

密级: \_\_\_\_\_



**中国科学院大学**  
University of Chinese Academy of Sciences

## 博士学位论文

数值稀疏插值与多项式系统简单重根求解

作者姓名: \_\_\_\_\_ 郝志伟

指导教师: \_\_\_\_\_ 支丽红 研究员

\_\_\_\_\_  
中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别: \_\_\_\_\_ 理学博士

学科专业: \_\_\_\_\_ 应用数学

培养单位: \_\_\_\_\_ 中国科学院数学与系统科学研究院

2017 年 06 月



Numerical Sparse Interpolation and  
Computing Simple Multiple Zeros of Polynomial Systems

By  
Zhiwei Hao

Supervisor:  
Professor Lihong Zhi

A Dissertation Submitted to  
The University of Chinese Academy of Sciences  
In partial fulfillment of the requirements  
For the degree of  
Doctor of Science

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese  
Academy of Sciences

June, 2017



## 摘要

本文主要包含两方面的工作: 稀疏多项式插值和多项式系统重根求解. 对于一般的单变元多项式, 传统的 Lagrange 插值以及 Newton 插值一般需要等同于多项式次数的样本点. 在 Prony 1795 年的工作之后, 稀疏多项式的插值问题开始被广泛研究. 如果已知多项式的稀疏度, Prony 方法所需样本点个数只与其稀疏度有关, 因此大大减少了计算量. 在实际计算中, Prony 方法存在两个主要的难点: 计算的数值稳定性和稀疏度的确定.

Prony 方法通过求解 Hankel 系统确定多项式的项, 再通过求解 Vandermonde 系统计算多项式的系数. 但是 Hankel 矩阵和 Vandermonde 矩阵的条件数往往很大, 这带来了数值上的不稳定性. 过采样, 即增加样本点个数可以改进插值系统的数值稳定性. Ankur Moitra 在 STOC 2015 中指出过采样可使 Vandermonde 的奇异值产生相位突变并首次给出了定量描述. 但是事实上, 在实际计算中我们已知的只有 Hankel 矩阵的信息.

本文在 Moitra 结果的基础上证明了过采样同样可以使 Hankel 矩阵的奇异值产生相位突变, 并给出了定量描述. 我们同时证明, 当过采样至 Hankel 矩阵的奇异值出现相位突变之后, Vandermonde 系统的条件数同样可以被控制, 并且通过一些随机方法可以高概率降低所需过采样的个数. 因此, 我们通过检测 Hankel 矩阵的奇异值便可确保插值问题的求解达到数值稳定.

Kaltofen 和 Lee 于 2003 年提出判断多项式稀疏度的理论: 提前终止定理. 他们证明了, 在达到稀疏度之前, 移位的 Hankel 矩阵的行列式只会在某些非零多项式的零点处为零. 而在达到稀疏度之后, Hankel 矩阵为奇异矩阵. 因此可以通过判断 Hankel 矩阵的奇异性来确定稀疏度. 该定理只对移位的 Hankel 矩阵成立, 而对于标准的 Hankel 矩阵, 提前终止定理是否成立是未解决的公开问题. 这个问题的难点在于, 表示标准 Hankel 矩阵行列式的多项式首项系数不一定非零. 此外, 在数值计算中, 由于 Hankel 矩阵的数值不稳定性, 很难精确地判断其奇异性, 这使得提前终止定理同样具有数值不稳定性.

本文首先定义了单项式上的一个偏序关系, 证明了表示标准 Hankel 矩阵行列式的多项式在此偏序下的最高项及“次高项”的系数不可能同时为零, 因此证明了标准的 Hankel 矩阵同样满足提前终止定理. 并且, 我们利用 Hankel 矩阵奇异值的相位突变性质, 结合过采样方法和提前终止定理, 给出了准确判断多项式稀疏度的算法, 数值实验结果表现稳定.

多项式系统求解问题同样是数学中一个既古老又经典的问题, 并且在科学与工程计算中有着广泛的应用. 许多实际问题要求我们精化多项式系统的近似根. 对于孤立简单根, Shub 和 Smale 于 1996 年提出  $\alpha$  理论: 当近似根足够接近准确孤立单根时, Newton 法具有二次收敛性, 并给出收敛半径. 但对于孤立重根, 数值方法例如 Newton 法, 在重根附近收敛很慢甚至不收敛. 而验证多项式系统是否有孤立重根是一个病态问题, 因为多项式系数的一个微小扰动可能导致一个孤立重根变成一族简单根. 因此, 研究多项式系统孤立重根的数值精化和可信验证问题, 具有重要的理论意义和应用价值.

对于简单重根 (Jacobian 矩阵亏秩为 1) 的情形, 李楠和支丽红通过计算近似局部对偶空间的一组既约基, 提出改进的 Newton 迭代算法, 并定性证明了其二次收敛性. 该算法的证明较为复杂, 很难进行定量的分析及收敛半径的求解.

本文首先针对在简单二重根和简单三重根处的 Jacobian 矩阵具有标准型的多项式系统, 定义了改进的 Newton 迭代, 定量证明了其二次收敛性并且给出了收敛半径. 对 Jacobian 矩阵不具有标准型的多项式简单重根系统, 本文提出先通过近似点处的正交变换得到 Jacobian 矩阵在近似根处具有标准型的多项式系统, 并定义改进的 Newton 迭代, 给出了定性的二次收敛性证明, 并在简单三重根情形给出了定量的收敛半径. 本文在 Maple 中实现了改进的 Newton 迭代算法, 新算法在数值试验中的表现基本与李楠和支丽红的算法相同.

进一步, 结合我们另一项关于多项式系统根的隔离界的结果, 我们同样可以给出多项式系统简单重根的可信验证, 即使用 Newton 迭代至一定精度, 如果可信条件满足, 则说明多项式系统在该近似根附近存在重根, 并且以该近似根为初始点的改进 Newton 迭代算法可以二次收敛到指定精确根.

**关键词:** Hankel 矩阵, 提前终止定理, 简单重根

## Abstract

This thesis includes two parts of work: numerical sparse interpolation and computing simple multiple zeros of polynomial systems. For a univariate polynomial, both Lagrange interpolation and Newton interpolation need as many samples as the degree of the polynomial. Since Prony's work in 1795, sparse interpolation has been widely studied. If the sparsity is known, Prony's method needs as many samples as the sparsity, therefore it simplifies the computation. However, Prony's method has its own difficulties on deciding the sparsity and handling the bad conditioning of the Hankel system.

Generally speaking, Prony's method solves the Hankel system to determine the terms, then solves the Vandermonde system to compute the coefficients. However, both Hankel matrix and Vandermonde matrix could have exponentially large condition numbers. At STOC 2015, Ankur Moitra gave an in-depth analysis of how oversampling improves the conditioning of the Vandermonde systems arising from sparse interpolation and signal recovery from numeric data.

Based on Moitra's results, we prove that oversampling can also cause the phase transition for the singular values of Hankel matrices. Moreover, we show that the singular values of the Vandermonde matrix can be bounded from those of the Hankel matrix. Therefore by testing the phase transition of the singular values of the Hankel matrix, we can get well-conditioned Hankel and Vandermonde systems.

The early termination strategy has been used to determine the sparsity since Kaltofen and Lee's work in 2003. They proved that the determinant of the shifted Hankel matrix is a non-zero polynomial, whose leading coefficient won't be zero until the sparsity is reached. It has been kept open that whether the unshifted Hankel matrix has such early termination theorem, as the leading coefficient of the unshifted Hankel matrix could be zero. Moreover, it is difficult to decide the singularity of the Hankel matrix due to its large condition number.

We define a partial order on monomials, under which we prove the leading coefficient and 'sub-leading' coefficient won't be zero simultaneously, therefore prove the early termination theorem for un-shifted Hankel matrix. Additionally, combining with the phase transition of the singular values of Hankel matrices, we provide an

algorithm to decide the sparsity more accurately.

For an isolated simple root of a polynomial, Smale's  $\alpha$ -theory ensures that when an approximate root is close enough to the accurate root, the Newton iteration has quadratic convergence.

For simple multiple roots, Li and Zhi gave a modified Newton iteration by computing a basis for the local dual space of the approximate root. They gave a non-quantified proof for the quadratic convergence of the algorithm. However, it's difficult to give the convergence radius.

For simple double zero and simple triple zero whose Jacobian matrix is of normalized form, we define modified Newton iteration and prove its quantified quadratic convergence when the starting point is close to the exact simple multiple zero. For a simple multiple zero of an arbitrary multiplicity whose Jacobian matrix may not have a normalized form, we perform unitary transformations and modified Newton iterations, and prove its non-quantified quadratic convergence. If the multiplicity is three, we prove its quantified quadratic convergence.

Combining with our theorem on computing the separation bound for roots of polynomial systems, we can also certify the existence of a simple multiple zero of a polynomial system.

**Keywords:** Hankel matrix, early termination, simple multiple zeros



# 目 录

摘 要	v
Abstract	vii
目 录	ix
第一章 引言	1
1.1 问题描述和研究动机	1
1.2 论文结构和主要结果	4
第二章 数值稀疏插值	7
2.1 多项式稀疏插值	7
2.2 多项式的稀疏度	8
第三章 提前终止定理	17
3.1 移位的提前终止定理	17
3.2 一个特殊的偏序及非移位的提前终止定理	18
3.3 算例	23
第四章 孤立重根的代数结构	25
4.1 局部对偶空间	25
4.2 简单重根	26
4.3 标准型	27
第五章 改进的牛顿迭代	31
5.1 简单二重根的 $\gamma$ -理论	31
5.2 简单三重根的 $\gamma$ -理论	38
5.3 简单多重根	46
5.4 数值实验	64
第六章 结论与展望	67
参考文献	69

---

发表文章目录 .....	75
简 历 .....	77
致 谢 .....	79

# 第一章 引言

## 1.1 问题描述和研究动机

### 1.1.1 多项式稀疏插值的数值稳定性和提前终止定理

在 Prony 1795 年的工作之后, 稀疏插值问题开始被广泛研究并在科学研究及工程领域得到广泛应用. 单变元多项式插值旨在解决如下函数插值问题: 设  $K$  为任意域,  $f \in K[x]$ , 其中:

$$f(x) = \sum_{i=1}^t c_i x^{e_i}, \quad c_i \neq 0.$$

$t$  称为多项式  $f$  的稀疏度. 通过若干组  $(x, f(x))$  值来确定  $t, c_i, e_i$ .

假设稀疏度  $t$  已知,  $\omega$  为随机选定的  $p$  阶单位根, Prony 方法首先通过函数值  $f(\omega^0), \dots, f(\omega^{2t-1})$  构造如下 Hankel 系统:

$$\begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{t-1} \\ a_1 & \cdots & a_t \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{t-1} & \cdots & a_{2t-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{t-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_t \\ a_{t+1} \\ \vdots \\ a_{2t-1} \end{bmatrix},$$

其中  $a(i) = f(\omega^i)$ , 系数矩阵记为  $H_t$ . 解出  $\lambda_i$  后代入以下等式可求得  $e_i$ :

$$z^t - \lambda_{t-1} z^{t-1} - \cdots - \lambda_0 = (z - \omega^{e_1})(z - \omega^{e_2}) \cdots (z - \omega^{e_t}).$$

再通过求解以下 Vandermode 系统可求得  $c_i$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \omega^{e_1} & \cdots & \omega^{e_t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega^{e_1(t-1)} & \cdots & \omega^{e_t(t-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_0 \\ a_{0+1} \\ \vdots \\ a_{t-1} \end{bmatrix},$$

其中系数矩阵记为  $V_t$ .

当插值系统有扰动或者计值有误差的时候, Prony 方法中出现的 Hankel 矩阵和 Vandermonde 矩阵的条件数可能会成指数型增长 [1, 2]. 因此在实际计算中,

Prony 方法有极大的数值不稳定性. 而过采样, 即增加样本点个数可以改进插值系统的数值稳定性. Moitra 在 [3, 定理 2.3, 3.1] 中首次指出当样本点的个数增加的时候 Vandermonde 矩阵的奇异值及条件数会出现突变, 并且发生突变的位置依赖于原系统稀疏项之间的最小分离距离  $\Delta$ , 即当  $m > 1 + \frac{1}{\Delta}$  时,

$$m - 1 + \frac{1}{\Delta} \geq \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_t^2 \geq m - 1 - \frac{1}{\Delta},$$

其中  $V_m$  为  $m$  阶 Vandermonde 矩阵,  $\sigma_i$  为其第  $i$  个奇异值,  $\Delta$  将在第二章中说明.

但是, 在实际计算中我们已知的只有 Hankel 矩阵的信息. 在 Moitra 的算法 [3, 算法 1] 中, 稀疏度被作为已知量输入. 我们将会在第三章中指出, 对 Hankel 矩阵及 Vandermonde 矩阵奇异值的估计都以过采样为前提, 即要求  $m \geq t$ , 因此如何精确的确定稀疏度  $t$  非常重要. 但稀疏度的确定本身就是稀疏插值问题的难点. 在精确计算的情形下, [4] 中提出的提前终止定理给出了确定稀疏度  $t$  的方法: 假设  $\hat{H}_m$  为  $m$  阶移位的 Hankel 矩阵, 即

$$\hat{H}_m = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ a_2 & a_3 & \ddots & a_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & a_{m+1} & \cdots & a_{2m-1} \end{bmatrix},$$

那么当  $m \leq t$  时,  $\hat{H}_m$  的行列式为非零多项式, 因此只可能在该多项式的零点处为零. 而从  $m = t + 1$  开始  $\hat{H}_m$  行列式为零. 因此可以通过检测  $\det(\hat{H}_m)$  是否为零来判断稀疏度  $t$ .

上述定理的证明基于以下事实:  $\det(\hat{H}_m)$  的首项系数为:  $2c_1 \cdots c_m \neq 0$ , 但对于非移位的标准 Hankel 矩阵,  $\det(H_m)$  的首项系数为:  $c_1 \cdots c_{m-1} \left( \sum_{\tau=m}^t c_\tau \right)$ , 可能为零. 非移位的 Hankel 矩阵是否也有类似的提前终止定理自 2003 年来就是稀疏插值领域未解决的公开问题. 并且, 由于 Hankel 矩阵常常具有很大的条件数, 判断其奇异性在数值计算中是病态问题, 因此如何准确的判断稀疏度  $t$  是我们考虑的一个重要问题.

### 1.1.2 多项式简单重根计算

考虑由多项式系统  $f = \{f_1, \dots, f_n\}$  生成的理想  $I_f$ , 其中  $f_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ,  $f$  的一个孤立  $\mu$  重根指的满足以下条件的点  $x \in \mathbb{C}^n$ :

1.  $f(x) = 0$ ,

2. 存在半径为  $r > 0$  的球  $B(x, r)$  使得  $B(x, r) \cap f^{-1}(0) = \{x\}$ ,
3.  $\mu = \dim(\mathbb{C}[X]/Q_{f,x})$ ,

其中

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{C}^n : \|y - x\| < r\},$$

并且  $Q_{f,x}$  是  $I_f$  的一个孤立准素分支, 其相关素理想为

$$m_x = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n).$$

在 [5] 中, 根据 Rouché 定理 [6], 条件 (3) 可以替换为

(3a) 一般地, 对任意距离  $f$  充分近的解析函数  $g$ , 在  $B(x, r)$  中都有  $m$  个单根.

下面简要介绍 Smale 的  $\alpha$  理论和  $\gamma$  理论 (见 [7], 更多细节可参见 [8–14]):

记  $Df(x)$  表示  $f$  在  $x$  点处的 Jacobian 矩阵. 假设  $f(x) = 0$  且  $Df(x)$  可逆, 则称  $x$  为  $f$  的单根. 牛顿迭代定义如下:

$$N_f(x) = x - Df(x)^{-1}f(x). \quad (1.1)$$

Shub 和 Smale [12] 定义

$$\gamma(f, x) = \sup_{k \geq 2} \left\| Df(x)^{-1} \cdot \frac{D^k f(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}, \quad (1.2)$$

其中  $D^k f$  表示  $f$  的第  $k$  阶微分, 它是一个对称张量, 其各部分为  $f$  在各个方向上的  $k$  阶偏导数,  $\|\cdot\|$  表示经典算子范数.

由 [7, 定理 1] 可知, 如果

$$\|z - x\| \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2\gamma(f, x)}, \quad (1.3)$$

那么以  $z$  为初始点的 Newton 迭代有二次收敛性, 且收敛到单根  $x$ .

根据 [7, 定理 2], 如果系统  $f$  和点  $z$  满足

$$\alpha(f, z) \leq \frac{13 - 3\sqrt{17}}{4} \approx 0.157671, \quad (1.4)$$

其中  $\alpha(f, z) = \beta(f, z)\gamma(f, z)$  并且

$$\beta(f, z) = \|z - N_f(z)\| = \|Df(z)^{-1}f(z)\|,$$

那么以  $z$  为初始点的牛顿迭代有二次收敛性, 且收敛到  $f$  的一个单根  $\xi$ , 且

$$\|z - \xi\| \leq 2\beta(f, z).$$

$\alpha$  理论及  $\gamma$  理论为用牛顿法求解多项式系统的孤立单根提供了理论依据, 并给出了收敛半径. 那么, 如果要求解多项式系统的孤立重根呢?

对于简单重根 (Jacobian 矩阵亏秩为 1) 情形, 文献 [15] 通过计算近似局部对偶空间的一组既约基, 提出改进的 Newton 迭代算法, 并定性证明了其二次收敛性. 该算法的证明较为复杂, 很难进行定量的分析及收敛半径的求解. 这就促使我们考虑设计一种新算法, 不仅能证明其在简单重根处的二次收敛性, 还能刻画近似根的二次收敛半径.

## 1.2 论文结构和主要结果

### 1.2.1 多项式稀疏插值的数值稳定性和提前终止定理

在第二章中, 基于 [3] 中给出的关于 Vandermonde 矩阵相位突变的定量结论, 我们证明了过采样同样可以使 Hankel 矩阵的奇异值产生相位突变, 并给出了定量描述. 我们给出当  $m \geq 1 + \frac{1}{\Delta} \geq t$  时 Hankel 矩阵的第  $t$  个奇异值的下界, 并且证明当  $m$  足够大时,  $H_m$  的前  $t$  个奇异值都将大于 1. 我们同时证明了, 当  $m \geq t$  时, Vandermonde 系统的条件数可由对应的 Hankel 矩阵的条件数控制. 因此, 通过观察 Hankel 矩阵的奇异值可以得到稳定的数值稀疏插值系统. 此外, 我们证明了对取值点  $\omega$  进行随机的旋转可以较高概率减小所需要的过采样数.

在第三章中, 我们证明了提前终止定理 ([4, 定理 4]) 同样对非移位的 Hankel 矩阵成立, 这解决了 [4] 中的一个公开问题. 我们同时结合第二章的内容及非移位的提前终止定理, 给出了准确判断多项式稀疏度的算法, 即检验  $\zeta$  个 Hankel 矩阵  $H_m, H_{m+1}, \dots, H_{m+\zeta-1}$  的前  $t$  个奇异值是否都大于  $1 - \epsilon$  而且其余的奇异值都小于  $\epsilon$ . 数值实验表明, 上述判定准则具有鲁棒性, 特别地, 在例 3.1 中我们说明了通过适当在过采样的过程中增大  $\zeta$  可以避免算法的过早终止.

### 1.2.2 多项式简单重根计算

对简单二重根和简单三重根情形, 当在该点的 Jacobian 矩阵具有标准型 (4.12) 的时候, 我们设计了改进的牛顿迭代算法并推广了  $\gamma$  理论. 具体的说, 若  $\xi$  为  $f$  的一个准确的简单二重根,  $z$  为近似零点, 我们在定理 5.1 中证明, 如果

$$\|z - \xi\| < \frac{0.0318}{\gamma_2(f, \xi)^2},$$

在进行  $k$  次算法 1 中给出的改进牛顿迭代之后, 可以得到:

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|.$$

同样若  $\xi$  为  $f$  的一个准确的简单三重根,  $z$  为近似零点, 我们在定理 5.2 中证明, 如果

$$\|z - \xi\| < \frac{0.0154}{\gamma_3(f, \xi)^3},$$

在进行  $k$  次算法 2 中给出的改进牛顿迭代之后, 可以得到:

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|.$$

如果多项式系统在简单重根的 Jacobian 矩阵不具有标准型 (4.12), 我们证明可以通过一个正交变换得到等价的多项式系统, 使得新系统在近似简单重根  $z$  处的 Jacobian 矩阵有如下的近似标准型:

$$Df(z) = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_{n-1} \\ \sigma_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

其中  $\sigma_n$  为其最小奇异值并且  $\Sigma_{n-1}$  为非奇异对角矩阵. 接下来, 我们运用牛顿迭代算法精化后  $n-1$  个变量, 然后再次对系统进行正交变换 (两次正交变换缺一不可) 以保证系统在精化后的近似根处具有标准型 (1.5). 我们根据之前的工作 [15, 算法 1] 定义改进的牛顿迭代, 精化第一个分量. 我们在定理 5.3 证明, 对于

$$\hat{\gamma}_\mu(f, z)\|z - \xi\| < \frac{1}{2},$$

算法 3 返回的精化奇异根  $N_f(z)$  满足:

$$\|N_f(z) - \xi\| = O(\|z - \xi\|^2).$$

在定理 5.4 中我们说明了, 若  $\xi$  为  $f$  的简单三重根, 则对于近似根  $z$ , 当

$$\|z - \xi\| < \frac{0.0098}{\gamma_3(f, \xi)^3},$$

时, 在进行  $k$  次算法 3 中给出的改进牛顿迭代之后, 可以得到:

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|.$$

从定理 5.4 的证明过程可见, 可以推广算法 3 的二次收敛半径至任意重数的简单重根情形.

