y 是 C^*-代数 $\mathfrak{A} = \pi(\mathcal{A}(X, A) \otimes \mathbf{1})$ 中投影元的交，此类投影元未必属于 $\mathfrak{A}$ 本身。*

5.3　开放问题与讨论

在定理 5.2.2 与 5.2.3 中，我们尝试推广[41] 的结果，利用 amenable 的迹态刻画模仿游戏的完美量子逼近策略。我们推测定理 5.2.2 的逆命题在一般情况下亦成立。

猜想 5.3.1. *设 $\mathcal{G} = (X, Y, A, B, \lambda)$ 为模仿游戏，$p \in C_{ns}(\mathcal{G})$ 为完美的无通讯关联矩阵。下列陈述等价：*

(i) $p \in C_{qa}(\mathcal{G})$；

(ii) 存在 von Neumann 代数 $\mathscr{U}$ 及其上 amenable 的迹态 τ，以及从泛游戏代数 $\mathbb{C}\langle X, A\rangle \otimes_{alg} \mathbb{C}\langle Y, B\rangle$ 到 $\mathscr{U}$ 的 $*$-同态 ρ，满足

$$\tau \circ \rho(e_a^x \otimes f_b^y) = p(a, b \mid x, y).$$

定理 5.2.2 已证 (ii)⇒(i) 方向。对于 (i)⇒(ii)，我们认为 von Neumann 代数 $\mathscr{U}$ 应构造为 $\pi(\mathcal{A}(X, A) \otimes 1)$ 在弱算子拓扑下的闭包。为证明 τ 的 amenable 性质，需验证映射 $\mathscr{U} \otimes_{\min} \mathscr{U}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{C}$, $a \otimes b \mapsto \tau(ab)$ 关于最小张量范数连续。为此，我们尝试通过如下路径证明以上映射的连续性：

$$\mathscr{U} \otimes_{\min} \mathscr{U}^{op} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes s} \mathscr{U} \otimes_{\min} \mathscr{V} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xrightarrow{a \otimes b \mapsto \langle \psi | a \cdot b | \psi \rangle} \mathbb{C},$$

其中 $\mathcal{H}$ 来自 φ 的 GNS 构造。

在定理 5.2.3 的证明中，我们已获得 s 的连续性。但映射

$$\alpha : \mathscr{U} \otimes_{\min} \mathscr{V} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ a \otimes b \mapsto a \cdot b$$

可能不满足关于最小张量范数的连续性。我们注意到如下反例存在：

例 5.3.1. *([46] 练习 3.6.3)* 设 Γ 为离散群，$\lambda\times\rho : C^*_\lambda(\Gamma)\odot C^*_\rho(\Gamma)\to\mathbb{B}\left(\ell^2(\Gamma)\right)$ 为左、右正则表示的乘积映射。则 Γ 是 *amenable* 的当且仅当 $\lambda\times\rho$ 关于最小张量范数连续。

若取 $\Gamma = F_2$ 为二个元素生成的自由群，因 F_2 不是 amenable 的群，故 $\lambda\times\rho$ 关于最小张量范数不连续。然而，此反例并不直接否定猜想 5.3.1，因 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{V}$ 具有更丰富的结构。引理5.2.1 是保证最小范数下的连续性的充分条件，但一般情形下 α 的连续性未知。因此，我们无法判定猜想 5.3.1 对一般模仿游戏是否成立，或是否需要附加其他条件。此外，定理 5.2.1 独立于命题 5.3.1，其虽较命题 5.1.1 更精细，但对猜想 5.3.1 的证明作用尚不明确。

第 6 章　总结与展望

本文系统研究了几类量子非局域游戏的完美策略的刻画，取得了以下成果：

对于两回答游戏，我们通过分析可分 Hilbert 空间上交换算子策略的表示结构，证明了无限维情形下两回答游戏有完美交换算子策略当且仅当其有完美经典策略。这一结果将有限维的结论拓展至无穷维情形，并以此给出了一个特殊形式的非交换代数上的零点定理。

针对正则镜像游戏，我们提出基于泛游戏代数的约简方法，将完美交换算子策略的存在性问题转化为非交换代数上的理想成员判定问题。利用非交换 Gröbner 基与半正定规划的工具给出了判定算法，实现了对该类游戏无完美策略的判定。

在模仿游戏的研究中，我们首先证明了其存在完美量子逼近策略等价于最小张量积上存在一个对应的双迹态。特别地，在附加一定条件的二元问题集情形下，我们证明了完美量子逼近策略与 amenable 迹态存在的等价性，为一些特殊的模仿游戏的完美量子逼近策略提供了刻画条件。