进一步, 令  $g(X) = f(X) - f(x) - \sum_{1 \leq k \leq \mu-1} H_k(X-x)^k$ ,  $\gamma_\mu = \gamma_\mu(g, x)$ . [16, 定理 8] 指出, 如果

$$\|f(x)\| + \sum_{1 \leq k \leq \mu-1} \|H_k\| \left( \frac{d}{4\gamma_\mu^\mu} \right)^k < \frac{d^{\mu+1}}{2(4\gamma_\mu^\mu)^\mu \|\mathcal{A}^{-1}\|}, \quad (1.6)$$

那么  $f$  在  $x$  的半径为  $\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}$  的邻域中有且只有  $\mu$  个根 (计算重数), 其中  $d$  为小于 1 的常数,  $H_k$  及  $\mathcal{A}$  都可通过  $f$  及  $x$  计算得到. 因此我们可以给出多项式系统简单重根的可信验证: 假设  $\xi$  为多项式系统  $f$  的简单  $\mu$  重根,  $x_0$  为其近似根, 对  $f$  及  $x_0$  进行若干次算法 3 中的迭代得到  $x$ . 如果  $x$  满足可信条件 (1.6), 那么由  $\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu} < \frac{1}{2\gamma_\mu}$  及定理 5.3 可知,  $f$  在  $x$  的半径为  $\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}$  的邻域内有  $\mu$  个根, 并且以  $x$  为初始点的算法 3 二次收敛到  $\xi$ .



## 第二章 数值稀疏插值

本章简要介绍了多项式稀疏插值经典的 Prony 方法及其在数值计算中的问题, 证明了过采样同样可以使 Hankel 矩阵的奇异值产生相位突变, 并且当  $m$  足够大时,  $H_m$  的前  $t$  个奇异值都将大于 1. 给出了通过检测  $H_m$  的奇异值来判断单变元多项式稀疏度的算法.

### 2.1 多项式稀疏插值

我们考虑多项式形式的 Prony 方法. 设  $\mathbb{K}$  为任意域,  $f \in \mathbb{K}[x]$ , 其中:

$$f = \sum_{i=1}^t c_i x^{e_i}, \quad c_i \neq 0.$$

假设  $p$  是一个大于  $\deg(f)$  的素数. 令  $a_i = f(\omega^i)$ , 其中  $\omega$  为随机选定的  $p$  阶单位根. 令  $H_m$  为由序列  $a_0, \dots, a_{2m-2}$  定义的 Hankel 矩阵, 即:

$$H_m = \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{m-1} \\ a_1 & \cdots & a_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & \cdots & a_{2m-2} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

$H_m$  存在如下分解:

$$H_m = V_m \cdot D \cdot V_m^T, \quad (2.2)$$

其中  $V_m$  是  $m \times t$  阶 Vandermonde 矩阵, 即:

$$V_m = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \omega^{e_1} & \cdots & \omega^{e_t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega^{e_1(m-1)} & \cdots & \omega^{e_t(m-1)}. \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$D$  是  $t \times t$  对角矩阵, 即:

$$D = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_t \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

记  $V_m^T$  表示 Vandermonde 矩阵  $V_m$  的转置.

在准确计算的情形, 提前终止定理可在较高概率下确定  $f$  的稀疏度, 即在较高概率下, 当  $2 \leq j \leq t$  时,  $H_t$  的所有的  $j \times j$  阶左上角主子阵皆非奇异. 而且当  $j > t$  时,  $H_j$  为奇异矩阵. 因此稀疏度的确定可按以下准则: 当  $j$  增加时,  $H_j$  首次成为奇异矩阵当且仅当  $j = t + 1$ . 然而 Hankel 矩阵本身可能非常病态: [17] 研究了如何估计 Hankel 矩阵  $H_t$  的谱范数以及如何利用 [2] 中提出的利用随机化方法得到相对良态的 Hankel 矩阵  $H_t$ , 然后通过检测 Hankel 矩阵  $H_{t+1}$  条件数的突然增加来判定稀疏度.

过采样是另外一种被广泛用来改善 Hankel 矩阵条件数的方法 ([18]). 利用过采样进行有误差的稀疏信号恢复有很多很好的结果: 见 [3, 19–21]. 特别的, 在 [3] 中, Ankur Moitra 给出了当  $m > 1/\Delta + 1$  时估计 Vandermonde 矩阵条件数的显式表达式, 其中  $\Delta$  为  $f$  中各非零项在给定点取值时的最小隔离界.

下面我们介绍如何利用对 Hankel 矩阵奇异值下界的估计以及非移位情形的提前终止定理来判断多项式  $f$  的稀疏度.

## 2.2 多项式的稀疏度

我们扩展了 [3] 中的定理 2.3, 给出了当  $m > \frac{1}{\Delta} + 1$  时  $H_m$  的第  $t$  个奇异值的一个下界, 这提供了判定  $f$  的稀疏度的新算法: 检查过采样的 Hankel 矩阵的奇异值是否被分离成两个部分——大于  $1 - \epsilon$  的部分以及小于  $\epsilon$  的部分. 在本章中  $\mathbb{K}$  指复数域.

**定义 2.1** (见 [20]). 记  $\mathcal{B}$  表示与区间  $[0, 1]$  上的点一一对应的单位圆周, 对点集  $B \subset \mathcal{B}$ , 其最小隔离界定义为  $B$  中任意两点的最小距离:

$$\Delta(B) = \inf_{(b,b') \in B: b \neq b'} |b - b'|, \quad (2.5)$$

其中  $|b - b'|$  表示圆上距离, 即  $b$  和  $b'$  间的劣弧长度除以  $2\pi$ .

记

$$\omega = e^{2\pi i j/p}, \quad 0 \leq j < p, \quad (2.6)$$

其中整数  $j$  可以固定也可以随机选取. 记

$$\Delta = \Delta(\omega^{e_1}, \dots, \omega^{e_t}).$$

那么显然

$$1 + \frac{1}{\Delta} > t.$$

下面的定理的证明可参见 [3].

**定理 2.1.** 记  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_t$  为  $V_m$  的奇异值, 如果  $m > 1 + \frac{1}{\Delta}$ , 那么

$$m - 1 + \frac{1}{\Delta} \geq \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_t^2 \geq m - 1 - \frac{1}{\Delta}. \quad (2.7)$$

$V_m$  的条件数  $\kappa$  满足:

$$\kappa^2 \leq \frac{m + 1/\Delta - 1}{m - 1/\Delta - 1}. \quad (2.8)$$

当  $m > 1 + \frac{1}{\Delta}$  时, (2.7) 和 (2.8) 中的上界和下界可以用来估计  $\sigma_t(H_m)$  和  $\sigma_1(H_m)$ . 首先介绍如何用  $V_m$  的第  $t$  个奇异值  $\sigma_t(V_m)$  估计  $\sigma_t(H_m)$ . 假设  $H_m$  有如下分解:  $H_m = V_m \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot V_m^T$ , 并记:  $W_m = V_m \cdot D^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}^{m \times t}$ . 那么有如下命题成立:

**命题 2.1.**  $\sigma_t(H_m) \geq \sigma_t^2(W_m)$ .

**证明.** 记  $W_m = U \cdot \Sigma \cdot V$  为  $W_m$  的奇异值分解, 其中  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times t}$ ,  $V \in \mathbb{C}^{t \times t}$ , 记  $W_m^\dagger$  为  $W_m$  的广义 Moore-Penrose 逆矩阵 (由 [22] 可知其唯一性), 则  $W_m^\dagger = V^H \cdot \Sigma^\dagger \cdot U^H$ , 其中  $V^H$  和  $U^H$  表示矩阵  $V$  和  $U$  的 Hermitian 转置,  $\Sigma^\dagger$  通过将矩阵  $\Sigma$  中的非零元素由他们的逆元素替代得到. [23] 中证明了:

$$H_m^\dagger = (W_m \cdot W_m^T)^\dagger = (W_m^T)^\dagger \cdot W_m^\dagger, \quad (2.9)$$

上式表明:

$$\sigma_1(H_m^\dagger) \leq \sigma_1((W_m^T)^\dagger) \cdot \sigma_1(W_m^\dagger) = \sigma_1^2(W_m^\dagger). \quad (2.10)$$

我们注意到:

$$\sigma_1(H_m^\dagger) = \frac{1}{\sigma_t(H_m)}, \sigma_1(W_m^\dagger) = \frac{1}{\sigma_t(W_m)}, \quad (2.11)$$

因此命题得证.  $\square$

**引理 2.1.** 对  $m \geq t$ , 有如下结论:

$$\sigma_t(H_m) \geq \sigma_t^2(V_m) \cdot \min_{1 \leq i \leq t} |c_i|. \quad (2.12)$$

**证明.**  $H_m$  有如下分解:  $H_m = V_m \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot V_m^T$ , 并记:

$$W_m = V_m \cdot D^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}^{m \times t}.$$

如果当  $i \neq j$  时  $\omega^{e_i} \neq \omega^{e_j}$ , 并且  $m \geq t$ , 那么  $V_m \in \mathbb{C}^{m \times t}$  为列满秩矩阵. 并且, 由于  $c_i \neq 0$ , 对角矩阵  $D \in \mathbb{C}^{t \times t}$  可逆. 因此

$$\text{rank}(H_m) = \text{rank}(D) = \text{rank}(W_m) = \text{rank}(V_m) = t.$$

现在我们考虑  $W_m$  的第  $t$  个奇异值. 由奇异值的性质, 有

$$\sigma_t(W_m) = \min_{\text{rank}(A) < t} \|W_m - A\|_2. \quad (2.13)$$

记  $A_0$  为 (2.13) 中的一个极小解, 那么  $A_0 \cdot D^{-\frac{1}{2}}$  的秩小于  $t$ . 因此:

$$\begin{aligned} \sigma_t(V_m) &= \min_{\text{rank}(B) < t} \|V_m - B\|_2, \\ &\leq \|V_m - A_0 \cdot D^{-\frac{1}{2}}\|_2 \\ &= \|(V_m \cdot D^{\frac{1}{2}} - A_0) \cdot D^{-\frac{1}{2}}\|_2 \\ &\leq \|W_m - A_0\|_2 \cdot \|D^{-\frac{1}{2}}\|_2 \\ &= \sigma_t(W_m) \cdot \|D^{-\frac{1}{2}}\|_2. \end{aligned}$$

由于  $\frac{1}{\|D^{-1/2}\|_2^2} = \min_{1 \leq i \leq t} |c_i|$ , 由命题 2.1 可得:

$$\sigma_t^2(W_m) \geq \sigma_t^2(V_m) \cdot \min_{1 \leq i \leq t} |c_i|. \quad (2.14)$$

再由命题 2.1 可以完成引理 2.1 的证明.  $\square$

**注释 2.1.** 当  $W_t$  是一个实矩阵的时候,  $\sigma_t(H_t) = \sigma_t^2(W_t)$ , 否则有可能存在以下关系:  $\sigma_t(H_t) > \sigma_t^2(W_t)$ . 例如, 定义如下两个矩阵:

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

那么

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} i & \sqrt{2} \\ i & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

因此

$$\sigma_2(H_2) = 0.243 > \sigma_2^2(W_2) = 0.169. \quad (2.17)$$

**注释 2.2.** 引理 2.1 只有当  $m \geq t$  时成立. 当  $m < t$  时, 可以构造出条件数很好的 Vandermonde 矩阵  $V_m$ , 其对应一个奇异的 Hankel 矩阵  $H_m = V_m \cdot D \cdot V_m^T$ , 见例 3.1.

**定理 2.2.** 对给定的  $f$  及  $\omega$ , 当  $m > 1 + \frac{1}{\Delta}$  时,

$$\sigma_t(H_m) \geq \left(m - 1 - \frac{1}{\Delta}\right) \cdot \min_{1 \leq i \leq t} |c_i|, \quad (2.18)$$

并且

$$\frac{\sigma_1(H_m)}{\sigma_t(H_m)} \leq \frac{m - 1 + \frac{1}{\Delta}}{m - 1 - \frac{1}{\Delta}} \cdot \frac{\max_{1 \leq i \leq t} |c_i|}{\min_{1 \leq i \leq t} |c_i|}. \quad (2.19)$$

**证明.** 当  $m > 1 + \frac{1}{\Delta}$  时, 由定理 2.1,

$$m - 1 + \frac{1}{\Delta} \geq \sigma_1^2(V_m) \geq \sigma_t^2(V_m) \geq m - 1 - \frac{1}{\Delta}. \quad (2.20)$$

当  $m > 1 + \frac{1}{\Delta} \geq t$  时, 由 (2.12) 可得:

$$\sigma_t(H_m) \geq \sigma_t^2(V_m) \cdot \min_{1 \leq i \leq t} |c_i| \geq \left(m - 1 - \frac{1}{\Delta}\right) \cdot \min_{1 \leq i \leq t} |c_i|.$$

另一方面,  $\sigma_1(H_m)$  为  $H_m$  的二范数, 那么

$$\begin{aligned} \sigma_1(H_m) &\leq \sigma_1(V_m) \cdot \sigma_1(D) \cdot \sigma_1(V_m^T) \\ &= \sigma_1^2(V_m) \cdot \max_{1 \leq i \leq t} |c_i| \\ &\leq \left(m - 1 + \frac{1}{\Delta}\right) \cdot \max_{1 \leq i \leq t} |c_i|. \end{aligned}$$

因此可得 (2.19) 成立. □

下述定理描述至少多少样本点可以使 Hankel 矩阵的第  $t$  个奇异值不小于 1.

**定理 2.3.** 如果  $m$  满足:

$$m \geq 1 + \frac{1}{\Delta} + \max_{1 \leq i \leq t} \frac{1}{|c_i|}, \quad (2.21)$$

则  $\sigma_t(H_m) \geq 1$ .

**证明.** 由定理 2.2, 当  $m \geq 1 + \frac{1}{\Delta}$  时,

$$\sigma_t(H_m) \geq \left(m - 1 - \frac{1}{\Delta}\right) \cdot \min_{1 \leq i \leq t} |c_i|.$$

因此, 如果  $m$  满足 (2.21), 那么

$$\sigma_t(H_m) \geq \max_{1 \leq i \leq t} \frac{1}{|c_i|} \cdot \min_{1 \leq i \leq t} |c_i| = 1.$$

□

下面关于奇异值扰动的定理可参见 [24, 25].

**定理 2.4.** 设  $\sigma_j(A)$  为  $A$  的第  $j$  个奇异值. 假设  $E$  为扰动矩阵. 那么对  $1 \leq i \leq \dim(A)$ , 都有:

$$|\sigma_i(A + E) - \sigma_i(A)| \leq \|E\|_2. \quad (2.22)$$

**注释 2.3.** 在准确情形下, 对  $m \geq t + 1$ , 都有

$$\sigma_j(H_m) = 0, \quad t + 1 \leq j \leq m.$$

因此, 由定理 2.4,

$$|\sigma_j(H_m + E)| \leq \|E\|_2 \triangleq \epsilon, \quad t + 1 \leq j \leq m. \quad (2.23)$$

定理 2.3 中的常数 1 可以用任一常数  $\tau > 2\epsilon$  替代, 因此  $H_m + E$  的奇异值可以被严格的分成两个部分: 当  $j \leq t$  时,  $\sigma_j(H_m + E) \geq \tau - \|E\|_2 > \epsilon$ , 当  $j > t$  时,  $\sigma_j(H_m + E) \leq \epsilon$ .

定理 2.3 及不等式 (2.23) 提供了准确判断稀疏度  $t$  的算法, 我们首先引进如下记号:

- $m$ : 当前 Hankel 矩阵的规模;
- $\epsilon$ : Hankel 矩阵的误差界;
- $n_{\sigma \geq 1-\epsilon}$ : 矩阵  $H_{m-1}$  的大于或等于  $1 - \epsilon$  的奇异值的个数;
- $n_{\sigma \leq \epsilon}$ : 矩阵  $H_{m-1}$  的小于或等于  $\epsilon$  的奇异值的个数;
- $\zeta$ : 在如下情况下算法终止:

$$\begin{cases} n_{\sigma \geq 1-\epsilon}(H_{m+i}) = n_{\sigma \geq 1-\epsilon}(H_{m-1}), \\ n_{\sigma \leq \epsilon}(H_{m+i}) = m + i - n_{\sigma \geq 1-\epsilon}(H_{m-1}), \end{cases} \quad (2.24)$$

对任何满足  $0 \leq i \leq \zeta - 1$  的  $i$  都成立的时候.

## 算法 NSD

**输入** -  $f(x)$ : 单变元多项式  $f$  的形式未知, 但给定  $x$  可得到  $f(x)$ ;

-  $\epsilon$ : Hankel 矩阵的误差界.

**输出** -  $t$ :  $f(x)$  的稀疏度.

**第 1 步** 估计  $\deg(f)$  的上界  $p$ , 其中  $p$  为素数.

**第 2 步** 对一个随机选取的整数  $j \in [1, p-1]$ , 令  $\omega \leftarrow e^{2\pi i j/p}$ ,  $n_{\sigma \geq 1-\epsilon} \leftarrow 0$ ,  $n_{\sigma \leq \epsilon} \leftarrow 0$ ,  
 $k \leftarrow 0$ ,  $m \leftarrow 1$ ,  $H_1 \leftarrow f(1)$ .

第3步 当  $k < \zeta$  时

- 计算  $H_m$  的所有奇异值;  
 $l_1 \leftarrow$  大于  $1 - \epsilon$  的奇异值的个数;  
 $l_2 \leftarrow$  小于  $\epsilon$  的奇异值的个数.
  - 如果  $l_1 + l_2 = m$  并且  $l_1 = n_{\sigma \geq 1 - \epsilon}$   
 $k \leftarrow k + 1$ .
- 否则,
- $k \leftarrow 0$ .
- $n_{\sigma \geq 1 - \epsilon} \leftarrow l_1, n_{\sigma \leq \epsilon} \leftarrow l_2, m \leftarrow m + 1$ .
  - 令  $f(x)$  在  $\omega^{2m-3}$  和  $\omega^{2m-2}$  点处取值并更新  $H_m$ .

第4步 如果  $k < \zeta$ , 返回第3步, 否则  $t \leftarrow n_{\sigma \geq 1 - \epsilon}$ .

**定理 2.5.** 假设 *Hankel* 矩阵的误差可由  $\epsilon$  界定, 上述算法当  $m$  满足以下条件的时候终止:

$$m \geq 1 + \frac{1}{\Delta} + \max_{1 \leq i \leq t} \frac{1}{|c_i|} + (\zeta - 1). \quad (2.25)$$

算法 *NSD* 在较高概率下返回  $f$  的稀疏度  $t$ .

**证明.** 由定理 2.3, 当  $m$  满足以下条件时:

$$m \geq 1 + \frac{1}{\Delta} + \max_{1 \leq i \leq t} \frac{1}{|c_i|},$$

$\sigma_t(H_m)$  一定不小于 1. 而且由定理 2.4,

$$|\sigma_t(H_m + E)| \geq |\sigma_t(H_m)| - \|E\|_2 \geq 1 - \epsilon.$$

当  $m \geq t + 1$  时,

$$\sigma_j(H_m) = 0, \quad t + 1 \leq j \leq m.$$

由定理 2.4 及不等式 (2.23) 可知, 对  $j = t + 1, \dots, m$ , 都有

$$|\sigma_j(H_m + E)| \leq \|E\|_2 \leq \epsilon.$$

因此条件 (2.24) 将会连续  $\zeta$  次满足.

关于算法 *NSD* 成功返回  $f$  的稀疏度  $t$  的概率将在 3.1 中讨论

□

**注释 2.4.** 由于 (2.25) 中给出的最小样本个数依赖于  $\min_{1 \leq i \leq t} |c_i|$ , 如果上述最小值远小于 1, 不等式 (2.19) 提供了一个更好的终止算法的判别准则.

下面的定理说明 Vandermonde 矩阵  $V_m$  的第  $t$  个奇异值也可以由 Hankel 矩阵  $H_m$  的第  $t$  个奇异值估计.

**定理 2.6.** 对  $m \geq t$ , 有以下估计

$$\sigma_t(V_m) \geq \frac{\sigma_t(H_m)}{2m \max_{1 \leq i \leq t} |c_i|}. \quad (2.26)$$

**证明.** 假设  $V_m = U \cdot \Sigma \cdot V$  是  $V_m$  的奇异值分解, 其中  $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times t}$ ,  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbb{C}^{t \times t}$ . 那么

$$\begin{aligned} \sigma_t(V_m) &= \min_{\text{rank}(B) < t} \|V_m - B\|_2, \\ &= \|V_m - \bar{V}_m\|_2, \end{aligned}$$

其中

$$\bar{V}_m = U \cdot \text{diag}(\sigma_1(V_m), \dots, \sigma_{t-1}(V_m), 0) \cdot V.$$

因此:

$$\begin{aligned} \sigma_t(H_m) &= \min_{\text{rank}(A) < t} \|V_m D V_m^T - A\|_2 \\ &\leq \|V_m D V_m^T - \bar{V}_m D \bar{V}_m^T\|_2 \\ &= \|V_m D V_m^T - V_m D \bar{V}_m^T + V_m D \bar{V}_m^T - \bar{V}_m D \bar{V}_m^T\|_2 \\ &\leq \|V_m D (V_m^T - \bar{V}_m^T)\|_2 + \|(V_m - \bar{V}_m) D \bar{V}_m^T\|_2 \\ &\leq \sigma_t(V_m) \|V_m\|_2 \|D\|_2 + \sigma_t(V_m) \|\bar{V}_m\|_2 \|D\|_2 \\ &\leq 2\sigma_t(V_m) \|V_m\|_2 \|D\|_2 \\ &\leq 2m \max_{1 \leq i \leq t} |c_i| \sigma_t(V_m). \end{aligned}$$

□

(2.25) 中给出的最小样本个数同样依赖于最小分离界  $\Delta$ . [2] 中提出了一些随机算法, 可以适当地增大最小分离界. 下面的定理是 [2, 定理 4.3] 的推广.

**定理 2.7.** 假设  $p$  为素数并且  $p > \deg(f)$ .  $\omega = e^{2\pi i j/p}$ , 其中  $j$  在  $0 < j < p$  中均匀随机选取, 则在至少  $1 - \frac{1}{2k}$  的概率下, 下式成立:

$$\Delta > \frac{1}{2kt^2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{>0}. \quad (2.27)$$



**证明.** 我们推广 [2, 定理 4.3] 中的证明. 假设当  $u < v$  时候,  $e_u > e_v$ , 由定义 2.1, 有

$$\Delta = \frac{1}{p} \cdot \min_{1 \leq u < v \leq t} \min\{\delta_{u,v}, p - \delta_{u,v}\}, \quad (2.28)$$

其中

$$\delta_{u,v} = e_u \cdot j - e_v \cdot j \pmod{p}.$$

$(e_u - e_v) \pmod{p}$  至多有  $\binom{t}{2} \leq \frac{t^2}{2}$  个不同的值. 对任意的  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ , 令

$$l = \frac{p}{2kt^2}, \quad (2.29)$$

那么对所有的

$$c \in \{1, \dots, [l]\} \cup \{p - [l] + 1, \dots, p\},$$

其中函数  $[l]$  表示  $\leq l$  的最大整数, 存在唯一  $j \in \mathbb{Z}_p$  使得

$$\delta_{u,v} = c.$$

事实上, 因为  $p$  是一个大于  $\deg(f)$  的素数,  $[e_u - e_v]$  是  $\mathbb{Z}_p$  中的可逆元, 即

$$j = (e_u - e_v)^{-1} \cdot c \pmod{p},$$

因此对任意给定的  $e_u$  和  $e_v$ , 存在  $2 \cdot [l]$  个  $j$  的值使得

$$\min\{\delta_{u,v}, p - \delta_{u,v}\} \leq l. \quad (2.30)$$

要使得 (2.30) 对某个  $\delta_{u,v}$  满足,  $j$  共可取  $(t^2/2) \cdot 2 \cdot [l]$  个值, 因此由 (2.28) 及 (2.29),  $\Delta \leq \frac{[l]}{p} \leq \frac{l}{p} \leq \frac{1}{2kt^2}$  成立的概率可估计如下:

$$\leq \frac{t^2}{2} \cdot 2 \cdot [l] \cdot \frac{1}{p} \leq \frac{t^2}{2} \cdot 2l \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{2k},$$

□

**例子 2.1.** 假设  $f = 2x^{109} - 5x^{59} + x^{58} + 2x^{47} + 3x^{35}$ , 取  $\zeta = 5$ .

1. 令  $\omega = e^{2\pi i/119}$ , 假设  $H_m$  的误差可由  $\epsilon = 0.05$  限制.  $f$  在  $\omega$  点的最小隔离界为:

$$\Delta(\omega^{109}, \dots, \omega^{35}) = \frac{1}{119}.$$

当  $m$  增长到大于 16 时, 总会出现以下现象:  $H_m$  有 5 个奇异值严格大于 1, 而其他的奇异值严格小于 0.05. 因此算法将在  $21 = 16 + 5$  步之后终止并且返回  $t = 5$ .

进一步有  $\frac{\sigma_1(H_4)}{\sigma_4(H_4)} \approx 48.7$ ,  $\frac{\sigma_1(H_5)}{\sigma_5(H_5)} \approx 4387$ . 因此, 如果我们用  $H_m$  条件数的骤然增加去判断  $f$  的稀疏度, 那我们会返回一个错误的结论:  $t = 4$ .

同样我们注意理论上最差的情况, 我们可以通过  $\frac{1}{\Delta} + 1 = 120$  个样本便可检测到稀疏度并得到一个良态的 *Vandermonde* 矩阵, 但是实际上算法 *NSD* 可以更早地终止, 例如  $V_{16}$  的条件数是 8.6.

2. 如果对  $\omega$  进行一个随机的旋转, 例如令  $\omega = e^{2\pi i \cdot 9/119}$ . 最小分离距离将会增大:

$$\Delta(\omega^{109}, \dots, \omega^{35}) \approx 1/13.$$

这样, 算法将会提前 8 步终止, 即当  $m = 8$  时条件 (2.24) 满足.

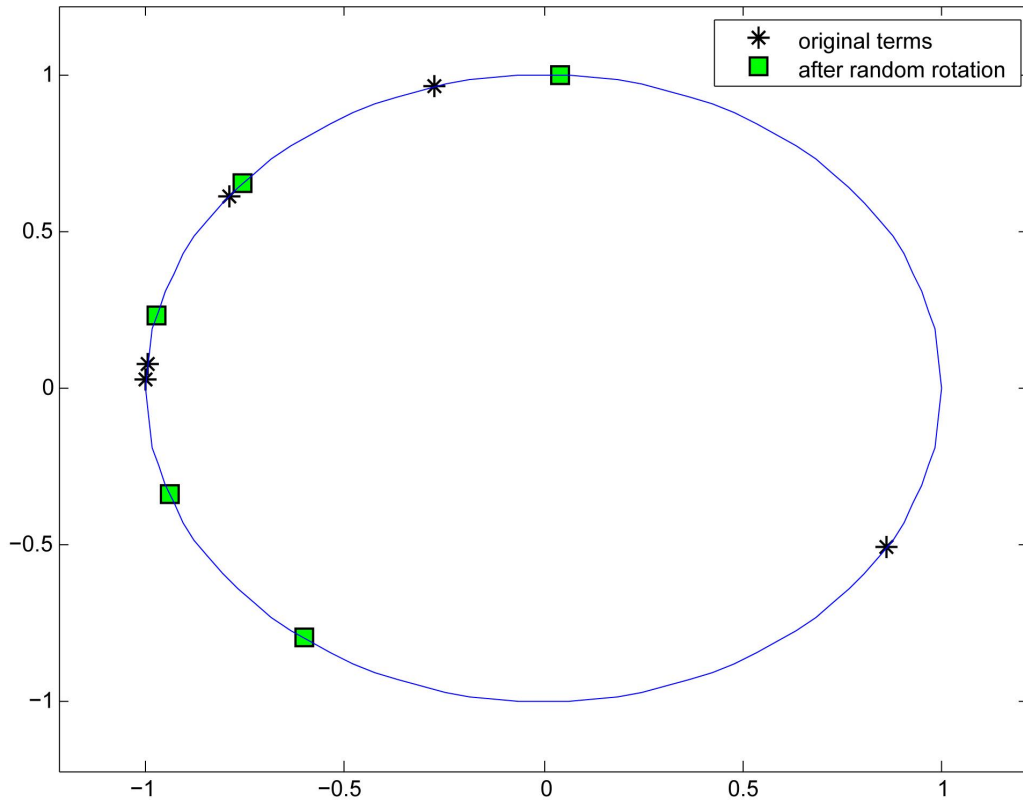


图 2.1: 例 2.1 中的项

### 第三章 提前终止定理

本章例 3.1 表明, 第二章中给出的算法 NSD 可能在  $m$  达到稀疏度  $t$  之前过早终止. 为保证算法 NSD 不会过早的终止, 同时也为了回答 [4] 中提出的公开问题, 我们证明了提前终止定理对非移位的 Hankel 矩阵同样成立, 同时在较高概率下, 算法 NSD 不会在达到稀疏度  $t$  之前终止.

#### 3.1 移位的提前终止定理

在精确计算的情形, 对于检验算法的终止条件, [4] 给出了算法在达到实际的稀疏度  $t$  之前不会过早终止的概率分析. 我们之所以称 [4] 中给出的随机算法可以实现提前终止, 是因为在较高概率下, 算法只需要不超过  $2t + 1$  步即可终止, 而  $2t + 1$  是在稀疏度未知的情况下多项式插值所需要的最小样本点个数. [4] 中 Kaltofen 和 Lee 考虑的是 Ben-Or 和 Tiwari 在 [26] 中提出的 Prony 方法的多元多项式版本. 假设系数域  $\mathbf{K}$  为任意域. 令

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^t c_j x_1^{e_{j,1}} \cdots x_n^{e_{j,n}}, c_j \in \mathbf{K}, c_j \neq 0 \quad (3.1)$$

为  $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_n]$  中的  $t$  稀疏多项式, 并令

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= f(x_1^i, \dots, x_n^i) \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_n], i = 1, 2, 3, \dots \\ \alpha_0 &= c_1 + \cdots + c_t \end{aligned} \right\}. \quad (3.2)$$

令

$$H_m(h_1, \dots, h_{2m-1}) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_m \\ h_2 & h_3 & \cdots & h_{m+1} \\ h_3 & h_4 & \cdots & h_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \cdots & h_{2m-1} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

为由  $h_1, \dots, h_{2m-1}$  生成的  $m$  阶移位的 Hankel 矩阵. [4] 中定理 4 表明:

$$\forall m, 1 \leq m \leq t: \det(H_m(\alpha_1, \dots, \alpha_{2m-1})) \neq 0.$$

而对所有  $m' \geq t + 1$ , 总有  $\det(H_{m'}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2m'-1})) = 0$ . 因此由 DeMillo-Lipton/Schwartz/Zippel 引理, 如果域中的元素  $\omega_j \in S \subseteq \mathbf{K}$  是在一个有限集合  $S$  中等概

率随机选取的, 那么至少在概率

$$1 - \left( t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \right) \deg(f) \frac{1}{3|S|} \quad (3.4)$$

( $|S|$  表示集合  $S$  中元素的个数) 下,  $\det H_m(a_1, \dots, a_{2m-1}) \neq 0$  对  $a_i = \alpha_i(\omega_1, \dots, \omega_n)$  及  $1 \leq m \leq t$  成立 ([4, 定理 5]). 因此, 在较高概率下, 当  $m$  增加时, 第一个奇异的 Hankel 矩阵的规模为  $(t+1) \times (t+1)$ , 由此可得到稀疏度  $t$ . 行列式序列  $\{\det(H_m(a_1, \dots, a_{2m-1}))\}_{1 \leq m \leq t+1}$  可以通过序列  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , 利用 Berlekamp/Massey 算法 ([27, 28]) 依次计算得到. 这个过程中共需要  $O(t^2)$  次代数运算并且不需要使用除法. 算法 NSD 终止的条件是: Hankel 矩阵  $H_{m+\zeta}$  所有的奇异值被严格的分成两部分, 一部分大于  $1 - \epsilon$ , 另一部分小于  $\epsilon$  并且没有奇异值落在中间区域.

需要注意的是, 无论是上述单变元数值插值算法 (NSD) 还是 Ben-Or 及 Tiwari 的多变元符号算法, 都是针对以  $(\omega_1^0, \dots, \omega_n^0) = (1, 1, \dots, 1)$  开始的序列, 在这种情况下,  $H_1(\alpha_0) = c_1 + \dots + c_t$  可能为 0. 如果系数域  $K$  的特征为 2, 那么当  $c_1 = \dots = c_t = 1$  时, 对所有满足  $0 \leq m \leq t-1$  且  $t-m$  为奇数的  $m$ , 都有  $\det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2})) = 0$  (见注释 3.2). 上述事实说明, 当系数域的特征等于 2 时, 若要使所有满足  $m \geq 2$  的  $H_m$  都为非奇异矩阵, [4] 中以  $\alpha_1$  开始的移位是必要的.

从 [4] 的定理 4 的证明中同样可以看出 (见第三章式 (3.16)), 对任何的系数域  $K$ , 都有

$$\forall m, 1 \leq m \leq t-1: \left\{ \begin{array}{l} \det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2})) \neq 0 \\ \text{或者} \\ \det(H_{m+1}(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m})) \neq 0. \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

因此, 如果在连续出现  $\zeta = 2$  个奇异的 Hankel 矩阵的时候终止算法, 则在至多增加两个样本点的前提下, 算法失败概率的上界将会减小.

### 3.2 一个特殊的偏序及非移位的提前终止定理

对特征不等于 2 的系数域  $K$ , 我们可以改进 [4] 中的定理 4, 并对 [4] 脚注 2 中提出的公开问题给出肯定的回答.

**定理 3.1.** 设系数域  $K$  的特征不等于 2. 令  $\alpha_i$  如 (3.2) 中定义,  $H_m$  如 (3.3) 中定义. 那么

$$\left. \begin{array}{l} \det(H_1(\alpha_0)) = c_1 + \dots + c_t, \\ \det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2})) \neq 0, \text{ 对任意 } 2 \leq m \leq t. \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

证明. 对 [4] 中式 (9) 中给出的  $\det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2}))$  的展开式 (另可见式 (2.2)), 我们的证明给出了比引文更精细的关于项的结构分析. 令  $J = \{1, 2, \dots, t\}$ , 并令

$$F(y_1, \dots, y_t) = \sum_{\{j_1, \dots, j_m\} \subseteq J} c_{j_1} \cdots c_{j_m} \prod_{1 \leq v < u \leq m} (y_{j_u} - y_{j_v})^2 \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t], \quad (3.7)$$

令  $\beta_j = x_1^{e_{j,1}} \cdots x_n^{e_{j,n}}$  为 (3.1) 中第  $j$  项. 那么我们有:

$$\det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2})) = F(\beta_1, \dots, \beta_t). \quad (3.8)$$

(3.7) 中有  $\binom{t}{m}$  项求和, 并且 (3.7) 中每一个乘积都有  $\binom{m}{2}$  个平方项因子.

对  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  上  $F(\beta_1, \dots, \beta_t)$  中的单项, 以及  $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$  上  $F(y_1, \dots, y_t)$  中的单项, 我们考虑相容的全项序, 分别记为  $\succeq_x$  和  $\succeq_y$ . 记  $\succ_x$  和  $\succ_y$  表示严格的项序, 即表示大于且不等于. 这里的项序可以有多种选择, 比如纯字典序. 注意到如果  $F \neq 0$ , 那么 (3.7) 中  $F$  的每一项关于  $y_1, \dots, y_t$  的全次数将会等于  $2\binom{m}{2} = m(m-1)$ . 我们假设 (3.1) 中  $f$  的项  $\beta_j$  有如下大小顺序:

$$\beta_1 \succ_x \beta_2 \succ_x \cdots \succ_x \beta_t, \quad (3.9)$$

并且变量  $y_j$  的大小顺序如下:

$$y_1 \succ_y y_2 \succ_y \cdots \succ_y y_t. \quad (3.10)$$

在 (3.7) 中, 在所有的乘积  $\prod_{1 \leq v < u \leq m} (y_{j_u} - y_{j_v})^2$  中出现的单项中, 在单项序  $\succeq_y$  下的首项是:

$$M_1 = y_1^{2m-2} y_2^{2m-4} \cdots y_{m-2}^4 y_{m-1}^2 \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t], \quad (3.11)$$

该事实将会在下文中给予证明. 我们现在给出  $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$  中全次数为  $D$  的项的一个新的, 重要的偏序  $\sqsupseteq_y$ :

**定义 3.1.** 假设  $M \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$  的全次数为  $D = m(m-1)$ . 将  $M$  中的所有变量按照 (3.10) 中规定的序从大到小排列, 形成一个列表 (高次变量重复记录), 记为:  $\text{vlist}(M)$ , 即:

$$\text{vlist}(M) \triangleq \underbrace{[y_{j_1}, \dots, y_{j_1}]}_{e_1 \text{ 个}}, \dots, \underbrace{[y_{j_k}, \dots, y_{j_k}]}_{e_k \text{ 个}},$$

$$\text{其中 } M = y_{j_1}^{e_1} \cdots y_{j_k}^{e_k}, e_1 \geq 1, \dots, e_k \geq 1, j_1 < j_2 < \cdots < j_k.$$

记  $\text{vlist}(M)[\ell]$  表示列表  $\text{vlist}(M)$  中的第  $\ell$  个元素, 即  $\text{vlist}(M)[\ell]$  表示变量  $y_{j_\ell}$ ,  $j_1 \leq \ell \leq j_k$ . 假设  $M'$  为  $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$  中另一个全次数为  $D$  的单项, 定义如下序:

$$M \sqsupseteq_y M'$$

$$\begin{aligned} &\iff \forall \ell, 1 \leq \ell \leq D: \eta \leq \eta' \text{ 对 } \begin{cases} y_\eta = \text{vlist}(M)[\ell], \\ y_{\eta'} = \text{vlist}(M')[\ell] \end{cases} \\ &\iff \forall \ell, 1 \leq \ell \leq D: \text{vlist}(M)[\ell] \succeq_y \text{vlist}(M')[\ell]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

记  $M \sqsupseteq_y M' \iff M \sqsupseteq_y M'$  并且  $M \neq M'$ , 表示在 (3.12) 中至少存在一个指标  $l$ , 使得  $\text{vlist}(M)[\ell] \succ_y \text{vlist}(M')[\ell]$ . 定义

$$\begin{aligned} &M \not\sqsupseteq_y M' \\ &\iff \exists \ell, 1 \leq \ell \leq D: \text{vlist}(M')[\ell] \succ_y \text{vlist}(M)[\ell]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

注意到  $\sqsupseteq_y$  是一个 (严格) 偏序: 例如对  $M = y_1^4 y_3^2$ ,  $M' = y_1^2 y_2^4 \neq M$ , 既有  $M \not\sqsupseteq_y M'$ , 也有  $M' \not\sqsupseteq_y M$ . 我们首先证明:

$$M \sqsupseteq_y M' \implies M(\beta_1, \dots, \beta_t) \succ_x M'(\beta_1, \dots, \beta_t). \quad (3.14)$$

事实上, 由于  $\succeq_x$  具有相容性, 即对  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  中的项  $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ , 如果  $\beta \succeq_x \beta'$ ,  $\gamma \succeq_x \gamma'$ , 那么  $\beta\gamma \succeq_x \beta'\gamma'$ ; 如果  $\beta \succ_x \beta'$  并且  $\gamma \succ_x \gamma'$ , 那么  $\beta\gamma \succ_x \beta'\gamma'$ . 进而由 (3.9), (3.10), 及定义 (3.12) 可知: 如果将  $\beta_1, \dots, \beta_t$  分别代入  $M$  和  $M'$  中, (3.14) 成立

现在, 假设  $M \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$  为 (3.11) 中任一乘积  $\prod_{1 \leq v < u \leq m} (y_{j_u} - y_{j_v})^2$  的一项, 那么对 (3.11) 中的项  $M_1$ , 我们有:

$$M_1 \sqsupseteq_y M. \quad (3.15)$$

事实上, 对  $\mu = 1, 2, \dots, m-1$ , 变量  $y_\mu$  在列表  $\text{vlist}(M)$  中可以达到的最大的位置指标  $\ell_\mu^{[\max]}$  为:  $\ell_\mu^{[\max]} = 2(m-1) + 2(m-2) + \dots + 2(m-\mu)$ , 因为  $M$  中关于  $y_1, \dots, y_\mu$  的最大全序为  $\ell_\mu^{[\max]}$ , 这是因为  $M$  中至少有  $2^{\binom{m-\mu}{2}} = (m-\mu)(m-\mu-1)$  个满足  $j_u > \mu$  并且  $j_v > \mu$  的因子  $(y_{j_u} - y_{j_v})$ , 这些变量在  $M$  中贡献的全次数大于或等于  $(m-\mu)(m-\mu-1)$ , 于是关于  $y_1, \dots, y_\mu$  的最大全次数应小于或等于  $m(m-1) - (m-\mu)(m-\mu-1) = \ell_\mu^{[\max]}$ . 当  $\mu$  在  $\text{vlist}(M_1)$  中时, 这些最大值可以取到. 特别的,  $y_\mu$  在  $\text{vlist}(M_1)$  中第一次出现是在位置  $\ell_{\mu-1}^{[\max]} + 1$  处. 假设  $M_1 \not\sqsupseteq_y M$ , 也就是存在  $\ell, 1 \leq \ell \leq D$ , 使得  $\text{vlist}(M)[\ell] \succ_y \text{vlist}(M_1)[\ell]$  (见 (3.12)), 这就意味着存在  $\mu' \leq \mu-1$ , 使得  $y_{\mu'} = \text{vlist}(M)[\ell]$ ,  $y_\mu = \text{vlist}(M_1)[\ell]$ . 对  $\text{vlist}(M_1)$  中的  $y_\mu$ , 我们有  $\ell > \ell_{\mu-1}^{[\max]}$ . 因此  $y_{\mu'}$  在  $\text{vlist}(M)$  中的位置要在  $\ell_{\mu-1}^{[\max]}$  之后, 这对  $\mu' \leq \mu-1$  是不可能成立的, 于是 (3.15) 得证.

由 (3.14) 和 (3.15) 可得, 对任意的  $M \neq M_1$ , 都有

$$M_1(\beta_1, \dots, \beta_t) \succ_x M(\beta_1, \dots, \beta_t),$$

这在 [4, 29] 中没有给出证明, 我们在这里给出了仔细的分析, 并且在下文中会再次应用相关技巧. 同样, 我们注意到对所有的  $\{j_1, \dots, j_m\} = \{1, \dots, m-1, \tau\}$ ,  $\tau = m, m+1, \dots, t$ , (3.11) 中的项  $M_1$  一定在 (3.7) 中的乘积  $\prod_{1 \leq v < u \leq m} (y_{j_u} - y_{j_v})^2$  中出现, 因此当我们用  $x_1^{e_{j,1}} \cdots x_n^{e_{j,n}}$  替换  $\beta_j$  时, 有如下展开式:

$$F(\beta_1, \dots, \beta_t) = c_1 \cdots c_{m-1} \left( \sum_{\tau=m}^t c_\tau \right) M_1(\beta_1, \dots, \beta_t) + \text{关于 } x_1, \dots, x_n \text{ 的低次项.}$$

因此由 (3.8) 及  $c_j \neq 0$  可得:

$$\left( \sum_{\tau=m}^t c_\tau \right) \neq 0 \implies \det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2})) \neq 0 \quad (3.16)$$

(见 [29, 注释 4.2]). 于是, 两个相邻的求和  $\sum_{\tau=m}^t c_\tau$  和  $\sum_{\tau=m+1}^t c_\tau$  不能同时为零, 如若不然必有  $c_m = 0$ , 因此 (3.5) 式得证.

假设  $(\sum_{\tau=m}^t c_\tau) = 0$ ,  $2 \leq m \leq t$ , 我们考虑展开式 (3.7) 中在序  $\succ_y$  下的次高项, 即

$$M_2 = y_1^{2m-2} y_2^{2m-4} \cdots y_{m-2}^4 y_{m-1} y_m \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]. \quad (3.17)$$

该项含有变元  $y_1, \dots, y_m$ , 因此只出现在展开式中的一个乘积中, 即  $\prod_{1 \leq v < u \leq m} (y_{j_u} - y_{j_v})^2$ , 其中  $\{j_1, \dots, j_m\} = \{1, \dots, m\}$ , 其系数为 2. 因此  $M_2$  在 (3.7) 中的系数为  $-2c_1 \cdots c_m$ . 下面证明当  $(\sum_{\tau=m}^t c_\tau) = 0$  时,  $M_2(\beta_1, \dots, \beta_t) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  在 (3.8) 中的系数也为  $-2c_1 \cdots c_m$ .