我们未来研究的方向包括：

(1) 按照是否有不同形式的完美策略，对量子非局域游戏进行分类或给出更简单易行的刻画条件；

(2) 探讨游戏的“同步性质”对泛游戏代数的简化作用，给出更一般的框架；

(3) 利用自检测的相关结果研究非局域游戏的最优策略的唯一性；

(4) 利用非局域游戏的工具构造 Connes 嵌入猜想的显式反例。

量子非局域游戏的策略分类问题始终与算子代数、非交换代数几何等前沿理论深度交织。随着 MIP*=RE[21] 等突破性成果的出现，这一领域正展现出连接基础数学与量子理论的独特潜力。本文工作为相关交叉研究提供了新的理论工具，也为未来探索量子优越性的代数本质奠定了基础。

参考文献

[1] Šupić I, Bowles J. Self-testing of quantum systems: a review [J]. Quantum, 2020, 4: 337.

[2] Paddock C, Slofstra W, Zhao Y, et al. An operator-algebraic formulation of self-testing [C]. Annales Henri Poincaré: volume 25. Springer, 2024: 4283-4319.

[3] Broadbent A, Ji Z, Song F, et al. Zero-knowledge proof systems for QMA [C].2016 IEEE 57th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2016: 31-40.

[4] Escolà-Farràs L, Speelman F. Lossy-and-Constrained Extended Non-Local Games with Applications to Cryptography: BC, QKD and QPV [J]. arXiv preprint arXiv:2405.13717, 2024.

[5] Bell J S. On the einstein podolsky rosen paradox [J]. Physics Physique Fizika, 1964, 1(3): 195.

[6] Cleve R, Hoyer P, Toner B, et al. Consequences and limits of nonlocal strategies [C]. Proceedings. 19th IEEE Annual Conference on Computational Complexity, 2004. IEEE, 2004: 236-249.

[7] Palazuelos C, Vidick T. Survey on nonlocal games and operator space theory [J]. Journal of Mathematical Physics, 2016, 57(1): 015220.

[8] Tsirelson B. Bell inequalities and operator algebras, problem statement for website of open problems at TU Braunschweig [Z]. 2006.

[9] Clauser J F, Horne M A, Shimony A, et al. Proposed experiment to test local hidden-variable theories [J]. Physical review letters, 1969, 23(15): 880.

[10] Scholz V B, Werner R F. Tsirelson's problem [J]. arXiv preprint arXiv:0812.4305, 2008.

[11] Ji Z. Binary constraint system games and locally commutative reductions [J]. arXiv preprint arXiv:1310.3794, 2013.

[12] Cleve R, Liu L, Slofstra W. Perfect commuting-operator strategies for linear system games [J]. Journal of Mathematical Physics, 2017, 58(1): 012202.

[13] Slofstra W. The set of quantum correlations is not closed [C].Forum of Mathematics, Pi: volume 7. Cambridge University Press, 2019: e1.

[14] Slofstra W. Tsirelson’ s problem and an embedding theorem for groups arising from non-local games [J]. Journal of the American Mathematical Society, 2020, 33(1): 1-56.

[15] Fritz T. Tsirelson's problem and Kirchberg's conjecture [J]. Reviews in Mathematical Physics, 2012, 24(05): 1250012.

[16] Navascués M, Pironio S, Acín A. A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations [J]. New Journal of Physics, 2008, 10(7): 073013.

[17] Fritz T. Operator system structures on the unital direct sum of C^*-algebras [J/OL]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2014, 44(3): 913 - 936. https://doi.org/10.1216/RMJ-2014-44-3-913.

[18] Paulsen V I, Todorov I G. Quantum chromatic numbers via operator systems [J]. The Quarterly Journal of Mathematics, 2015, 66(2): 677-692.

[19] Dykema K, Paulsen V I, Prakash J. Non-closure of the set of quantum correlations via graphs [J]. Communications in Mathematical Physics, 2019, 365: 1125-1142.

[20] Coladangelo A, Stark J. An inherently infinite-dimensional quantum correlation [J]. Nature communications, 2020, 11(1): 1-6.

[21] Ji Z, Natarajan A, Vidick T, et al. MIP= RE [J]. arXiv preprint arXiv:2001.04383, 2020.

[22] Connes A. Classification of injective factors Cases II_1, II_∞, III_λ, $\lambda \neq 1$ [J]. Annals of Mathematics, 1976: 73-115.