由 (3.14), (3.7) 中所有满足  $M_2 \sqsupseteq_y M$  的项  $M \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_t]$  都有

$$M_2(\beta_1, \dots, \beta_t) \succ_x M(\beta_1, \dots, \beta_t),$$

因此这些项不会在展开式 (3.8) 中为  $M_2(\beta_1, \dots, \beta_t)$  的系数做贡献. 而余下的所有项即为满足  $M_2 \not\sqsupseteq_y M$  的项 (如  $M_1$ ). 考虑 (3.7) 中某个满足  $M_2 \not\sqsupseteq_y M$  的  $M$ , 那么由定义及式 (3.15), 对任意的  $\ell$ ,  $1 \leq \ell \leq D-1$ , 都有

$$\text{vlist}(M_2)[\ell] = \text{vlist}(M_1)[\ell] \succeq_y \text{vlist}(M)[\ell].$$

因此, 由  $M_2 \not\sqsupseteq_y M$  可得  $\text{vlist}(M)[D] = y_{m-1}$ , 因为  $D > \ell_{m-2}^{[\max]} \geq \ell_\mu^{[\max]}$ , 若  $\mu \leq m-2$ ,  $y_\mu$  的位置不可能达到第  $D$  个, 因此由 (3.13), 必有:

$$\text{vlist}(M)[D] \succ_y \text{vlist}(M_2)[D] = y_m.$$

最后, 我们说明, 对任意满足  $M_2 \not\sqsupseteq_y M$  的单项  $M$ , 在式 (3.7) 中的系数都为 0. 上段中证明了  $\text{vlist}(M)[D] = y_{m-1}$ . 我们断言,  $M$  只可能出现在乘积

$\prod_{1 \leq v < u \leq m} (y_{j_u} - y_{j_v})^2$  中, 其中  $\{j_1, \dots, j_m\} = \{1, \dots, m-1, \tau\}$ ,  $m \leq \tau \leq t$ . 如若不然, 假设  $\{j_1, \dots, j_m\}$  中含有两项  $\tau$  和  $\tau'$  满足  $m \leq \tau \leq t$ ,  $\tau < \tau' \leq t$ . 那么乘积  $\prod_{1 \leq v < u \leq m} (y_{j_u} - y_{j_v})^2$  中会存在因子  $(y_\tau - y_{\tau'})^2$ , 因此在这个乘积中,  $M$  中关于  $y_1, \dots, y_{m-1}$  的全次数小于  $m(m-1)$ , 这就说明变量  $y_{m-1}$  在  $\text{vlist}(M)$  中不可能到达第  $D$  个位置. 现在假设至少存在一个  $\tau$ ,  $m \leq \tau \leq t$  使得满足  $M_2 \not\subseteq_y M$  的单项式  $M$  出现在乘积:  $\prod_{1 \leq v < u \leq m} (y_{j_u} - y_{j_v})^2$ ,  $\{j_1, \dots, j_m\} = \{1, \dots, m-1, \tau\}$  中 (如若不然,  $M$  不会出现在 (3.7) 的展开式), 那么在有些  $M$  出现的满足  $m \leq \tau \leq t$  的乘积当中,  $M$  都有相同的系数, 记为  $a_M$  (令  $y_\tau = 0$  即可得到), 因此在  $(\sum_{\tau=m}^t c_\tau) = 0$  的假设下,  $M$  在展开式 (3.7) 中的系数为:

$$a_M c_1 \cdots c_{m-1} \left( \sum_{\tau=m}^t c_\tau \right) = 0.$$

在 (3.8) 中的项  $M_2(\beta_1, \dots, \beta_t)$  的系数只来源于 (3.7) 中的  $M_2$  (其他来源的系数均为 0). 因此, 它的系数为  $-2c_1 \cdots c_m$ , 当系数域的特征不等于 2 并且  $c_j \neq 0$  时, 这个系数不等于 0. 因此, 对任意的  $m, t$  满足  $2 \leq m \leq t$ , 都有

$$\left( \sum_{\tau=m}^t c_\tau \right) = 0 \implies \det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2})) \neq 0,$$

再由 (3.16), 定理 3.1 得证.  $\square$

当系数域特征不等于 2 时, 定理 3.1 给出了比 (3.4) 中更好的关于提前终止定理成功的概率分析, 即在  $2t+1$  个取值之后, 提前终止定理成功的概率至少为:

$$1 - (t^3 - t + 3) \deg(f) \frac{1}{3|S|}. \quad (3.18)$$

(3.18) 中给出的概率估计方法如下: 首先检验  $a_1 = f(\omega_1, \dots, \omega_n)$  是否为 0, 如果是, 那么  $f$  在较高概率下为零多项式 ( $t=0$ ); 如果不是, 计算  $a_0 = f(1, \dots, 1)$  和  $a_2 = f(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ , 并检验  $\det(H_2(a_0, a_1, a_2)) = 0$  是否为零. 这样做的目的是使我们的概率分析更完整, 即如果输入为零多项式, 则算法在得到  $\det(H_1(a_1)) = 0$  后就终止.

**注释 3.1.** 如果 (3.1) 中的一些指数  $e_{j,\nu}$  为负整数, 定理 3.1 依然成立, 此时  $f \in \mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]$  为关于  $x_1, \dots, x_n$  的 Laurent 多项式. 若  $0 \notin S$ , 概率分析 (3.18) 依然有效, 只需令

$$\deg(f) = \max_{1 \leq j \leq t} \left( \sum_{\nu=1}^n e_{j,\nu} \right) - \sum_{1 \leq \nu \leq n} \min_{1 \leq j \leq t} (e_{j,\nu}).$$



**注释 3.2.** 如果系数域  $K$  的特征等于 2,  $c_1 = \cdots = c_t = 1$  并且  $t - m$  为奇数, 那么

$$\prod_{1 \leq v < u \leq m} (\beta_{j_v} - \beta_{j_u})^2 = \prod_{1 \leq v < u \leq m} (\beta_{j_v}^2 - \beta_{j_u}^2). \quad (3.19)$$

事实上, 它可以看做由  $\beta_{j_1}^2, \dots, \beta_{j_m}^2$  生成的 *Vandermonde* 矩阵  $V$  的行列式. 那么展开式 (3.19) 中的每一项都由  $V$  中每列各取一个元素并相乘得到. 因此由 (3.7) 和 (3.8),  $\det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2}))$  中的每项有如下形式:  $M = \beta_{j_1}^{2m-2} \cdot \beta_{j_2}^{2m-4} \cdots \beta_{j_{m-1}}^2$ . 令  $S = \{1, \dots, t\} \setminus \{j_1, \dots, j_{m-1}\}$ , 由于  $S$  中含有偶数个元素,  $M$  的系数为  $c_{j_1} \cdots c_{j_{m-1}} \cdot \sum_{j_m \in S} c_{j_m} = 0$ . 因此,  $\det(H_m(\alpha_0, \dots, \alpha_{2m-2})) = 0$ .

### 3.3 算例

**例子 3.1.** [1] 令  $f = \sum_{j=1}^t c_j x^{e_j}$ , 其中  $t = 61$ ,  $c_j = 1$ ,  $j = 1, \dots, t$ ,

$$e_j = \begin{cases} 2(j-1) & j = 1, \dots, 41, \\ 63 + 2(j-42) & j = 42, \dots, 51, \\ 1 + 2(j-52) & j = 52, \dots, 61. \end{cases}$$

图 3.1 显示的是  $f$  中各项在  $\omega = e^{2\pi i/82}$  处取值时的情况. 我们注意到以下事实:

1. 当  $m$  大于 23 时, Hankel 矩阵的最小奇异值小于  $10^{-11}$ . 此例在 [1] 中用以说明 Hankel 矩阵的条件数可能呈指数型增长.
2. 当  $m$  从 37 增大到 41 的过程中,  $H_m$  的前 22 个奇异值全部大于 1, 并且其他的奇异值全部小于  $10^{-10}$ . 因此如果我们取  $\zeta \leq 5$ ,  $\epsilon = 10^{-10}$ , 由判定准则 (2.24), 算法 NSD 将会在错误的位置终止并返回  $t = 22$ . 但是, 如果我们继续增大  $m$  至  $m = 42$ , Hankel 矩阵  $H_{42}$  有 23 个大于 1 的奇异值, 此时不再满足判定准则 (2.24).
3. 在此例中, 我们可以得到:

$$\Delta(\omega^{e_1}, \dots, \omega^{e_t}) = \frac{1}{82}.$$

对任意的  $m \geq 76$ ,  $H_m$  的前 61 个奇异值全部大于 1, 并且剩余奇异值全部小于  $10^{-13}$ . 因此如果我们设定  $\zeta > 5$  或者  $\epsilon = 10^{-13}$ , 算法 NSD 将成功的返回  $t = 61$ .

4. 需要注意的是, 当  $1 \leq m \leq 41$  时, Vandermonde 矩阵  $V_m$  是良态的, 条件数在 1.41 附近. 当  $m$  达到 61,  $V_m$  的条件数增长到  $1.9 \times 10^9$ . 当  $m$  从 62 增长到 81,  $V_m$  的条件数下降到 1.976.

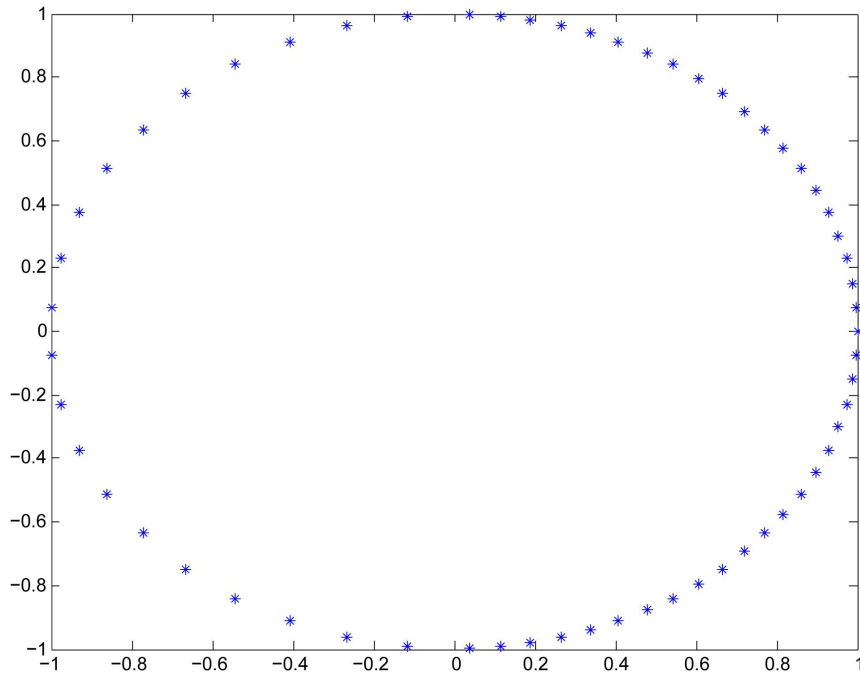


图 3.1: 例 3.1 中的项.

## 第四章 孤立重根的代数结构

从本章开始, 我们讨论孤立的简单重根的计算. 本章首先介绍孤立重根的基本代数结构, 即局部对偶空间. 其次对简单重根, 介绍了 [15, 30, 31] 中提出的计算其局部对偶空间的算法. 最后定义了 Jacobian 矩阵的标准型, 该标准型是第五章改进牛顿算法的重要组成部分, 并且可通过正交变换得到.

### 4.1 局部对偶空间

令  $\mathbf{d}_x^\alpha : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  表示如下微分泛函:

$$\mathbf{d}_x^\alpha(g) = \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x), \quad \forall g \in \mathbb{C}[X], \quad (4.1)$$

其中  $x \in \mathbb{C}^n$ ,  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{N}^n$ . 那么

$$\mathbf{d}_x^\alpha((X-x)^\beta) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4.2)$$

令  $I_f$  表示由多项式系统  $f = \{f_1, \dots, f_n\}$  生成的理想, 其中  $f_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ . 定义  $I_f$  在给定孤立重根  $x$  点处的局部对偶空间为  $\mathfrak{D}_x = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\mathbf{d}_x^\alpha\}$  的一个子空间  $\mathcal{D}_{f,x}$ , 使得

$$\mathcal{D}_{f,x} = \{\Lambda \in \mathfrak{D}_x \mid \Lambda(g) = 0, \forall g \in I_f\}. \quad (4.3)$$

如果下文中点  $x$  在文中定义明确, 我们将  $\mathbf{d}_x^\alpha$  简写成  $d_1^{\alpha_1} \cdots d_n^{\alpha_n}$ .

记  $\mathcal{D}_{f,x}^{(k)}$  表示  $\mathcal{D}_{f,x}$  中微分次数不超过  $k$  的微分泛函构成的子空间, 定义

1. 宽度  $\kappa = \dim(\mathcal{D}_{f,x}^{(1)} \setminus \mathcal{D}_{f,x}^{(0)})$ ,
2. 深度  $\rho = \min\left(\left\{k \mid \dim(\mathcal{D}_{f,x}^{(k+1)} \setminus \mathcal{D}_{f,x}^{(k)}) = 0\right\}\right)$ ,
3. 重数  $\mu = \dim(\mathcal{D}_{f,x}^{(\rho)})$ .

如果  $x$  是  $f$  的一个孤立重根, 那么  $1 \leq \kappa \leq n$  并且  $\rho < \mu < \infty$ .

下面引入反微分算子  $\Phi_\sigma : \mathfrak{D}_x \rightarrow \mathfrak{D}_x$ , 定义如下:

$$\Phi_\sigma(d_1^{\alpha_1} \cdots d_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} d_1^{\alpha_1} \cdots d_\sigma^{\alpha_\sigma - 1} \cdots d_n^{\alpha_n}, & \text{如果 } \alpha_\sigma > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

根据  $\mathcal{D}_{f,x}$  的封闭性, 通过计算矩阵的零空间可以求得局部对偶空间的一组基底: (具体参见 [32–35])

$$\forall \Lambda \in \mathcal{D}_{f,x}^{(k)}, \Phi_\sigma(\Lambda) \in \mathcal{D}_{f,x}^{(k-1)}, \sigma = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

## 4.2 简单重根

我们称  $x$  为  $f$  的简单重根, 如果它满足:  $f(x) = 0, \dim \ker Df(x) = 1$ . 在 [35] 中它也被称作宽度为 1 的奇异根, 因为

$$\dim(\mathcal{D}_{f,x}^{(k)} \setminus \mathcal{D}_{f,x}^{(k-1)}) = 1, k = 1 \dots, \rho, \rho = \mu - 1. \quad (4.5)$$

因此  $I_f$  在给定孤立简单重根  $x$  处的局部对偶空间可记为:

$$\mathcal{D}_{f,x} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{\mu-1}\},$$

其中  $\deg(\Lambda_k) = k$  并且  $\Lambda_0 = 1$ . 假设  $\Lambda_1 = a_{1,1}d_1 + \dots + a_{1,n}d_n$ , 不失一般性, 假设  $a_{1,1} = 1$ . 令  $\Psi_\sigma : \mathfrak{D}_x \rightarrow \mathfrak{D}_x$  为如下定义的分算子:

$$\Psi_\sigma(d_1^{\alpha_1} \dots d_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} d_\sigma^{\alpha_\sigma+1} \dots d_n^{\alpha_n}, & \text{如果 } \alpha_1 = \dots = \alpha_{\sigma-1} = 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

对  $k = 2, \dots, \mu - 1$ , 由局部对偶空间的封闭性可知:

$$\begin{cases} \Phi_1(\Lambda_k) = a_{1,1}\Lambda_{k-1} + \dots + a_{k-1,1}\Lambda_1 + a_{k,1}\Lambda_0, \\ \vdots \\ \Phi_n(\Lambda_k) = a_{1,n}\Lambda_{k-1} + \dots + a_{k-1,n}\Lambda_1 + a_{k,n}\Lambda_0. \end{cases} \quad (4.6)$$

令  $a_{1,1} = 1, a_{k,1} = 0 (k = 2, \dots, n)$ , 系统 (4.6) 有唯一解  $\Lambda_k = \Delta_k + a_{k,2}d_2 + \dots + a_{k,n}d_n$ , 其中

$$\Delta_k = \sum_{\sigma=1}^n \Psi_\sigma(a_{1,\sigma}\Lambda_{k-1} + \dots + a_{k-1,\sigma}\Lambda_1), \quad (4.7)$$

并且由  $\Lambda_k(f_i) = 0, i = 1, \dots, n$ , 可以通过求解以下线性方程组来求得  $a_{k,2}, \dots, a_{k,n}$ :

$$\begin{pmatrix} d_2(f_1) & \cdots & d_n(f_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_2(f_n) & \cdots & d_n(f_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta_k(f_1) \\ \vdots \\ \Delta_k(f_n) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

上述相关结论的证明可参见 [15, 30, 31].

下面的定义是 [5] 中简单二重根定义的推广.

**定义 4.1.** 令  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , 其中  $f_i \in \mathbb{C}[X]$  并假设  $f(x) = 0$ . 那么称  $x$  是  $f$  的简单  $\mu$  重根, 如果

$$(A) \dim \ker Df(x) = 1,$$

$$(B) \Delta_k(f) \in \text{im } Df(x), k = 2, \dots, \mu - 1,$$

$$(C) \Delta_\mu(f) \notin \text{im } Df(x).$$

事实上, 对  $\mu = 2$ , 假设  $\ker Df(x) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{v\}$ , 其中  $\|v\| = 1$ , 那么  $\Lambda_1(f) = Df(x) \cdot v = v_1 d_1(f) + \dots + v_n d_n(f)$  并且

$$\begin{aligned} \Delta_2(f) &= \sum_{\sigma=1}^n \Psi_\sigma(v_\sigma \Lambda_1)(f) \\ &= \sum_{\sigma=1}^n \Psi_\sigma(v_\sigma (v_1 d_1 + \dots + v_n d_n))(f) \\ &= \sum_{i>j} v_i v_j d_i d_j(f) + \sum v_i^2 d_i^2(f) \\ &= \frac{1}{2} D^2 f(x)(v, v). \end{aligned}$$

因此条件  $\Delta_2(f) \notin \text{im } Df(x)$  等价于 [5] 中给出的简单二重根的条件:  $D^2 f(x)(v, v) \notin \text{im } Df(x)$ .

对满足条件 (A),(B) and (C) 的简单重根  $x$ , 我们将 [5] 中定义的  $\gamma_2$  进行了推广:

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu(f, x) = \max(\hat{\gamma}_\mu, \gamma_{\mu,n}), \quad (4.9)$$

其中

$$\hat{\gamma}_\mu = \hat{\gamma}_\mu(f, x) = \max \left( 1, \sup_{k \geq 2} \left\| D\hat{f}(x)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} \right), \quad (4.10)$$

而

$$\gamma_{\mu,n} = \gamma_{\mu,n}(f, x) = \left( 1, \sup_{k \geq 2} \left\| \frac{1}{\Delta_\mu(f_n)} \cdot \frac{D^k f_n(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} \right), \quad (4.11)$$

其中  $D^k \hat{f}(x)$ ,  $k \geq 2$  表示  $\hat{f}$  关于变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的  $k$  阶偏微分在  $x$  点处的值.

### 4.3 标准型

接下来说明如何通过正交变换得到等价的多项式系统, 使得在给定简单重根处, 该系统的 Jacobian 矩阵具有标准型.

**定义 4.2.** 对多项式函数  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , 其中  $f_i \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , 称  $Df(x)$  具有标准型, 如果:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & D\hat{f}(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

其中  $D\hat{f}(x)$  为多项式组  $\hat{f} = \{f_1, \dots, f_{n-1}\}$  关于变量  $X_2, \dots, X_n$  的非奇异 *Jacobian* 矩阵.

记  $Df(x) = U \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^*$  为秩亏为 1 的  $Df(x)$  的奇异值分解, 其中  $U = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $V = (v_1, \dots, v_n)$  为正交矩阵,  $V^*$  是矩阵  $V$  的共轭转置,  $\Sigma_{n-1}$  为非奇异对角矩阵. 事实上, 我们总可以假设  $Df(x)$  具有标准型 (4.12), 否则, 令  $g = U^* \cdot f(W \cdot X)$ , 其中  $W = (v_n, v_1, \dots, v_{n-1})$  为正交矩阵. 假设  $x$  为  $f$  的简单  $\mu$  重根, 那么  $W^*x$  为  $g$  的简单  $\mu$  重根, 并且  $g$  在  $W^*x$  处的 *Jacobian* 矩阵具有标准型:

$$\begin{aligned} Dg(W^*x) &= U^* \cdot Df(x) \cdot W \\ &= U^* \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^* \cdot W \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注意到, 如果假设  $y$  也是  $f$  的根, 那么  $W^*y$  为  $g$  的另一根, 并且  $x$  和  $y$  之间的欧氏距离具有正交不变性:

$$\|W^*x - W^*y\| = \|W^*(x - y)\| = \|x - y\|.$$

如果  $x$  为  $f$  的简单  $\mu$  重根, 且  $Df(x)$  具有标准型 (4.12), 那么

$$\text{im } Df(x) = \text{im} \begin{pmatrix} D\hat{f}(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

并且

$$\Delta_k(f) \in \text{im } Df(x) \Leftrightarrow \Delta_k(f_n) = 0.$$

条件 (B)(C) 可以被简化为关于最后一个多项式  $f_n$  的条件:

$$(B) \Delta_k(f_n) = 0, k = 2, \dots, \mu - 1,$$

$$(C) \Delta_\mu(f_n) \neq 0.$$

用以求解  $a_{k,2}, \dots, a_{k,n}$  的线性系统 (4.8) 可以被简化为:

$$\begin{pmatrix} d_2(f_1) & \cdots & d_n(f_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_2(f_{n-1}) & \cdots & d_n(f_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta_k(f_1) \\ \vdots \\ \Delta_k(f_{n-1}) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

如果  $Df(x)$  具有标准型, 假设  $y$  为  $\mathbb{C}^n$  中另一点并且  $y \neq x$ , 定义

$$w = y - x = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

$\hat{f}(y)$  在  $x$  处的 Taylor 展开为:

$$\hat{f}(y) = D\hat{f}(x)\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1^2} \zeta^2 + \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \zeta \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial \hat{X}^2} \eta^2 + \sum_{k \geq 3} \frac{D^k \hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}.$$

$f_n(y)$  在  $x$  处的 Taylor 展开为:

$$\begin{aligned} f_n(y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1^2} \zeta^2 + \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \zeta \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial \hat{X}^2} \eta^2 + \cdots + \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu f_n(x)}{\partial X_1^\mu} \zeta^\mu \\ &+ \frac{1}{(\mu-1)!} \frac{\partial^\mu f_n(x)}{\partial X_1^{\mu-1} \partial \hat{X}} \zeta^{\mu-1} \eta + \cdots + \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu f_n(x)}{\partial \hat{X}^\mu} \eta^\mu + \sum_{k \geq \mu+1} \frac{D^k f_n(x)(y-x)^k}{k!}. \end{aligned}$$

其中  $f_n$  的 Taylor 展开中  $\zeta^i \eta^j$  的系数为  $\frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f_n(x)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^j}$ . 对单项  $\zeta^i \eta^j$  ( $i+j < \mu, j > 0$ ), 通过将  $\zeta^i \eta^j$  中的第一个  $\eta$  用以下表达式 (由  $\hat{f}(y)$  在  $x$  处的 Taylor 展开得到) 替换:

$$\begin{aligned} \eta &= -D\hat{f}(x)^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1^2} \zeta^2 + \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \zeta \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial \hat{X}^2} \eta^2 + \cdots \right. \\ &+ \sum_{0 \leq k \leq \mu+1-i-j} \frac{1}{(\mu+1-i-j-k)!k!} \frac{\partial^{\mu+1-i-j} \hat{f}(x)}{\partial X_1^{\mu+1-i-j-k} \partial \hat{X}^k} \zeta^{\mu+1-i-j-k} \eta^k \\ &\left. + \sum_{k \geq \mu+2-i-j} \frac{D^k \hat{f}(x)(y-x)^k}{k!} - \hat{f}(y) \right), \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \zeta^i \eta^j = & -D\hat{f}(x)^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1^2} \zeta^{i+2} \eta^{j-1} + \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \zeta^{i+1} \eta^j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial \hat{X}^2} \zeta^i \eta^{j+1} + \dots \right. \\ & + \sum_{0 \leq k \leq \mu+1-i-j} \frac{1}{(\mu+1-i-j-k)! k!} \frac{\partial^{\mu+1-i-j} \hat{f}(x)}{\partial X_1^{\mu+1-i-j-k} \partial \hat{X}^k} \zeta^{\mu+1-j-k} \eta^{k+j-1} \\ & \left. + \sum_{k+i+j-1 \geq \mu+1} \frac{D^k \hat{f}(x)(y-x)^k}{k!} \zeta^i \eta^{j-1} - \hat{f}(y) \zeta^i \eta^{j-1} \right), \end{aligned}$$

上式中每一项的全次数至少为  $i+j+1$ .

从  $i+j=2, j \geq 1$  起, 经过至多  $\mu-2$  次替换, 可以将  $f_n$  写成如下形式:

$$\begin{aligned} f_n(y) = & C_2 \zeta^2 + \dots + C_\mu \zeta^\mu + \sum_{i+j=\mu, j>0} C_{i,j} \zeta^i \eta^j + \sum_{k \geq \mu+1} \frac{D^k f_n(x)(y-x)^k}{k!} \quad (4.14) \\ & + \sum_{1 \leq i+j-1 \leq \mu-2} T_{i,j-1} \cdot \left( \sum_{k+i+j-1 \geq \mu+1} D\hat{f}(x)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(x)(y-x)^k}{k!} \zeta^i \eta^{j-1} \right) \\ & - \sum_{1 \leq i+j-1 \leq \mu-2} T_{i,j-1} D\hat{f}(x)^{-1} \hat{f}(y) \zeta^i \eta^{j-1}, \end{aligned}$$

其中  $C_2, \dots, C_\mu$  为常数.



## 第五章 改进的牛顿迭代

在本章中, 对简单二重根和简单三重根, 如果它们的 Jacobian 矩阵具有标准型 (4.12), 我们定义了改进的牛顿迭代, 并给出算法具有二次收敛性的定量分析. 对 Jacobian 矩阵不具有标准型的简单重根, 我们先进行正交变换, 再根据之前的工作 [15] 进行改进的牛顿迭代, 给出了其二次收敛性的非定量证明, 并在简单三重根情形给出了二次收敛的定量分析.

事实上, [15] 中算法 1 给出了计算简单重根的算法并证明了其二次收敛性, 但由于算法本身及证明过程较为复杂, 很难给出收敛半径的定量分析. [15] 中算法 1 首先求解正则化的最小二乘问题得到初始近似, 然后对近似点处的 Jacobian 矩阵进行奇异值分解得到迭代方向. 最后通过求解以下方程得到迭代步长.

$$\begin{pmatrix} \Delta_\mu(f_1) & d_2(f_1) & \cdots & d_n(f_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_\mu(f_n) & d_2(f_n) & \cdots & d_n(f_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mu,1} \\ a_{\mu,2} \\ \vdots \\ a_{\mu,n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Lambda_{\mu-1}(f_1) \\ \vdots \\ \Lambda_{\mu-1}(f_n) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

上述算法中对 Jacobian 矩阵进行奇异值分解本质上是对变元进行正交变换, 以使得局部对偶空间具有某种标准型. 而本文第四章中提出的标准型 (4.2) 实际上是在对变元进行正交变换的同时, 也对多项式系统进行正交变换. 该标准型也是本章结论的重要工具.

### 5.1 简单二重根的 $\gamma$ -理论

假设  $\xi$  为  $f$  的简单二重根,  $z$  为  $\xi$  的近似根,  $D\hat{f}(\xi)$  可逆且具有标准型 (4.2), 即

$$\frac{\partial f_i(\xi)}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial X_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \neq 0,$$

我们的目标是对  $z$  应用改进的牛顿算法并近似逼近  $\xi$ , 并在迭代  $k$  次之后对指定精度  $\epsilon$  达到  $\|N_f^k(z) - \xi\| < \epsilon$ .

**算法 1** 简单二重根的牛顿迭代算法**输入:** $f$ : 多项式系统; $z = (z_1, \hat{z})$ :  $f$  的一个近似简单二重根;**输出:** $N_f(z) = (N_2(z_1), N_1(\hat{z}))$ : 一次迭代之后的精化结果;

1:  $N_1(\hat{z}) \leftarrow \hat{z} - D\hat{f}(z)^{-1}\hat{f}(z)$ ;

2:  $\hat{y} \leftarrow N_1(\hat{z})$ ;

3:  $z \leftarrow (z_1, \hat{y})$ ;

4:  $N_2(z_1) \leftarrow z_1 - \left(\frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2}\right)^{-1} \frac{\partial f_n(z)}{\partial X_1}$ ;

**定义 5.1.** 假设  $\xi$  为  $f$  的简单二重根,  $z$  为其近似根, 令  $\gamma_2 = \gamma_2(f, \xi)$ ,  $u = \gamma_2^2 \|z - \xi\|$ , 我们定义如下有理函数:

$$\begin{aligned} b_{2,1}(u) &= \frac{(1-2u)^2 u}{[2(1-2u)^2 - 1](1-u)}, \\ b_{2,2}(u) &= \frac{u}{[2(1-2u)^2 - 1](1-u)}, \\ b_{2,3}(u) &= \frac{u(32u^6 - 144u^5 + 272u^4 - 288u^3 + 174u^2 - 52u + 5)}{(24u^3 - 36u^2 + 18u - 1)(-1+u)^3(8u^2 - 8u + 1)}, \\ b_{2,4}(u) &= \frac{(-1+2u)^3(-2+u)u}{(24u^3 - 36u^2 + 18u - 1)(-1+u)^3(8u^2 - 8u + 1)}. \end{aligned}$$

**定理 5.1.** 令  $\xi$  为  $f$  的简单二重根.

(1) 如果  $u < u_2 \approx 0.0418$ , 其中  $u_2$  为以下方程的最小正根:

$$2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2 = 1,$$

那么算法 1 的输出满足:

$$\|N_f(z) - \xi\| < \|z - \xi\|.$$

(2) 如果  $u < u'_2 \approx 0.0318$ , 其中  $u'_2$  为以下方程的最小正根:

$$2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2 = \frac{1}{4},$$

那么经过  $k$  次算法 1 中定义的改进牛顿迭代之后, 可得:

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|.$$

引理 5.1. 对  $u \leq u_2$ , 下面不等式成立:

$$\left\| D\hat{f}(z)^{-1}D\hat{f}(\xi) \right\| \leq \frac{(1-2u)^2}{2(1-2u)^2-1}. \quad (5.2)$$

证明.  $\hat{f}(z)$  和  $D\hat{f}(z)$  在  $\xi$  处的 Talyor 展开分别为:

$$\hat{f}(z) = D\hat{f}(\xi)(\hat{z} - \hat{\xi}) + \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{z} - \hat{\xi})^{k-i},$$

和

$$D\hat{f}(z) = D\hat{f}(\xi) + \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!(k-i-1)!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{z} - \hat{\xi})^{k-i-1}.$$

由于  $D\hat{f}(\xi)^{-1}$  存在, 那么

$$\begin{aligned} & D\hat{f}(\xi)^{-1}D\hat{f}(z) \\ &= I_{n-1} + D\hat{f}(\xi)^{-1} \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!(k-i-1)!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{z} - \hat{\xi})^{k-i-1} \\ &= I_{n-1} + B. \end{aligned}$$

因此可得,

$$\begin{aligned} \|B\| &= \left\| D\hat{f}(\xi)^{-1}D\hat{f}(z) - I_{n-1} \right\| \leq \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!(k-i-1)!} \hat{\gamma}_2^{k-1} \|z - \xi\|^{k-1} \\ &= \sum_{k \geq 2} k \cdot 2^{k-1} (\hat{\gamma}_2 \|z - \xi\|)^{k-1} \\ &\leq \frac{1}{(1 - 2\hat{\gamma}_2 \|z - \xi\|)^2} - 1 \\ &\leq \frac{1}{(1 - 2u)^2} - 1. \end{aligned}$$

当  $u < u_2$  时, 可验证  $\|B\| < 1$ , 那么

$$\left\| D\hat{f}(z)^{-1}D\hat{f}(\xi) \right\| = \left\| (I_{n-1} + B)^{-1} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|B\|^k \leq \frac{(1-2u)^2}{2(1-2u)^2-1}.$$

□

引理 5.2. 对  $u \leq u_2$ , 以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \left\| N_1(\hat{z}) - \hat{\xi} \right\| &\leq \frac{\hat{\gamma}_2 \|\hat{z} - \hat{\xi}\|^2}{[2(1-2u)^2-1](1-u)} + \frac{(1-2u)^2 \hat{\gamma}_2 |z_1 - \xi_1|^2}{[2(1-2u)^2-1](1-u)} \\ &\leq b_{2,1}(u) |z_1 - \xi_1| + b_{2,2}(u) \|\hat{z} - \hat{\xi}\|. \end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned}
& \left\| N_1(\hat{z}) - \hat{\xi} \right\| \\
&= \left\| \hat{z} - \hat{\xi} - D\hat{f}(z)^{-1}\hat{f}(z) \right\| \\
&= \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \left[ D\hat{f}(z)(\hat{z} - \hat{\xi}) - \hat{f}(z) \right] \right\| \\
&= \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \left[ D\hat{f}(\xi)(\hat{z} - \hat{\xi}) + \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k-i}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{z} - \hat{\xi})^{k-i} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - D\hat{f}(\xi)(\hat{z} - \hat{\xi}) - \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{z} - \hat{\xi})^{k-i} \right] \right\| \\
&\leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left\| D\hat{f}(\xi)^{-1} \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{k-i-1}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{z} - \hat{\xi})^{k-i} \right. \\
&\quad \left. - D\hat{f}(\xi)^{-1} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^k} (z_1 - \xi_1)^k \right\| \\
&\leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left( \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(k-i-1)k!}{i!(k-i)!} \hat{\gamma}_2^{k-1} \|z - \xi\|^{k-2} \|\hat{z} - \hat{\xi}\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \geq 2} \hat{\gamma}_2^{k-1} |z_1 - \xi_1|^k \right) \\
&\leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left( \sum_{k \geq 2} (k \cdot 2^{k-1} - 2^k + 1) \hat{\gamma}_2^{k-1} \|z - \xi\|^{k-2} \|\hat{z} - \hat{\xi}\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \geq 2} \hat{\gamma}_2^{k-1} \|z - \xi\|^{k-2} |z_1 - \xi_1|^2 \right) \\
&\leq \frac{(1-2u)^2}{2(1-2u)^2 - 1} \cdot \left( \frac{\hat{\gamma}_2}{(1-u)(1-2u)^2} \|\hat{z} - \hat{\xi}\|^2 + \frac{\hat{\gamma}_2}{1-u} |z_1 - \xi_1|^2 \right) \\
&\leq b_{2,1}(u) |z_1 - \xi_1| + b_{2,2}(u) \|\hat{z} - \hat{\xi}\|.
\end{aligned}$$

□

**注释 5.1.** 由算子  $N_1$  定义的牛顿迭代对任意重数, 且满足 *Jacobian* 矩阵具有标准型的简单重根都有效. 由引理 5.1 和引理 5.2 的证明可见, 如果我们令  $u = \gamma_\mu^\mu \|z - \xi\|$ , 那么两个引理的结论依旧成立.

令  $z = (z_1, \hat{y})$ , 其中  $\hat{y} = N_1(\hat{z})$ , 那么  $f_n(z)$  在  $\xi$  点处的 Taylor 展开如下:

$$f_n(z) = \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i}.$$

引理 5.3. 当  $u < u_2$  时, 下式成立

$$\left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right| \leq \frac{(2u-1)^3}{24u^3 - 36u^2 + 18u - 1}.$$

证明. 注意到,

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \\ &= 1 + \left( \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \sum_{k \geq 3} \sum_{i=2}^k \frac{1}{(i-2)!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-2} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \\ &= 1 + B, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} |B| &= \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} - 1 \right| \\ &\leq \sum_{k \geq 3} \sum_{i=2}^k \frac{k!}{(i-2)!(k-i)!} \gamma_{2,n}^{k-1} \|z - \xi\|^{k-2} \\ &= \sum_{k \geq 3} k(k-1) \cdot 2^{k-2} (\gamma_{2,n} \|z - \xi\|)^{k-3} \gamma_{2,n}^2 \|z - \xi\| \\ &\leq \frac{-16u^3 + 24u^2 - 12u}{(2u-1)^3}. \end{aligned}$$

当  $u < u_2$  时, 可验证  $|B| < 1$ , 那么

$$\left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right| = |(1+B)^{-1}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |B|^k \leq \frac{(2u-1)^3}{24u^3 - 36u^2 + 18u - 1}.$$

□

引理 5.4. 当  $u < u_2$  时, 以下不等式成立

$$|N_2(z_1) - \xi_1| \leq b_{2,3}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{2,4}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|.$$

证明. 对  $u < u_2$ ,

$$\begin{aligned} & |N_2(z_1) - \xi_1| \\ &= \left| z_1 - \xi_1 - \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial f_n(z)}{\partial X_1} \right| \\ &= \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \left[ \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} (z_1 - \xi_1) - \frac{\partial f_n(z)}{\partial X_1} \right] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \left[ \sum_{k \geq 2} \sum_{i=2}^k \frac{1}{(i-2)!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-1} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{k \geq 2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(i-1)!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-1} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \right] \right| \\
&\leq \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right| \cdot \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^k f(\xi)}{\partial X_1 \partial \hat{X}^{k-1}} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-1} \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \sum_{k \geq 3} \sum_{i=3}^k \frac{i-2}{(i-1)!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-1} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \right| \\
&\leq \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right| \cdot \left( \sum_{k \geq 3} \sum_{i=3}^k \frac{(i-2)k!}{(i-1)!(k-i)!} \gamma_{2,n}^{k-1} \|z - \xi\|^{k-2} |z_1 - \xi_1| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \geq 2} k \gamma_{2,n}^{k-1} \|z - \xi\|^{k-2} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \right) \\
&\leq \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right| \cdot \left( \sum_{k \geq 3} \sum_{i=3}^k \frac{(i-2)k!}{(i-1)!(k-i)!} (\gamma_{2,n}^2 \|z - \xi\|)^{k-2} |z_1 - \xi_1| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \geq 2} k (\gamma_{2,n}^2 \|z - \xi\|)^{k-2} \gamma_{2,n} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \right) \\
&\leq \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right| \\
&\quad \cdot \left( \sum_{k \geq 3} (k(k-3)2^{k-2} + k) u^{k-2} |z_1 - \xi_1| + \sum_{k \geq 2} k u^{k-2} \gamma_{2,n} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \right) \\
&\leq \left| \left( \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} \right| \cdot \left( \frac{u(4u-3)}{(u-1)^2(2u-1)^3} |z_1 - \xi_1| + \frac{(2-u)\gamma_{2,n}}{(u-1)^2} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \right).
\end{aligned}$$

那么由引理 5.2 和引理 5.3, 可得:

$$\begin{aligned}
&|N_2(z_1) - \xi_1| \\
&\leq \frac{u(32u^6 - 144u^5 + 272u^4 - 288u^3 + 174u^2 - 52u + 5)}{(24u^3 - 36u^2 + 18u - 1)(-1 + u)^3(8u^2 - 8u + 1)} |z_1 - \xi_1| \\
&\quad + \frac{(-1 + 2u)^3(-2 + u)u}{(24u^3 - 36u^2 + 18u - 1)(-1 + u)^3(8u^2 - 8u + 1)} \|\hat{z} - \hat{\xi}\|. \\
&= b_{2,3}(u) |z_1 - \xi_1| + b_{2,4}(u) \|\hat{z} - \hat{\xi}\|.
\end{aligned}$$

□

**证明.** 现在我们可以给出定理 5.1 的证明:

1. 对  $0 < u < u_2 \approx 0.0418$ , 可以验证

$$2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2 < 1, \quad 2b_{2,2}(u)^2 + 2b_{2,4}(u)^2 < 1.$$

因此可得,

$$\begin{aligned} \|N_f(z) - \xi\|^2 &\leq \|N_1(\hat{z}) - \hat{\xi}\|^2 + |N_2(z_1) - \xi_1|^2 \\ &\leq (b_{2,1}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{2,2}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|)^2 + (b_{2,3}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{2,4}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|)^2 \\ &\leq (2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2)|z_1 - \xi_1|^2 + (2b_{2,2}(u)^2 + 2b_{2,4}(u)^2)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|^2 \\ &< \|z - \xi\|^2. \end{aligned}$$

2. 对  $0 < u < u'_2 \approx 0.0318$ , 可以验证

$$2b_{2,2}(u)^2 + 2b_{2,4}(u)^2 < 2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2 < \frac{1}{4}.$$

因此可得:

$$\begin{aligned} \|N_f(z) - \xi\|^2 &\leq \|N_1(\hat{z}) - \hat{\xi}\|^2 + |N_2(z_1) - \xi_1|^2 \\ &\leq (b_{2,1}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{2,2}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|)^2 + (b_{2,3}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{2,4}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|)^2 \\ &\leq (2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2)|z_1 - \xi_1|^2 + (2b_{2,2}(u)^2 + 2b_{2,4}(u)^2)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|^2 \\ &\leq (2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2) \|z - \xi\|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \|z - \xi\|^2. \end{aligned}$$

因此以下结论在  $k = 1$  时成立:

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}} \|z - \xi\|.$$

对  $k \geq 2$ , 由归纳假设可得

$$\|N_f^{k-1}(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}-1} \|z - \xi\|.$$

令  $u^{(k-1)} = \gamma_2^2 \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|$ . 对  $0 < u < u'_2$ ,  $k \geq 2$ , 可得  $u^{(k-1)} < u = \gamma_2^2 \|z - \xi\|$  并且  $\frac{\sqrt{2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2} \gamma_2^2}{u}$  单调递增. 因此,

$$\begin{aligned} &\|N_f^k(z) - \xi\| \\ &= \|N_f(N_f^{k-1}(z)) - \xi\| \\ &< \frac{\sqrt{2b_{2,1}(u^{(k-1)})^2 + 2b_{2,3}(u^{(k-1)})^2} \gamma_2^2}{u^{(k-1)}} \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\sqrt{2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2}\gamma_2^2}{u} \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|^2 \\
&< \frac{\sqrt{2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{2,3}(u)^2}\gamma_2^2}{u} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-2} \|z - \xi\|^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|.
\end{aligned}$$

□

## 5.2 简单三重根的 $\gamma$ -理论

假设  $\xi$  为  $f$  的简单三重根,  $z$  为其近似根,  $D\hat{f}(\xi)$  可逆并且

$$\frac{\partial f_i(\xi)}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial X_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1^2} = 0,$$

但是

$$\Delta_3(f_n) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^3} - \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \cdot D\hat{f}(\xi)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^2} \neq 0.$$

我们的目标是对  $z$  应用改进的牛顿算法以近似逼近  $\xi$ , 并在迭代  $k$  次之后对指定精度  $\epsilon$  达到  $\|N_f^k(z) - \xi\| < \epsilon$ .