[23] Kirchberg E. On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group C^*-algebras [J]. Inventiones mathematicae, 1993, 112(1): 449-489.
[24] Ozawa N. About the Connes embedding conjecture [J]. Japanese Journal of Mathematics, 2013, 8(1): 147-183.
[25] Helton J W. "Positive" Noncommutative Polynomials Are Sums of Squares [J]. Annals of Mathematics, 2002, 156(2): 675-694.
[26] Helton J W, Mccullough S. A Positivstellensatz for Non-commutative Polynomials [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2004, 356(9): 3721-3737.
[27] Klep I, Schweighofer M. Connes' embedding conjecture and sums of hermitian squares [J]. Advances in Mathematics, 2008, 217(4): 1816-1837.
[28] Goldbring I. The Connes embedding problem: A guided tour [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 2022, 59(4): 503-560.
[29] Bene Watts A, Helton J W, Klep I. Noncommutative Nullstellensätze and Perfect Games [C]. Annales Henri Poincaré: volume 24. Springer, 2023: 2183-2239.
[30] Helton J W, Meyer K P, Paulsen V I, et al. Algebras, synchronous games, and chromatic numbers of graphs [J]. New York J. Math, 2019, 25: 328-361.
[31] Watts A B, Helton J W. 3XOR Games with Perfect Commuting Operator Strategies Have Perfect Tensor Product Strategies and are Decidable in Polynomial Time [J]. arXiv preprint arXiv:2010.16290, 2020.
[32] Cimprič J, Helton J, McCullough S, et al. Real nullstellensatz and $*$-ideals in $*$-algebras [J]. The Electronic Journal of Linear Algebra, 2015, 30: 19-50.
[33] Cimprič J, Helton J W, McCullough S, et al. A noncommutative real nullstellensatz corresponds to a noncommutative real ideal: Algorithms [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 2013, 106(5): 1060-1086.
[34] Cimprič J, Helton J W, Klep I, et al. On real one-sided ideals in a free algebra [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2014, 218(2): 269-284.
[35] McCullough S. Factorization of operator-valued polynomials in several non-commuting variables [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2001, 326: 193-203.
[36] Burgdorf S, Klep I, Povh J. Springerbriefs in mathematics: Optimization of polynomials in non-commuting variables [M]. Springer Cham, 2016.
[37] Paulsen V I, Severini S, Stahlke D, et al. Estimating quantum chromatic numbers [J]. Journal of Functional Analysis, 2016, 270(6): 2188-2222.
[38] Kim S J, Paulsen V, Schafhauser C. A synchronous game for binary constraint systems [J]. Journal of Mathematical Physics, 2018, 59(3).
[39] Musat M, Rørdam M. Non-closure of quantum correlation matrices and factorizable channels that require infinite dimensional ancilla (with an appendix by Narutaka Ozawa) [J]. Communications in Mathematical Physics, 2020, 375(3): 1761-1776.
[40] Goldberg A. Synchronous linear constraint system games [J]. Journal of Mathematical Physics, 2021, 62(3).
[41] Lupini M, Mančinska L, Paulsen V I, et al. Perfect strategies for non-local games [J]. Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2020, 23(1): 7.
[42] Rao A. Parallel Repetition in Projection Games and a Concentration Bound [J]. SIAM Journal on Computing, 2011, 40(6): 1871.
[43] Conway J B. A course in functional analysis: volume 96 [M]. Springer, 2019.
[44] Arveson W. Graduate texts in mathematics: An Invitation to C^*-Algebras [M/OL]. Springer New York, 2012. https://books.google.com/books?id=d5TqBwAAQBAJ.

[45] Kadison R, Ringrose J. Graduate studies in mathematics: Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Volume I [M/OL]. American Mathematical Society, 1997. https://books.google.com/books?id=Q3J6TV6euVYC.

[46] Brown N, Ozawa N. Graduate studies in mathematics: C^*-algebras and finite-dimensional approximations [M/OL]. American Mathematical Society, 2008. https://books.google.com/books?id=kQMPCgAAQBAJ.

[47] Nelson B. Math 209: von Neumann Algebras [M/OL]. 2017. https://users.math.msu.edu/users/banelson/teaching/209/209_notes.pdf.

[48] 支丽红, 禹天石. 线性代数讲义 [M]. preprint, 2025.

[49] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum computation and quantum information [M]. Cambridge university press, 2010.

[50] Netzer T, Thom A. Real closed separation theorems and applications to group algebras [J]. Pacific Journal of Mathematics, 2013, 263(2): 435-452.

[51] Barvinok A. A course in convexity: volume 54 [M]. American Mathematical Soc., 2002.

[52] Klep I, Povh J. Constrained trace-optimization of polynomials in freely noncommuting variables [J]. Journal of Global Optimization, 2016, 64: 325-348.

[53] Klep I, Magron V, Volčič J. Optimization over trace polynomials [C].Annales Henri Poincaré: volume 23. Springer, 2022: 67-100.