定义微分算子  $L_3$ ,

$$L_3(f_n)(z) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_n(z)}{\partial X_1^3} - \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \cdot D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2},$$

那么  $L_3(f_n)(\xi) = \Delta_3(f_n)$ . 因为  $\Delta_3(f_n) \neq 0$ , 并且  $z$  接近  $\xi$ , 我们可以假设  $L_3(f_n)(z) \neq 0$ . 我们定义如下的微分算子  $\Gamma_1$ :

$$\Gamma_1(f_n)(z) = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2} - \frac{\partial f_n(z)}{\partial \hat{X}} \cdot D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2}.$$

---

### 算法 2 简单三重根的牛顿迭代算法

---

输入:

$f$ : 多项式系统;

$z = (z_1, \hat{z})$ :  $f$  的近似简单三重根;

输出:

$N_f(z) = (N_2(z_1), N_1(\hat{z}))$ : 一次迭代之后的精化结果;

1:  $N_1(\hat{z}) \leftarrow \hat{z} - D\hat{f}(z)^{-1} \hat{f}(z)$ ;

2:  $\hat{y} \leftarrow N_1(\hat{z})$ ;

3:  $z \leftarrow (z_1, \hat{y})$ ;

4:  $N_2(z_1) \leftarrow z_1 - (L_3(f_n)(z))^{-1} \cdot \Gamma_1(f_n)(z)$ ;

---



**定义 5.2.** 对  $\xi$  的一个近似根  $z$ , 令  $u = \gamma_3^3 \|z - \xi\|$ . 定义如下的有理函数:

$$\begin{aligned} a_2(u) &= \frac{1}{[2(1-2u)^2 - 1](1-2u)}, \\ a_3(u) &= \frac{(2u-1)^4(8u^2 - 8u + 1)}{128u^6 - 384u^5 + 464u^4 - 320u^3 + 136u^2 - 30u + 1}, \\ b_{3,3}(u) &= \frac{-a_3(u)}{3(2u-1)^4(8u^2 - 8u + 1)^2(u-1)^4} \cdot (3072u^{12} - 25088u^{11} \\ &\quad + 92480u^{10} - 202336u^9 + 289640u^8 - 282020u^7 + 188614u^6 \\ &\quad - 85997u^5 + 26342u^4 - 5368u^3 + 702u^2 - 42u), \\ b_{3,4}(u) &= \frac{a_3(u)(16u^6 - 72u^5 + 130u^4 - 106u^3 + 42u^2 - 9u)}{3(8u^2 - 8u + 1)^2(u-1)^4(2u-1)}. \end{aligned}$$

**定理 5.2.** 令  $\xi$  为  $f$  的简单三重根.

(1) 如果  $u < u_3 \approx 0.0222$ , 其中  $u_3$  为以下方程的最小正根:

$$2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2 = 1,$$

那么算法 2 的输出满足:

$$\|N_f(z) - \xi\| < \|z - \xi\|.$$

(2) 如果  $u < u'_3 \approx 0.0154$ , 其中  $u'_3$  为以下方程的最小正根:

$$2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2 = \frac{1}{4},$$

那么经过  $k$  次迭代之后可得:

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k - 1} \|z - \xi\|.$$

由注释 5.1, 类似于引理 5.1 和引理 5.2, 对  $u \leq u_3 \approx 0.0222$ , 我们可以证明:

$$\|D\hat{f}(z)^{-1}D\hat{f}(\xi)\| \leq \frac{(1-2u)^2}{2(1-2u)^2 - 1},$$

以及

$$\|N_1(\hat{z}) - \hat{\xi}\| \leq b_{2,1}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{2,2}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|.$$

令  $z = (z_1, \hat{y})$ , 其中  $\hat{y} = N_1(\hat{z})$ , 则  $f_n(z)$  在  $\xi$  点处的 Taylor 展开为:

$$f_n(z) = \sum_{k \geq 2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i}.$$

引理 5.5. 当  $u < u_3$  时, 以下不等式成立

$$\left\| D\hat{f}(z)^{-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \right\| \leq a_2(u)\gamma_3.$$

证明. 当  $u < u_3$  时,

$$\left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \leq \frac{(1-2u)^2}{2(1-2u)^2-1}.$$

那么,

$$\begin{aligned} & \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \right\| \\ = & \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} \sum_{i=2}^k \frac{1}{(i-2)!(k-i)!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-2} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \right\| \\ = & \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) D\hat{f}(\xi)^{-1} \right. \\ & \left. \cdot \frac{1}{2} \sum_{k \geq 2} \sum_{i=2}^k \frac{1}{(i-2)!(k-i)!} \frac{\partial^k \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-2} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \right\| \\ \leq & \frac{1}{2} \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left( \sum_{k \geq 2} \sum_{i=2}^k \frac{k!}{(i-2)!(k-i)!} \hat{\gamma}_3^{k-1} \|z - \xi\|^{k-2} \right) \\ = & \frac{1}{2} \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left( \sum_{k \geq 2} k(k-1)(2\hat{\gamma}_3 \|z - \xi\|)^{k-2} \hat{\gamma}_3 \right) \\ \leq & \frac{(1-2u)^2}{2(1-2u)^2-1} \cdot \frac{1}{(1-2u)^3} \gamma_3 \\ = & a_2(u)\gamma_3. \end{aligned}$$

□

引理 5.6. 当  $u < u_3$  时, 以下不等式成立:

$$\left\| L_3(f_n)(z)^{-1} \Delta_3(f_n) \right\| \leq a_3(u).$$

证明. 由  $f_n$  在  $\xi$  处的 Taylor 展开可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_n(z)}{\partial X_1^3} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^3} + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=3}^k \frac{1}{(i-3)!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-3} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i}, \\ \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} &= \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} + \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}} (z_1 - \xi_1) + \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1 \partial \hat{X}^2} (\hat{y} - \hat{\xi}) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k \geq 4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(i-1)!(k-i-1)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-1} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i-1}.$$

那么,

$$\begin{aligned} & \Delta_3(f_n)^{-1} L_3(f_n)(z) \\ &= 1 + \Delta_3(f_n)^{-1} [L_3(f_n)(z) - \Delta_3(f_n)] \\ &= 1 + B, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \|B\| &= \left\| L_3(f_n)(\xi)^{-1} \cdot D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \cdot \left[ \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}} (z_1 - \xi_1) + \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1 \partial \hat{X}^2} (\hat{y} - \hat{\xi}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{k \geq 4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{(i-1)!(k-i-1)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-1} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i-1} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=3}^k \frac{1}{(i-3)!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-3} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \right\|. \end{aligned}$$

由引理 5.5 可得

$$\begin{aligned} \|B\| &\leq 12a_2(u) \cdot \gamma_3^3 \cdot \|z - \xi\| + a_2(u) \sum_{k \geq 4} \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-2}{i-1} k(k-1) \cdot \gamma_3^k \|z - \xi\|^{k-2} \\ & \quad + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=3}^{k-1} \binom{k-3}{i-3} (k-1)(k-2)(k-3) \cdot \gamma_3^{k-1} \|z - \xi\|^{k-3} \\ &\leq 12a_2(u) \cdot \gamma_3^3 \cdot \|z - \xi\| + a_2(u) \sum_{k \geq 4} 2^{k-2} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (\gamma_3^2)^{k-2} \|z - \xi\|^{k-2} \\ & \quad + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} 2^{k-3} \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot (\gamma_3^3)^{k-3} \|z - \xi\|^{k-3} \\ &\leq a_2(u) \left( 12u + \sum_{k \geq 4} k(k-1)2^{k-2}u^{k-2} \right) + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} (k-1)(k-2)(k-3)2^{k-3}u^{k-3} \\ &= \frac{2u(16u^2 - 20u + 7)}{(2u-1)^4(8u^2 - 8u + 1)}. \end{aligned}$$

当  $u < u_3$  时, 可验证  $\|B\| < 1$ , 因此

$$\|L_3(f_n)(z)^{-1} \Delta_3(f_n)\| \leq \|(1+B)^{-1}\| \leq a_3(u).$$

□

**引理 5.7.** 当  $u < u_3$  时, 以下不等式成立:

$$|N_2(z_1) - \xi_1| \leq b_{3,3}(u)(u)|z_1 - \xi_1| + b_{3,4}(u)(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|.$$

证明. 当  $u < u_3$  时,

$$\begin{aligned} |N_2(z_1) - \xi_1| &= |z_1 - \xi_1 - [L_3(f_n)(z)]^{-1} \Gamma_1(f_n)(z)| \\ &= |L_3(f_n)(z)^{-1} [L_3(f_n)(z)(z_1 - \xi_1) - \Gamma_1(f_n)(z)]| \\ &= |L_3(f_n)(z)^{-1} \Delta_3(f_n)| \cdot |\Delta_3(f_n)^{-1} [L_3(f_n)(z)(z_1 - \xi_1) - \Gamma_1(f_n)(z)]|. \end{aligned}$$

由  $\frac{\partial^3 f_n(z)}{\partial X_1^3}, \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}, \frac{\partial f_n(z)}{\partial \hat{X}}$  在  $\xi$  点处的 Taylor 展开可得:

$$\begin{aligned} &L_3(f_n)(z)(z_1 - \xi_1) - \Gamma_1(f_n)(z) \\ &= -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}} (\hat{y} - \hat{\xi}) - \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \frac{1}{(k-2)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}^{k-2}} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-2} \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=3}^k \frac{i-3}{(i-2)!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-2} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \\ &\quad - D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}} (z_1 - \xi_1)^2 - \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial \hat{X}^2} (\hat{y} - \hat{\xi}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial \hat{X}^3} (\hat{y} - \hat{\xi})^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \geq 4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i-1}{i!(k-i-1)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i-1} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k \geq 4} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial \hat{X}^k} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-1} \right]. \end{aligned}$$

那么,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{|\Delta_3(f_n)|} \cdot \left( -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}} \right) (\hat{y} - \hat{\xi}) \right\| + \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \right\| \cdot \left\| \frac{1}{|\Delta_3(f_n)|} \cdot \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial \hat{X}^2} (\hat{y} - \hat{\xi}) \right\| \\ &\leq \gamma_3^2 \cdot \|(\hat{y} - \hat{\xi})\| + 2a_2(u) \gamma_3^2 \cdot \|(\hat{y} - \hat{\xi})\| \\ &\leq (1 + 2a_2(u)) \|D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi)\| \cdot \left( \sum_{k \geq 2} \gamma_3^{k+1} \|z - \xi\|^{k-1} |z_1 - \xi_1| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \geq 2} (k \cdot 2^{k-1} - 2^k + 1) \gamma_3^{k+1} \|z - \xi\|^{k-1} \|\hat{z} - \hat{\xi}\| \right) \\ &\leq (1 + 2a_2(u)) \|D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi)\| \cdot \left( \sum_{k \geq 2} (\gamma_3^3 \|z - \xi\|)^{k-1} |z_1 - \xi_1| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \geq 2} (k \cdot 2^{k-1} - 2^k + 1) (\gamma_3^3 \|z - \xi\|)^{k-1} \|\hat{z} - \hat{\xi}\| \right) \\ &\leq \frac{u(2u-1)^2(1+2a_2(u))}{(8u^2-8u+1)(1-u)} |z_1 - \xi_1| + \frac{u(1+2a_2(u))}{(8u^2-8u+1)(1-u)} \|\hat{z} - \hat{\xi}\|. \end{aligned}$$

并且,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\Delta_3(f_n)|} \cdot \left\| \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=3}^k \frac{i-3}{(i-2)!(k-i)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^{i-2} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i} \right\| \\
& \leq \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=3}^k \frac{k! \cdot (i-3)}{(i-2)!(k-i)!} \gamma_3^{k-1} \|z - \xi\|^{k-3} \cdot |z_1 - \xi_1| \\
& \leq \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=3}^k \binom{k-3}{i-3} \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \gamma_3^{3k-9} \cdot \|z - \xi\|^{k-3} \cdot |z_1 - \xi_1| \\
& \leq \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot 2^{k-3} \cdot (\gamma_3^3 \|z - \xi\|)^{k-3} |z_1 - \xi_1| \\
& \leq \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot 2^{k-3} \cdot u^{k-3} |z_1 - \xi_1| \\
& = \frac{-8u(2u^3 - 4u^2 + 3u - 1)}{(2u-1)^4} |z_1 - \xi_1|.
\end{aligned}$$

另外,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\Delta_3(f_n)|} \cdot \left\| \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \frac{1}{(k-2)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}^{k-2}} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-2} \right\| \\
& \leq \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} k(k-1) \gamma_3^{k-1} \|z - \xi\|^{k-3} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \\
& \leq \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} k(k-1) (\gamma_3^3 \|z - \xi\|)^{k-3} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \\
& \leq \frac{-u(3u^2 - 8u + 6)}{3(u-1)^3} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \\
& \leq \frac{(2u-1)^2 u^2 (3u^2 - 8u + 6)}{3(8u^2 - 8u + 1)(u-1)^4} |z_1 - \xi_1| + \frac{u^2(3u^2 - 8u + 6)}{3(8u^2 - 8u + 1)(u-1)^4} \|\hat{z} - \hat{\xi}\|
\end{aligned}$$

由引理 5.5 可得,

$$\begin{aligned}
& \frac{\left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \right\|}{|\Delta_3(f_n)|} \left\| \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}} (z_1 - \xi_1)^2 \right\| \leq 3a_2(u) \gamma_3^3 \|z - \xi\| |z_1 - \xi_1| \\
& \leq 3a_2(u) u |z_1 - \xi_1|.
\end{aligned}$$

由引理 5.5 可得,

$$\begin{aligned}
& \frac{\left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \right\|}{|\Delta_3(f_n)|} \left\| \frac{1}{2} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial \hat{X}^3} (\hat{y} - \hat{\xi})^2 \right\| \\
& \leq 3a_2(u) \gamma_3^3 \|z - \xi\| \|\hat{y} - \hat{\xi}\|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{3a_2(u)u^2}{[2(1-2u)^2-1](1-u)} \|\hat{z} - \hat{\xi}\| + \frac{3a_2(u)u^2(1-2u)^2}{[2(1-2u)^2-1](1-u)} |z_1 - \xi_1|.$$

我们注意到,

$$\begin{aligned} & \frac{\left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \right\|}{|\Delta_3(f_n)|} \cdot \left\| \sum_{k \geq 4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i-1}{i!(k-i-1)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (z_1 - \xi_1)^i (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-i-1} \right\| \\ & \leq a_2(u) \sum_{k \geq 4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k! \cdot (i-1)}{i!(k-i-1)!} \gamma_3^k \|z - \xi\|^{k-2} \cdot |z_1 - \xi_1| \\ & \leq a_2(u) \sum_{k \geq 4} (k-1) \cdot (k-3) \cdot 2^k \cdot u^{k-2} |z_1 - \xi_1| \\ & \leq \frac{16u^2(2u-3)a_2(u)}{(u-1)^3} |z_1 - \xi_1|. \end{aligned}$$

由引理 5.5 可得

$$\begin{aligned} & \frac{\left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \right\|}{|\Delta_3(f_n)|} \cdot \left\| \sum_{k \geq 4} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^k f_n(\xi)}{\partial \hat{X}^k} (\hat{y} - \hat{\xi})^{k-1} \right\| \\ & \leq a_2(u) \sum_{k \geq 4} k \gamma_3^k \|z - \xi\|^{k-2} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \\ & \leq \frac{-u^2(3u-4)a_2(u)}{(u-1)^2} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \\ & \leq \frac{(2u-1)^2 u^3 (3u-4)a_2(u)}{(8u^2-8u+1)(u-1)^3} |z_1 - \xi_1| + \frac{u^3(3u-4)a_2(u)}{(8u^2-8u+1)(u-1)^3} \|\hat{z} - \hat{\xi}\|. \end{aligned}$$

最后, 由引理 5.6 及以上估计可得,

$$\begin{aligned} & |N_2(z_1) - \xi_1| \\ & \leq a_3(u) \cdot \left( \left( \frac{u(2u-1)^2(1+2a_2(u))}{(8u^2-8u+1)(1-u)} + \frac{16u^2(2u-3)a_2(u)}{(u-1)^3} \right. \right. \\ & \quad + \frac{-8u(2u^3-4u^2+3u-1)}{(2u-1)^4} + \frac{3u^2(1-2u)^2 a_2(u)}{[2(1-2u)^2-1](1-u)} + 3ua_2(u) + \\ & \quad \left. \left. \frac{(2u-1)^2 u^2 (3u^2-8u+6)}{3(8u^2-8u+1)(u-1)^4} + \frac{(2u-1)^2 u^3 (3u-4)a_2(u)}{(8u^2-8u+1)(u-1)^3} \right) \cdot |z_1 - \xi_1| \right. \\ & \quad + \left( \frac{u(1+2a_2(u))}{(8u^2-8u+1)(1-u)} + \frac{3u^2 a_2(u)}{[2(1-2u)^2-1](1-u)} + \right. \\ & \quad \left. \frac{u^2(3u^2-8u+6)}{3(8u^2-8u+1)(u-1)^4} + \frac{u^3(3u-4)a_2(u)}{(8u^2-8u+1)(u-1)^3} \right) \cdot \|\hat{z} - \hat{\xi}\| \Big) \\ & = b_{3,3}(u) |z_1 - \xi_1| + b_{3,4}(u) \|\hat{z} - \hat{\xi}\|. \end{aligned}$$

□

**证明.** 现在我们可以给出定理 5.2 的证明.

(1) 对  $u < u_3 \approx 0.0222$ , 可以验证:

$$2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2 < 1, \quad 2b_{2,2}(u)^2 + 2b_{3,4}(u)^2 < 1.$$

因此可得:

$$\begin{aligned} & \|N_f(z) - \xi\|^2 \\ & \leq \left\| N_1(\hat{z}) - \hat{\xi} \right\|^2 + |N_2(z_1) - \xi_1|^2 \\ & \leq (b_{2,1}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{2,2}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|)^2 + (b_{3,3}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{3,4}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|)^2 \\ & \leq (2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2)|z_1 - \xi_1|^2 + (2b_{2,2}(u)^2 + 2b_{3,4}(u)^2)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|^2 \\ & < \|z - \xi\|^2. \end{aligned}$$

(2) 对  $u < u'_3 \approx 0.0154$ , 可以验证:

$$2b_{2,2}(u)^2 + 2b_{3,4}(u)^2 < 2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2 < \frac{1}{4}.$$

因此可得:

$$\begin{aligned} \|N_f(z) - \xi\|^2 & \leq \left\| N_1(\hat{z}) - \hat{\xi} \right\|^2 + |N_2(z_1) - \xi_1|^2 \\ & \leq (b_{2,1}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{2,2}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|)^2 + (b_{3,3}(u)|z_1 - \xi_1| + b_{3,4}(u)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|)^2 \\ & \leq (2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2)|z_1 - \xi_1|^2 + (2b_{2,2}(u)^2 + 2b_{3,4}(u)^2)\|\hat{z} - \hat{\xi}\|^2 \\ & \leq (2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2) \|z - \xi\|^2 \\ & \leq \frac{1}{4} \|z - \xi\|^2. \end{aligned}$$

因此以下不等式在  $k = 1$  时成立:

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|.$$

对  $k \geq 2$ , 我们采用归纳法证明, 假设

$$\|N_f^{k-1}(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}-1} \|z - \xi\|.$$

令  $u^{(k-1)} = \gamma_3^3 \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|$ . 对  $0 < u < u'_3$ , 都有  $u^{(k-1)} < u = \gamma_3^3 \|z - \xi\|$  并且  $\frac{\sqrt{2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2} \gamma_3^3}{u}$  单调递增. 因此,

$$\|N_f^k(z) - \xi\|$$

$$\begin{aligned}
&= \|N_f(N_f^{k-1}(z)) - \xi\| \\
&< \frac{\sqrt{2b_{2,1}(u^{(k-1)})^2 + 2b_{3,3}(u^{(k-1)})^2}\gamma_3^3}{u^{(k-1)}} \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|^2 \\
&< \frac{\sqrt{2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2}\gamma_3^3}{u} \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|^2 \\
&< \frac{\sqrt{2b_{2,1}(u)^2 + 2b_{3,3}(u)^2}\gamma_3^3}{u} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-2}} \|z - \xi\|^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|.
\end{aligned}$$

□

**注释 5.2.** 算法 2 中的  $\Gamma_1(f_n)(z)$  不能用类似 [15, 算法 1] 中的  $\Lambda_2(f_n)$  替代, 否则算法不收敛. 比如:  $(0, 0)$  为多项式系统:  $\{-x^2 + xy + y = 0, -x^3 - x^2y + xy^2 + 2xy = 0\}$  的简单 3 重根, 如果将算法 2 中的  $\Gamma_1(f_2)(z)$  替换成  $\Lambda_2(f_2)$ , 那么以任何近似根为初始点的迭代均不收敛.

### 5.3 简单多重根

对  $f$  的简单二重根和简单三重根, 我们根据在近似点处计算得到的一阶, 二阶和三阶微分算子, 构造了改进的牛顿迭代算法, 并定量证明了其二次收敛性. 虽然在算法 1, 2 中定义的改进牛顿迭代可以推广到任意重数的简单重根情形, 但是我们只证明了这种迭代对在精确点处的 Jacobian 矩阵具有标准型 (4.12) 的系统有效, 因此在应用中有其局限性.

对 Jacobian 矩阵不具有标准型 (4.12) 的简单重根, 在算法 3 中, 我们首先对变量和多项式系统都进行正交变换, 该正交变换由近似根构造, 然后我们根据之前的工作 [15] 可定义改进的牛顿迭代. 我们首先定性证明了对任意重的简单重根, 该算法具有二次收敛性, 并且在简单三重根情形给出了具体的定量收敛性分析.



**算法 3** 简单多重根的改进牛顿迭代算法**输入:** $f$ : 多项式系统; $z$ : 近似简单重根; $\mu$ : 重数;**输出:** $N_f(z)$ : 一次迭代之后的精化结果;

$$1: Df(z) = U \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot V^*, W_{\dagger} = (v_n, v_1, \dots, v_{n-1});$$

$$2: f(X) \leftarrow U^* \cdot f(W_{\dagger} \cdot X), \quad z \leftarrow W_{\dagger}^* z;$$

$$3: N_1(\hat{f}, \hat{z}) \leftarrow \hat{z} - D\hat{f}(z)^{-1}\hat{f}(z), \quad y = (y_1, \hat{y}) \leftarrow (z_1, N_1(\hat{f}, \hat{z}));$$

$$4: Df(y) = U \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot V^*, W_{\dagger} = (v_n, v_1, \dots, v_{n-1});$$

$$5: g(X) \leftarrow U^* \cdot f(W_{\dagger} \cdot X), \quad w = (w_1, \hat{w}) \leftarrow W_{\dagger}^* y;$$

$$6: N_2(g_n, w) \leftarrow w_1 - \frac{1}{\mu} \Delta_{\mu}(g_n)^{-1} \Delta_{\mu-1}(g_n), \quad x = (x_1, \hat{x}) \leftarrow (N_2(g_n, w), \hat{w});$$

$$7: N_f(z) \leftarrow W_{\dagger} \cdot W_{\dagger}^* \cdot x.$$

**定理 5.3.** 假设  $\xi$  为多项式系统  $f$  的简单  $\mu$  重根, 而  $z$  为其近似根, 即  $f(\xi) = 0$ ,  $\dim \ker Df(\xi) = 1$ . 假设

$$\hat{\gamma}_{\mu}(f, z) \|z - \xi\| < \frac{1}{2},$$

其中

$$\hat{\gamma}_{\mu}(f, z) = \max \left\{ 1, \sup_{k \geq 2} \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(z)}{k!} \right\|^{k-1} \right\},$$

那么算法 3 返回的精化结果  $N_f(z)$  满足:

$$\|N_f(z) - \xi\| = O(\|z - \xi\|^2). \quad (5.3)$$

接下来, 对算法 3 中的前 5 步, 我们给出定量的收敛性分析, 对第 6 步, 我们只给出非定量的收敛性分析, 但是在简单三重根情形给出定量分析, 该定量分析可以推广到任意重数的情形.