[54] Mora F. Gröbner bases for non-commutative polynomial rings [C].Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes: 3rd International Conference, AAECC-3 Grenoble, France, July 15–19, 1985 Proceedings 3. Springer, 1986: 353-362.

[55] Madlener K, Reinert B. String rewriting and Gröbner bases—a general approach to monoid and group rings [M]. Springer, 1998.

[56] Levandovskyy V. Non-commutative Computer Algebra for polynomial algebras: Gröbner bases, applications and implementation [D]. Technische Universität Kaiserslautern, 2005.

[57] Xiu X. Non-commutative Gröbner bases and applications [D]. Universität Passau, 2012.

[58] Mora T. An introduction to commutative and noncommutative Gröbner bases [J]. Theoretical Computer Science, 1994, 134(1): 131-173.

[59] Fritz T. Curious properties of free hypergraph C^*-algebras [J]. Journal of Operator Theory, 2018.

[60] Halmos P R. A Hilbert space problem book: volume 19 [M]. Springer Science & Business Media, 2012.

致 谢

五年的时光转瞬即逝，回首我在数学院求学的经历，我有太多的人需要感谢，是大家的帮助使我走到现在。

首先，我要十分郑重地向我的导师支丽红老师道一声谢谢。您在我的学习和生活上给予了我极大的帮助。在学术研究中，您将我带入到了非交换代数与量子信息这一前沿领域中，从论文的选题、理论研究到文章的写作、修改，您都付出了很多心血，在我的研究遇到瓶颈时，您给予了我极大的鼓励并提供了尽可能的便利条件，这才有了如今的研究。您开阔的视野与严谨的治学态度令我受益良多。在生活上，您更是给予了我许许多多额外的帮助，从津贴的照顾，到助教的机会，乃至于每一次的聚餐都是您买单，这些点点滴滴，作为学生，我都铭记于心。在我最艰难的时候，您的鼓励和帮助是我前行的最大的动力。在此我也衷心的祝愿您身体健康，万事顺遂。谢谢老师！

同样我也要感谢课题组及数学院的老师和同学们，大家在学习和生活中也给了我许多帮助。特别感谢李子佳老师，叶科老师，陈绍示老师，李子明老师，冯如勇老师，陈玉福老师，王定康老师，邓映蒲老师，张志芳老师，袁巍老师，李伟老师，尚云老师，张世华老师以及杨志红师姐，闫斯卓师姐，郑涛师兄，杨剑霆师兄，梁昊同学，代梓灏师弟，陆镜宇师弟，刘俊杞师弟，沈皓师妹与王家琪师弟，很高兴能与大家共度这五年的学习时光，也十分感谢大家的帮助。还要感谢我的几任室友张恒嘉同学、马文杰同学、陈攀同学、战勇同学，以及好友王愚同学、吴诗童同学，与我多次交流学术问题的赵雨鸣博士，同工位的高子文师兄、李慧慧师姐、答辩秘书焦帅杰同学，感谢大家在日常生活中的帮助与鼓励。

此外，借此机会我也要向国科大 2020 级、2021 级及 2024 级支丽红老师班的线性代数课程的全体同学致谢，感谢大家对课程及讲义的建议和意见。这里尤其要向 2021 级的同学们致歉，因为我的个人原因耽误了大家的课程安排，我给大家承诺的讲义和习题课讲义也即将完成，敬请期待。

最后，我要感谢我的母亲，感谢她这些年的辛苦付出。感谢我的外公辛凤江与外婆孙秀勇，愿你们在另一个世界安好，我也希望用这篇毕业论文永远定格你们的名字。再次向所有帮助过我的人致谢！

2025 年 6 月

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果

作者简历:

2016 年 9 月——2020 年 6 月，在南开大学数学科学学院获得学士学位。

2020 年 9 月——2025 年 6 月，在中国科学院数学与系统科学研究院攻读博士学位。

已发表（或正式接受）的学术论文:

(1) A Characterization of Perfect Strategies for Mirror Games
(Sizhuo Yan, Jianting Yang, **Tianshi Yu*** and Lihong Zhi)
publish in ISSAC'2023 Proceeding. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2023 https://dl.acm.org/doi/10.1145/3597066.3597067

已完成的学术论文和出版物:

(1) Perfect Quantum Approximate Strategies for Imitation Games
(Hao Liang, **Tianshi Yu***, Lihong Zhi)
preprint on arXiv: https://arxiv.org/abs/2410.09525.

(2) A Noncommutative Nullstellensatz for Perfect Two-Answer Quantum Nonlocal Games
(**Tianshi Yu***, Lihong Zhi)
preprint on arXiv: https://arxiv.org/abs/2501.11826.

(3) 线性代数讲义 I, II
(支丽红, 禹天石) 完稿修改中, 尚未出版