在算法 3 中的第二步, 根据 Jacobian 矩阵  $Df(z)$  奇异值分解的结果, 我们对变量和方程都进行正交变换. 由于  $\hat{\gamma}_{\mu}(f, z)$  以及  $\xi$  和  $z$  之间的欧氏距离在正交变换下保持不变, 在接下来的证明中, 为了书写简便, 我们对  $f, \xi, z$  使用同样的记号.

$$\xi \leftarrow W_{\dagger}^* \xi, \quad z \leftarrow W_{\dagger}^* z, \quad f(X) \leftarrow U^* \cdot f(W_{\dagger} \cdot X). \quad (5.4)$$

**命题 5.1.** 经过算法 3 中的前两步之后, 我们有

$$Df(z) = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_{n-1} \\ \sigma_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

其中  $\Sigma_{n-1}$  为非奇异对角矩阵. 并且  $\sigma_n \leq L\|z - \xi\|$ , 其中  $L$  为函数  $Df(X)$  的 Lipschitz 常数.

**证明.** 由链式法则可得:

$$\begin{aligned} Df(z) &= U^* \cdot U \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot V^* \cdot W_{\dagger} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_{n-1} \\ \sigma_n & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

进一步, 由于  $\dim \ker Df(\xi) = 1$ , 如下关于奇异值的扰动定理可以在 [22, 36] 中找到,

$$\sigma_n \leq \|Df(z) - Df(\xi)\| \leq L\|z - \xi\|.$$

□

**命题 5.2.** 在进行了算法 3 中的前三步之后, 假设  $\hat{\gamma}_\mu(f, z)\|z - \xi\| < \frac{1}{2}$ , 那么

$$\|\hat{y} - \hat{\xi}\| \leq \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_\mu(f, z)\|\xi - z\|} \hat{\gamma}_\mu(f, z)\|\xi - z\|^2, \quad (5.6)$$

并且

$$\|\hat{f}(y)\| \leq \frac{4\|D\hat{f}(z)\|}{1 - 2\hat{\gamma}_\mu(f, z)\|\xi - z\|} \hat{\gamma}_\mu(f, z)\|\xi - z\|^2, \quad (5.7)$$

其中

$$y = (y_1, \hat{y}) \leftarrow (z_1, N_1(\hat{f}, \hat{z})). \quad (5.8)$$

**证明.** 由命题 5.1,  $\frac{\partial f(z)}{\partial X_1} = 0$  并且  $D\hat{f}(z) = \Sigma_{n-1}$  为可逆对角矩阵. 因此由  $\hat{f}$  在  $z$  处的 Taylor 展开可得:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{f}(\xi) = \hat{f}(z) + D\hat{f}(z)(\hat{\xi} - \hat{z}) + \sum_{k \geq 2} \frac{D^k \hat{f}(z)}{k!} (\xi - z)^k, \\ 0 &= D\hat{f}(z)^{-1} \hat{f}(z) + \hat{\xi} - \hat{z} + \sum_{k \geq 2} D\hat{f}(z)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(z)}{k!} (\xi - z)^k. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\|N_1(\hat{f}, z) - \hat{\xi}\| &\leq \sum_{k \geq 2} \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(z)}{k!} \right\| \|\xi - z\|^k \\
&\leq \sum_{k \geq 2} \hat{\gamma}_\mu(f, z)^{k-1} \|\xi - z\|^k \\
&\leq \hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\|^2 \sum_{k \geq 2} \hat{\gamma}_\mu(f, z)^{k-2} \|\xi - z\|^{k-2} \\
&\leq \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\|} \hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\|^2.
\end{aligned}$$

进一步,

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}(y)\| &= \left\| \hat{f}(z) + D\hat{f}(z)(\hat{y} - \hat{z}) + \sum_{k \geq 2} \frac{D^k \hat{f}(z)}{k!} (y - z)^k \right\| \\
&\leq \|D\hat{f}(z)\| \sum_{k \geq 2} \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(z)}{k!} \right\| \|y - z\|^k \\
&\leq \|D\hat{f}(z)\| \sum_{k \geq 2} \hat{\gamma}_\mu(f, z)^{k-1} \|y - z\|^k \\
&\leq \|D\hat{f}(z)\| \hat{\gamma}_\mu(f, z) \|y - z\|^2 \sum_{k \geq 2} \hat{\gamma}_\mu(f, z)^{k-2} \|y - z\|^{k-2} \\
&\leq \frac{4\|D\hat{f}(z)\|}{1 - 2\hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\|} \hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\|^2,
\end{aligned}$$

其中

$$\|y - z\| = \|\hat{y} - \hat{z}\| \leq \|\hat{y} - \hat{\xi}\| + \|\hat{z} - \hat{\xi}\| \leq \frac{\hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\|}{1 - \hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\|} \|\xi - z\| + \|\xi - z\| \leq 2\|\xi - z\|,$$

并且

$$\hat{\gamma}_\mu(f, z) \|y - z\| \leq 2\hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\| < 1.$$

□

令  $(\text{span}_{\mathbb{C}}\{v_n(z)\}, \text{span}_{\mathbb{C}}\{u_n(z)\})$  为  $Df(z)$  属于其最小奇异值  $\sigma_n$  的一对奇异子空间, 且  $\delta = \sigma_{n-1} - \sigma_n = O(1)$ . 如果

$$\|Df(y) - Df(z)\|_F \leq \frac{\delta}{5}, \quad (5.9)$$

(可以要求该条件满足, 因为  $y$  接近  $z$  并且  $\delta = O(1)$ ), 那么根据 [22, 定理 8.6.5] 或者 [37, 定理 6.4], 可得

$$\|v_n(y) - v_n(z)\|_F \leq 4 \frac{\|Df(y) - Df(z)\|_F}{\delta} \leq 4 \frac{L\|y - z\|}{\delta} \leq 8 \frac{L\|\xi - z\|}{\delta}, \quad (5.10)$$

并且

$$\|u_n(y) - u_n(z)\|_F \leq 4 \frac{\|Df(y) - Df(z)\|_F}{\delta} \leq 4 \frac{L\|y - z\|}{\delta} \leq 8 \frac{L\|\xi - z\|}{\delta}, \quad (5.11)$$

其中  $(\text{span}_{\mathbb{C}}\{v_n(y)\}, \text{span}_{\mathbb{C}}\{u_n(y)\})$  为  $Df(y)$  属于其最小奇异值的一对奇异子空间.

在接下来的证明中, 为简单起见, 我们总是假设 (5.9) 成立, 并记

$$L \leftarrow \frac{8L}{\delta}.$$

由 (5.5) 可知,  $v_n(z) = (1, 0, \dots, 0)^T$  和  $u_n(z) = (0, \dots, 0, 1)$  构成属于  $Df(z)$  的最小奇异值  $\sigma_n$  的特征子空间对.

令

$$W_{\ddagger} = (v_n(y), v_1(y), \dots, v_{n-1}(y)) = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{pmatrix},$$

且  $v_n(y) = (W_1, W_3)^T$ , 由 (5.10) 可得

$$\|W_1\| \geq 1 - L\|\xi - z\|, \quad \|W_3\| \leq L\|\xi - z\|. \quad (5.12)$$

由于  $W_{\ddagger}$  为正交矩阵, 因此

$$\|W_2\| \leq L\|\xi - z\|, \quad \|W_4\| \leq \|W_{\ddagger}\| = 1. \quad (5.13)$$

令  $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$  且  $u_n(y) = (U_3, U_4)$ , 由 (5.10) 可得

$$\|U_3^*\| \leq L\|\xi - z\|. \quad (5.14)$$

注意到算法 3 中第 4, 5 步的作用是在对  $\hat{z}$  运行一次牛顿迭代之后, 再次在近似根  $y$  处标准化其 Jacobian 矩阵, 于是

$$Df(w) = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_{n-1} \\ \sigma_n & 0 \end{pmatrix}.$$

**命题 5.3.** 在运行算法 3 中第 4, 5 步之后,

$$\|\hat{w} - \hat{\zeta}\| \leq L\|\xi - z\|^2 + \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_{\mu}(f, z)\|\xi - z\|} \hat{\gamma}_{\mu}(f, z)\|\xi - z\|^2, \quad (5.15)$$

并且

$$\|g(w)\| \leq \frac{4\|D\hat{f}(z)\|}{1 - 2\hat{\gamma}_{\mu}(f, z)\|\xi - z\|} \hat{\gamma}_{\mu}(f, z)\|\xi - z\|^2 + lL\|\xi - z\|^2, \quad (5.16)$$

其中

$$\zeta \leftarrow W_{\dagger}^* \cdot \xi, g(X) \leftarrow U^* \cdot f(W_{\dagger} \cdot X), w = (w_1, \hat{w}) \leftarrow W_{\dagger}^* y, \quad (5.17)$$

$l$  为函数  $f_n(X)$  的 Lipschitz 常数.

**证明.** 由 (5.6) 和 (5.13), 可得

$$\begin{aligned} \|\hat{w} - \hat{\zeta}\| &= \|W_2^*(y_1 - \xi_1) + W_4^*(\hat{y} - \hat{\xi})\| \leq L\|\xi - z\|^2 + \|\hat{y} - \hat{\xi}\| \\ &\leq L\|\xi - z\|^2 + \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_{\mu}(f, z)\|\xi - z\|} \hat{\gamma}_{\mu}(f, z)\|\xi - z\|^2. \end{aligned}$$

由 (5.7) 及 (5.14), 可得

$$\begin{aligned} \|g(w)\| &= \|U_1^* \hat{f}(y) + U_3^* f_n(y)\| \leq \|\hat{f}(y)\| + L\|\xi - z\| \|f_n(y)\| \\ &\leq \frac{4\|D\hat{f}(z)\|}{1 - 2\hat{\gamma}_{\mu}(f, z)\|\xi - z\|} \hat{\gamma}_{\mu}(f, z)\|\xi - z\|^2 + lL\|\xi - z\|^2. \end{aligned}$$

□

令  $\Delta_k$  和  $\Lambda_k$  为由 (4.7) 及 (4.13) 从  $\Lambda_1 = d_1$  递归得到的微分泛函, 直到  $\Delta_{\mu}(g_n) = O(1)$ . 需要注意的是,  $d_1^k$  为  $\Delta_k$  中唯一的次数为  $k$  的微分单项式,  $\Delta_k$  中不存在其他的  $d_1^s$  满足  $s < k$ .

**命题 5.4.** 在运行算法 3 中第 6 步之后, 我们可得以下估计:

$$\|x_1 - \zeta_1\| = O(\|\xi - z\|^2), \quad (5.18)$$

其中  $x = (x_1, \hat{x}) \leftarrow (N_2(g_n, w), \hat{w}), \zeta \leftarrow W_{\dagger}^* \cdot \xi$ .

**证明.** 很容易可以验证,  $w$  是以下系统的简单重根:

$$\begin{cases} \hat{h}(X) = \hat{g}(X) - \hat{g}(w), \\ h_n(X) = g_n(X) - g_n(w) - \sum_{k=1}^{\mu-1} \Delta_k(g_n)(X_1 - w_1)^k. \end{cases}$$

其重数为  $\mu$  并且  $Dg(w)$  具有标准型 (4.12). 于是由 (4.14),

$$\begin{aligned} h_n(X) &= - \sum_{1 \leq i+j-1 \leq \mu-2} T_{i,j-1} \cdot D\hat{h}(w)^{-1} \underbrace{\hat{h}(X)(X_1 - w_1)^i (\hat{X} - \hat{w})^{j-1}}_{\#1} \\ &\quad + \Delta_{\mu}(h_n)(X_1 - w_1)^{\mu} + \sum_{i+j=\mu, j>0} C_{i,j} \underbrace{(X_1 - w_1)^i (\hat{X} - \hat{w})^j}_{\#2} + \sum_{k \geq \mu+1} \underbrace{\frac{D^k h_n(w)(X - w)^k}{k!}}_{\#3} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{1 \leq i+j-1 \leq \mu-2} T_{i,j-1} \cdot \left( \sum_{k+i+j-1 \geq \mu+1} D\hat{h}(w)^{-1} \underbrace{\frac{D^k \hat{h}(w)(X-w)^k}{k!} (X_1-w_1)^i (\hat{X}-\hat{w})^{j-1}}_{\#4} \right).$$

令  $g_n(X) = h_n(X) + g_n(w) + \sum_{k=1}^{\mu-1} \Delta_k(g_n)(X_1-w_1)^k$ , 假设  $\{1, \bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_{\mu-1}\}$  为  $\mathcal{D}_{g,\zeta}$  的一组既约基, 那么

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\Lambda}_{\mu-1}(g_n) = \bar{\Lambda}_{\mu-1}(h_n) + \Delta_{\mu-1}(g_n) \\ &= \mu \Delta_{\mu}(h_n)(\zeta_1 - w_1) + \Delta_{\mu-1}(g_n) + O(\|\xi - z\|^2) \\ &= \mu \Delta_{\mu}(g_n)(\zeta_1 - w_1) + \Delta_{\mu-1}(g_n) + O(\|\xi - z\|^2) \\ &= -\mu \Delta_{\mu}(g_n)(N_2(w_1) - \zeta_1) + O(\|\xi - z\|^2), \end{aligned}$$

原因基于以下事实:

- 对 #1, 由于  $\bar{\Lambda}_{\mu-1} \in \mathcal{D}_{g,\zeta}$ ,  $\hat{h}(X) = \hat{g}(X) - \hat{g}(w)$  并且由 (5.16),  $\|\hat{g}(w)\| = O(\|\xi - z\|^2)$ , 那么对  $1 \leq i+j-1 \leq \mu-2$ ,  $\bar{\Lambda}_{\mu-1} \left( \hat{h}(X)(X_1-w_1)^i (\hat{X}-\hat{w})^{j-1} \right) = O(\|\xi - z\|^2)$ ;
- 对 #2, 由于  $j > 0$ ,  $i+j-1 = \mu-1$  并且由 (5.15),  $\|\hat{w} - \hat{\zeta}\| = O(\|\xi - z\|^2)$ , 可得  $\bar{\Lambda}_{\mu-1} \left( (X_1-w_1)^i (\hat{X}-\hat{w})^{j-1} (\hat{X}-\hat{w}) \right) = O(\|\xi - z\|^2)$ ;
- 对 #3, 对  $k - (\mu-1) \geq 2$ , 有  $\bar{\Lambda}_{\mu-1} \left( (X-w)^k \right) = O(\|\xi - z\|^2)$ ;
- 对 #4, 对  $k+i+j-1 - (\mu-1) \geq 2$ , 有  $\bar{\Lambda}_{\mu-1} \left( (X-w)^k (X_1-w_1)^i (\hat{X}-\hat{w})^{j-1} \right) = O(\|\xi - z\|^2)$ .

并且  $\Delta_{\mu}(g_n) = O(1)$ . 因此, 当运行步骤 6 之后, 必有

$$\|x_1 - \zeta_1\| = \|N_2(w_1) - \zeta_1\| = O(\|\xi - z\|^2).$$

□

现在我们可以给出定理 5.3 的证明.

**证明.** 由于  $W_{\dagger}$  和  $W_{\ddagger}$  都为正交矩阵, 根据 (5.4) 和命题 5.3, 5.4, 下式成立:

$$\|W_{\dagger} \cdot W_{\ddagger} \cdot x - \xi\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 - W_{\ddagger}^* \cdot W_{\dagger}^* \cdot \xi_1 \\ \hat{x} - W_{\ddagger}^* \cdot W_{\dagger}^* \cdot \hat{\xi} \end{pmatrix} \right\| = O(\|\xi - z\|^2).$$

□

接下来我们对简单 3 重根情形定量分析算法 3 步骤 6 中的二次收敛性, 并给出命题 5.4 的定量分析版本. 将该定量分析推广到任意重数的简单重根的情形并无本质上的难度.

**定义 5.3.** 令  $u = \max\{\gamma_3(f, \xi)^3 \|\xi - z\|, L\gamma_3(f, \xi)^2 \|\xi - z\|\}$ . 定义以下有理函数:

$$\begin{aligned}
 l_1(u) &= \frac{(1-2u)^2}{(2(1-2u)^2-1) \cdot (1-u)^3}, \\
 l_2(u) &= \frac{(2u-1)^6}{(128u^6-384u^5+480u^4-336u^3+140u^2-32u+1) \cdot (1-u)^3}, \\
 l_3(u) &= \sqrt{1 + \left(\frac{l_1 u}{1-l_1 u}\right)^2}, \\
 b_1(u) &= u + \frac{l_1 u}{1-l_1 u}, \\
 b_2(u) &= \frac{(16l_1^2 l_3^2 u^4 - (16l_1^2 l_3^2 + 16l_1 l_3)u^3 + (16l_1 l_3 + 4)u^2 - 4u + 1)^2}{(1-2u)^2(1-2l_1 l_3 u)^2} \\
 &\quad \cdot \left[ \left(\frac{l_2}{3} + \frac{17l_2 l_3^2}{3}\right)u + \frac{7l_2^2}{3}u^2 + \frac{4l_2^2}{3}u^3 + \left(\frac{l_2}{3} + \frac{7l_2^2 u}{3} + \frac{8l_2^2 u^2}{3}\right) \frac{l_1 u}{1-l_1 u} \right. \\
 &\quad + \frac{4l_2^2 u}{3} \left(\frac{l_1 u}{1-l_1 u}\right)^2 + \frac{l_2}{3} \cdot \frac{l_1 l_3^2 u}{1-l_1 l_3 u} \\
 &\quad + \frac{8l_2^3 l_3^2 u (12l_2^2 l_3^3 u^3 + (6l_2^2 l_3^2 - 14l_2 l_3^2)u^2 + (4l_3 - 8l_2 l_3)u + 3)}{3(1-2l_2 l_3 u)^3} \\
 &\quad \left. + \frac{2l_2 l_1^2 l_3^3 u (16l_1^2 l_3^2 u^3 + (4l_1^2 l_3^2 - 20l_1 l_3)u^2 + (6 - 6l_1 l_3)u + 3)}{(1-2l_1 l_3 u)^3} \right] \\
 &\quad + \frac{l_2^2}{3} \left(u + \frac{l_1 u}{1-l_1 u}\right) \left(\frac{2(-4l_1^2 l_3^2 u^2 + 4l_1 l_3 u)^2}{(1-2u)^4(1-2l_1 l_3 u)^4} + \frac{7(-4l_1^2 l_3^2 u^2 + 4l_1 l_3 u)}{(1-2u)^2(1-2l_1 l_3 u)^2} + 8\right).
 \end{aligned}$$

**定理 5.4.** 给定多项式系统  $f$ , 如果  $\xi$  为其简单三重根,  $z$  为近似根, 且满足  $f(\xi) = 0$ ,  $\dim \ker Df(\xi) = 1$ .

(1) 如果  $u < u_3 \approx 0.0137$ , 其中  $u_3$  为如下方程的最小正根:

$$b_1(u)^2 + b_2(u)^2 = 1,$$

那么算法 3 的输出满足:

$$\|N_f(z) - \xi\| < \|z - \xi\|.$$

(2) 如果  $u < u'_3 \approx 0.0098$ , 其中  $u'_3$  为如下方程的最小正根:

$$b_1(u)^2 + b_2(u)^2 = \frac{1}{4},$$

那么经过  $k$  次迭代之后, 我们有

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}} \|z - \xi\|.$$

定理 5.4 的证明依赖于以下几个命题.

**命题 5.5.** 当  $u \leq u_3$  时, 以下两个不等式成立

$$\hat{\gamma}_3(f, z) \leq l_1 \cdot \gamma_3(f, \xi), \quad (5.19)$$

$$\gamma_{3,n}(f, z) \leq l_2 \cdot \gamma_3(f, \xi). \quad (5.20)$$

**证明.** 对  $k \geq 2$ , 由  $D^k \hat{f}(z)$  在  $\xi$  的 Taylor 展开, 可得

$$\begin{aligned} & \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(z)}{k!} \right\| \\ & \leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left\| D\hat{f}(\xi)^{-1} \left( \frac{D^k \hat{f}(\xi)}{k!} + \sum_{i \geq 1} \frac{D^{k+i} \hat{f}(\xi)}{k!i!} (\xi - z)^i \right) \right\| \\ & \leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left( \gamma_3(f, \xi)^{k-1} + \sum_{i \geq 1} \frac{(k+i)!}{k!i!} \gamma_3(f, \xi)^{k+i-1} \|\xi - z\|^i \right) \\ & \leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \frac{\gamma_3(f, \xi)^{k-1}}{(1 - \gamma_3(f, \xi) \|\xi - z\|)^{k+1}} \\ & \leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left( \frac{1}{1-u} \right)^{k+1} \gamma_3(f, \xi)^{k-1}. \end{aligned}$$

那么由  $\hat{\gamma}_3$  的定义以及上述不等式可得

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_3(f, z) & \leq \max_{k \geq 2} \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(z)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} \\ & \leq \max_{k \geq 2} \left( \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\|^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left( \frac{1}{1-u} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \gamma_3(f, \xi) \right) \\ & \leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \left( \frac{1}{1-u} \right)^3 \gamma_3(f, \xi). \end{aligned} \quad (5.21)$$

由命题 5.1, 对  $u \leq u_3 \approx 0.0137$ , 可以证明:

$$\left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \leq \frac{(1-2u)^2}{2(1-2u)^2 - 1},$$

因此由 (5.21) 和定义 5.3, (5.19) 成立.

与不等式 (5.21) 的证明相似, 我们有

$$\gamma_{3,n}(f, z) \leq \left\| \Delta_3(f_n)(z)^{-1} \Delta_3(f_n)(\xi) \right\| \cdot \left( \frac{1}{1-u} \right)^3 \gamma_3(f, \xi). \quad (5.22)$$



下面证明 (5.20). 我们注意到:

$$\Delta_3(f_n)(z)^{-1}\Delta_3(f_n)(\xi) = (1 + (\Delta_3(f_n)(\xi)^{-1}\Delta_3(f_n)(z) - 1))^{-1}.$$

由  $\frac{\partial^3 f_n(z)}{\partial X_1^3}$  和  $\frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}$  在  $\xi$  点处的 Taylor 展开, 可得:

$$\begin{aligned} \Delta_3(f_n)(z) &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_n(z)}{\partial X_1^3} + a_{2,z} \cdot \frac{\partial^2 f_n(z)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \\ &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_n(\xi)}{\partial X_1^3} + \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{6 \cdot i!(k-i)!} \frac{\partial^{k+3} f_n(\xi)}{\partial X_1^{3+i} \partial \hat{X}^{k-i}} (\xi_1 - z)^i (\hat{\xi} - \hat{z})^{k-i} \\ &\quad + a_{2,z} \cdot \frac{\partial^2 f_n(\xi)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} + a_{2,z} \cdot \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \frac{\partial^{k+2} f_n(\xi)}{\partial X_1^{1+i} \partial \hat{X}^{1+k-i}} (\xi_1 - z)^i (\hat{\xi} - \hat{z})^{k-i} \\ &= \Delta_3(f_n)(\xi) + \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{6 \cdot i!(k-i)!} \frac{\partial^{k+3} f_n(\xi)}{\partial X_1^{3+i} \partial \hat{X}^{k-i}} (\xi_1 - z)^i (\hat{\xi} - \hat{z})^{k-i} \\ &\quad + a_{2,z} \cdot \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} \frac{\partial^{k+2} f_n(\xi)}{\partial X_1^{1+i} \partial \hat{X}^{1+k-i}} (\xi_1 - z)^i (\hat{\xi} - \hat{z})^{k-i}, \end{aligned}$$

其中

$$a_{2,z} = D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} &\|\Delta_3(f_n)(\xi)^{-1}\Delta_3(f_n)(z) - 1\| \tag{5.23} \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^k \frac{(k+3)!}{6 \cdot i!(k-i)!} \gamma_{3,n}(f, \xi)^{k+2} \|\xi - z\|^k \\ &\quad + \|a_{2,z}\| \cdot \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^k \frac{(k+2)!}{i!(k-i)!} \gamma_{3,n}(f, \xi)^{k+1} \|\xi - z\|^k \\ &\leq \frac{1}{6} \sum_{k \geq 1} (k+3)(k+2)(k+1) 2^k \gamma_{3,n}(f, \xi)^{k+2} \|\xi - z\|^k \\ &\quad + \|a_{2,z}\| \cdot \sum_{k \geq 1} (k+2)(k+1) 2^k \gamma_{3,n}(f, \xi)^{k+1} \|\xi - z\|^k, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \|a_{2,z}\| &= \left\| D\hat{f}(z)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(z)}{\partial X_1^2} \right\| \\ &\leq \left\| D\hat{f}(z)^{-1} D\hat{f}(\xi) \right\| \cdot \\ &\quad \left\| D\hat{f}(\xi)^{-1} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(\xi)}{\partial X_1^2} + \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2 \cdot i!(k-i)!} \frac{\partial^{k+2} f(\xi)}{\partial X_1^{2+i} \partial \hat{X}^{k-i}} (\xi_1 - z)^i (\hat{\xi} - \hat{z})^{k-i} \right) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \hat{\gamma}_3(f, \xi) + \sum_{k \geq 1} \sum_{i=0}^k \frac{(k+2)!}{2 \cdot i!(k-i)!} \hat{\gamma}_3(f, \xi)^{k+1} \|\xi - z\|^k \\
&\leq \hat{\gamma}_3(f, \xi) + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (k+2)(k+1) 2^k \hat{\gamma}_3(f, \xi)^{k+1} \|\xi - z\|^k \\
&\leq \hat{\gamma}_3(f, \xi) + \frac{-2u(4u^2 - 6u + 3)}{(2u-1)^3}.
\end{aligned}$$

由 (5.23), 可得:

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_3(f_n)(\xi)^{-1} \Delta_3(f_n)(z) - 1\| \\
&\leq \frac{-8u(2u^3 - 4u^2 + 3u - 1)}{(2u-1)^4} + \frac{-2u(4u^2 - 6u + 3)}{(2u-1)^3} \cdot \frac{-4u(4u^2 - 6u + 3)}{(2u-1)^3} \\
&\quad + \sum_{k \geq 1} (k+2)(k+1) 2^k \gamma_{3,n}(f, \xi)^{k+2} \|\xi - z\|^k \\
&\leq \frac{-4u(16u^5 - 48u^4 + 60u^3 - 44u^2 + 20u - 5)}{(2u-1)^6}.
\end{aligned}$$

当  $u \leq u_3$  时, 可以验证

$$\frac{-4u(16u^5 - 48u^4 + 60u^3 - 44u^2 + 20u - 5)}{(2u-1)^6} < 1,$$

于是

$$\begin{aligned}
\|\Delta_3(f_n)(z)^{-1} \Delta_3(f_n)(\xi)\| &= \|(1 + (\Delta_3(f_n)(\xi)^{-1} \Delta_3(f_n)(z) - 1))^{-1}\| \\
&\leq \frac{1}{1 - \frac{-4u(16u^5 - 48u^4 + 60u^3 - 44u^2 + 20u - 5)}{(2u-1)^6}} \\
&= \frac{(2u-1)^6}{(128u^6 - 384u^5 + 480u^4 - 336u^3 + 140u^2 - 32u + 1)}.
\end{aligned}$$

因此, 不等式 (5.20) 成立.  $\square$

注意到, 运行算法 3 中的前五步之后, 我们有

$$\zeta \leftarrow W_{\dagger}^* \cdot \xi, \quad g(X) \leftarrow U^* \cdot f(W_{\dagger} \cdot X), \quad w \leftarrow W_{\dagger}^* y, \quad y \leftarrow (z_1, N_1(\hat{f}, \hat{z})).$$

对正交矩阵  $U$  和  $W_{\dagger}$ , 有  $\gamma_3(f, \xi) = \gamma_3(U^* \cdot f, W_{\dagger}^* \cdot \xi)$  并且以下不等式成立:

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_3(g, w) &\leq l_1 \cdot \gamma_3(g, \zeta) = l_1 \cdot \gamma_3(f, \xi), \\
\gamma_{3,n}(g, w) &\leq l_2 \cdot \gamma_3(g, \zeta) = l_2 \cdot \gamma_3(f, \xi).
\end{aligned}$$

**命题 5.6.** 当  $u \leq u_3$  时,

$$\|w - \zeta\| \leq l_3 \cdot \|z - \xi\|. \quad (5.24)$$

证明. 注意到,

$$\|w - \zeta\| = \|W_{\dagger}^*(y - \xi)\| = \|y - \xi\|.$$

由命题 5.2 及命题 5.5, 当  $u \leq u_3$  时,

$$\begin{aligned} \|\hat{y} - \hat{\xi}\| &\leq \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_3(f, z)\|\xi - z\|} \hat{\gamma}_3(f, z)\|\xi - z\|^2 \\ &\leq \frac{l_1 u}{1 - l_1 u} \|\xi - z\|. \end{aligned}$$

由于  $y_1 = z_1$ , 当  $u \leq u_3$  时,

$$\|w - \zeta\| = \|y - \xi\| \leq \sqrt{1 + \left(\frac{l_1 u}{1 - l_1 u}\right)^2} \|\xi - z\| = l_3 \cdot \|z - \xi\|.$$

□

在命题 5.4 中, 我们已经证明了

$$\|x_1 - \zeta_1\| = O(\|\xi - z\|^2).$$

下面, 对简单三重根的情形, 我们给出命题 5.4 的定量分析版本.

延续命题 5.4 的证明, 考虑如下系统:

$$\begin{cases} \hat{h}(X) = \hat{g}(X) - \hat{g}(w) \\ h_n(X) = g_n(X) - g_n(w) - \sum_{k=1}^2 \Delta_k(g_n)(X_1 - w_1)^k \end{cases}$$

则  $w$  为  $h(X)$  的简单三重根, 而且其 Jacobian 矩阵具有标准型. 从  $\hat{h}(X)$  在  $w$  的 Taylor 展式中表示出  $\hat{X} - \hat{w}$ , 并代入  $h_n(X)$  在  $w$  的 Taylor 展式中可得:

$$\begin{aligned} h_n(X) &= - \sum_{i+j=1} T_{i,j} \cdot D\hat{h}(w)^{-1} \hat{h}(X) (X_1 - w_1)^i (\hat{X} - \hat{w})^j \\ &\quad + \Delta_3(h_n)(X_1 - w_1)^3 + \sum_{i+j=3, j>0} C_{i,j} (X_1 - w_1)^i (\hat{X} - \hat{w})^j \\ &\quad + \sum_{k \geq 4} \frac{D^k h_n(w) (X - w)^k}{k!} \\ &\quad + \sum_{i+j=1} T_{i,j} \cdot \sum_{k \geq 3} D\hat{h}(w)^{-1} \frac{D^k \hat{h}(w) (X - w)^k}{k!} (X_1 - w_1)^i (\hat{X} - \hat{w})^j \\ &\triangleq \Delta_3(h_n)(X_1 - w_1)^3 + B. \end{aligned}$$

注意到, 对  $k \geq 3$ ,  $D\hat{h}(w) = D\hat{g}(w)$ ,  $D^k h(w) = D^k g(w)$ ,

$$C_{2,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_n(w)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}} - \frac{\partial^2 g_n(w)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \cdot D\hat{g}(w)^{-1} \frac{\partial^2 \hat{g}(w)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_n(w)}{\partial \hat{X}^2} \cdot D\hat{g}(w)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{g}(w)}{\partial X_1^2},$$

$$\begin{aligned}
C_{1,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^3 g_n(w)}{\partial X_1 \partial \hat{X}^2} - \frac{\partial^2 g_n(w)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \cdot D\hat{g}(w)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{g}(w)}{\partial \hat{X}^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_n(w)}{\partial \hat{X}^2} \cdot D\hat{g}(w)^{-1} \frac{\partial^2 \hat{g}(w)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}, \\
C_{0,3} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 g_n(w)}{\partial \hat{X}^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_n(w)}{\partial \hat{X}^2} \cdot D\hat{g}(w)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{g}(w)}{\partial \hat{X}^2}, \\
T_{1,0} &= -\frac{\partial^2 g_n(w)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}, \\
T_{0,1} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_n(w)}{\partial \hat{X}^2}.
\end{aligned}$$

由  $\hat{\gamma}_3(g, w)$  和  $\gamma_{3,n}$  的定义, 可得:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_3(g_n)^{-1} C_{2,1}\| &\leq 3\gamma_{3,n}(g, w)^2 + 2\gamma_{3,n}(g, w) \cdot 2\hat{\gamma}_3(g, w) + \gamma_{3,n}(g, w) \cdot \hat{\gamma}_3(g, w) \\
&\leq 8\gamma_3(g, w)^2, \\
\|\Delta_3(g_n)^{-1} C_{1,2}\| &\leq 3\gamma_{3,n}(g, w)^2 + 2\gamma_3(g, w) \cdot \hat{\gamma}_3(g, w) + \gamma_{3,n}(g, w) \cdot 2\hat{\gamma}_3(g, w) \\
&\leq 7\gamma_3(g, w)^2, \\
\|\Delta_3(g_n)^{-1} C_{0,3}\| &\leq \gamma_{3,n}(g, w)^2 + \gamma_{3,n}(g, w) \cdot \hat{\gamma}_3(g, w) \\
&\leq 2\gamma_3(g, w)^2, \\
\|\Delta_3(g_n)^{-1} T_{1,0}\| &\leq 2\gamma_{3,n}(g, w), \\
\|\Delta_3(g_n)^{-1} T_{0,1}\| &\leq \gamma_{3,n}(g, w).
\end{aligned}$$

令  $\{1, \bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2\}$  为  $\mathcal{D}_{g,\zeta}$  的一组既约基, 并且  $\bar{\Lambda}_1 = d_1 + a_1 d_2$ , 那么

$$\bar{\Delta}_2 = d_1^2 + a_1 d_1 d_2 + a_1^2 d_2^2,$$

$$\bar{\Lambda}_2 = \bar{\Delta}_2 + a_2 d_2,$$

其中  $a_1 = D\hat{g}(\zeta)^{-1} \frac{\partial \hat{g}(\zeta)}{\partial X_1}$ ,  $a_2 = D\hat{g}(\zeta)^{-1} \bar{\Delta}_2(\hat{g})(\zeta)$ .

由  $\frac{\partial \hat{g}(\zeta)}{\partial X_1}$  在  $w$  处的 Taylor 展式

$$\frac{\partial \hat{g}(\zeta)}{\partial X_1} = \sum_{k \geq 2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(i-1)!(k-i)!} \frac{\partial^k \hat{g}(w)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^{k-i}} (\zeta_1 - w_1)^{i-1} (\zeta - \hat{w})^{k-i},$$

以及  $\gamma_3(g, \zeta) = \gamma_3(f, \xi)$ , 可得

$$\begin{aligned}
\|a_1\| &= \left\| D\hat{g}(\zeta)^{-1} \frac{\partial \hat{g}(\zeta)}{\partial X_1} \right\| \\
&\leq \|D\hat{g}(\zeta)^{-1} D\hat{g}(w)\| \cdot \left\| D\hat{g}(w)^{-1} \frac{\partial \hat{g}(\zeta)}{\partial X_1} \right\| \\
&\leq \|D\hat{g}(\zeta)^{-1} D\hat{g}(w)\| \cdot \sum_{k \geq 2} \sum_{i=1}^k \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} \hat{\gamma}_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|D\hat{g}(\zeta)^{-1}D\hat{g}(w)\| \cdot \frac{4l_1\gamma_3(f, \xi)l_3\|\xi - z\|(1 - l_1\gamma_3(f, \xi)l_3\|\xi - z\|)}{(1 - 2l_1\gamma_3(f, \xi)l_3\|\xi - z\|)^2} \\
&\leq \frac{1}{(1 - 2u)^2} \cdot \frac{4l_1l_3u(1 - l_1l_3u)}{(1 - 2l_1l_3u)^2} \\
&= \frac{4l_1l_3u(1 - l_1l_3u)}{(1 - 2u)^2(1 - 2l_1l_3u)^2},
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
\|a_2\| &= \|D\hat{g}(\zeta)^{-1}\bar{\Delta}_2(\hat{g})(\zeta)\| \\
&\leq \left\| D\hat{g}(\zeta)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{g}(\zeta)}{\partial X_1^2} \right\| + \|a_1\| \cdot \left\| D\hat{g}(\zeta)^{-1} \frac{\partial^2 \hat{g}(\zeta)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \right\| \\
&\quad + \|a_1\|^2 \cdot \left\| D\hat{g}(\zeta)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{g}(\zeta)}{\partial \hat{X}^2} \right\| \\
&\leq \gamma_3(g, \zeta) + 2\|a_1\|\gamma_3(g, \zeta) + \|a_1\|^2\gamma_3(g, \zeta).
\end{aligned}$$

**命题 5.7.** 如下结论成立:

$$N_2(g_n, w) - \zeta_1 = \frac{1}{3}\Delta_3(g_n)^{-1}\bar{\Lambda}_2(B).$$

**证明.** 由于  $\bar{\Lambda}_2 = \bar{\Delta}_2 + a_2d_2$ , 在下式两端同时作用  $\bar{\Lambda}_2$ :

$$g_n(X) = h_n(X) + g_n(w) + \sum_{k=1}^2 \Delta_k(g_n)(X_1 - w_1)^k,$$

可得:

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{\Lambda}_2(g_n) = \bar{\Lambda}_2(h_n) + \Delta_2(g_n) \\
&= 3\Delta_3(h_n)(\zeta_1 - w_1) + \Delta_2(g_n) + \bar{\Lambda}_2(B) \\
&= 3\Delta_3(g_n)(\zeta_1 - w_1) + \Delta_2(g_n) + \bar{\Lambda}_2(B).
\end{aligned}$$

因此,

$$N_2(g_n, w) - \zeta_1 = w_1 - \frac{1}{3}\Delta_3(g_n)^{-1}\Delta_2(g_n) - \zeta_1 = \frac{1}{3}\Delta_3(g_n)^{-1}\bar{\Lambda}_2(B).$$

□

**命题 5.8.** 当  $u \leq u_3$  时, 以下不等式成立:

$$|x_1 - \zeta_1| \leq b_2(u)\|z - \xi\|. \quad (5.25)$$

**证明.** 由命题 5.7 以及上述讨论, 可得

$$|N_2(g_n, w) - \zeta_1| = \left| \frac{1}{3}\Delta_3(g_n)^{-1}\bar{\Lambda}_2(B) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{3} \Delta_3(g_n)^{-1} \bar{\Lambda}_2 \left( T_{1,0} \cdot D\hat{h}(w)^{-1} \hat{h}(X)(X_1 - w_1) + T_{0,1} \cdot D\hat{h}(w)^{-1} \hat{h}(X)(\hat{X} - \hat{w}) \right) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{3} \Delta_3(g_n)^{-1} \bar{\Lambda}_2 \left( \sum_{i+j=3, j>0} C_{i,j} (X_1 - w_1)^i (\hat{X} - \hat{w})^j \right) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{3} \Delta_3(g_n)^{-1} \bar{\Lambda}_2 \left( \sum_{k \geq 4} \frac{D^k h_n(w) (X - w)^k}{k!} \right) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{3} \Delta_3(g_n)^{-1} \bar{\Lambda}_2 \left( \sum_{i+j=1} T_{i,j} \cdot \sum_{k \geq 3} D\hat{h}(w)^{-1} \frac{D^k \hat{h}(w) (X - w)^k}{k!} (X_1 - w_1)^i (\hat{X} - \hat{w})^j \right) \right| \\
&= \frac{1}{3} \left\| \Delta_3(g_n)^{-1} T_{0,1} \right\| \cdot \left\| D\hat{h}(w)^{-1} \hat{h}(\zeta) \right\| \|a_2\| \\
&\quad + \frac{1}{3} \left\| \Delta_3(g_n)^{-1} \cdot \left( C_{2,1} + C_{1,2} (a_1 + a_2(\zeta_1 - w_1)) + C_{0,3} (a_1^2 + 2a_2(\hat{\zeta} - \hat{w})) \right) \right\| \|\hat{\zeta} - \hat{w}\| \\
&\quad + \frac{1}{3} \cdot \sum_{i+j=3, j>0} \left\| \Delta_3(g_n)^{-1} C_{i,j} \right\| |\zeta_1 - w_1|^i \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{j-1} \|a_2\| \\
&\quad + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=2}^k \frac{i(i-1)}{i!(k-i)!} \left\| \Delta_3(g_n)^{-1} \frac{\partial^k h_n(w)}{\partial X_1^i \hat{X}^{k-i}} \right\| |\zeta_1 - w_1|^{i-2} \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-i} \\
&\quad + \frac{1}{3} \cdot \|a_1\| \sum_{k \geq 4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i(k-i)}{i!(k-i)!} \left\| \Delta_3(g_n)^{-1} \frac{\partial^k h_n(w)}{\partial X_1^i \hat{X}^{k-i}} \right\| |\zeta_1 - w_1|^{i-1} \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-i-1} \\
&\quad + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \|a_1\|^2 \sum_{k \geq 4} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(k-i)(k-i-1)}{i!(k-i)!} \left\| \Delta_3(g_n)^{-1} \frac{\partial^k h_n(w)}{\partial X_1^i \hat{X}^{k-i}} \right\| |\zeta_1 - w_1|^i \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-i-2} \\
&\quad + \frac{1}{3} \cdot \|a_2\| \sum_{k \geq 4} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-i)}{i!(k-i)!} \left\| \Delta_3(g_n)^{-1} \frac{\partial^k h_n(w)}{\partial X_1^i \hat{X}^{k-i}} \right\| |\zeta_1 - w_1|^i \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-i-1} \\
&\quad + \frac{1}{3} \sum_{i+j=1} \left\| \Delta_3(g_n)^{-1} T_{i,j} \right\| \cdot \sum_{k \geq 3} \left( \frac{1}{2} \sum_{l=2}^k \frac{l(l-1)}{l!(k-l)!} \left\| D\hat{h}(w)^{-1} \frac{\partial^k \hat{h}(w)}{\partial X_1^l \hat{X}^{k-l}} \right\| |\zeta_1 - w_1|^{l-2} \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-l} \right. \\
&\quad + \|a_1\| \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l(k-l)}{l!(k-l)!} \left\| D\hat{h}(w)^{-1} \frac{\partial^k \hat{h}(w)}{\partial X_1^l \hat{X}^{k-l}} \right\| |\zeta_1 - w_1|^{l-1} \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-l-1} \\
&\quad + \frac{1}{2} \|a_1\|^2 \sum_{l=0}^{k-2} \frac{(k-l)(k-l-1)}{l!(k-l)!} \left\| D\hat{h}(w)^{-1} \frac{\partial^k \hat{h}(w)}{\partial X_1^l \hat{X}^{k-l}} \right\| |\zeta_1 - w_1|^l \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-l-2} \\
&\quad \left. + \|a_2\| \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(k-l)}{l!(k-l)!} \left\| D\hat{h}(w)^{-1} \frac{\partial^k \hat{h}(w)}{\partial X_1^l \hat{X}^{k-l}} \right\| |\zeta_1 - w_1|^l \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-l-1} \right) |\zeta_1 - w_1|^i \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^j \\
&\leq \frac{1}{3} \gamma_3(g, w) \left( \|\hat{\zeta} - \hat{w}\| + \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_3(g, w) \|\zeta - w\|} \hat{\gamma}_3(g, w) \|\zeta - w\|^2 \right) \|a_2\| \\
&\quad + \frac{1}{3} (8\gamma_3(g, w)^2 + 7\gamma_3(g, w)^2 \|a_1\| + 2\gamma_3(g, w)^2 \|a_1\|^2) \|\hat{\zeta} - \hat{w}\| \\
&\quad + \frac{7}{3} \gamma_3(g, w)^2 \|a_2\| |\zeta_1 - w_1| \|\hat{\zeta} - \hat{w}\| + \frac{4}{3} \gamma_3(g, w)^2 \|a_2\| \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{17}{3} \gamma_3(g, w) \|\zeta - w\|^2 \|a_2\| \\
& + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} \sum_{i=2}^k \frac{i(i-1)k!}{i!(k-i)!} \gamma_3(g, w)^{k-1} |\zeta_1 - w_1|^{i-2} \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-i} \\
& + \frac{1}{3} \|a_1\| \sum_{k \geq 4} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i(k-i)k!}{i!(k-i)!} \gamma_3(g, w)^{k-1} |\zeta_1 - w_1|^{i-1} \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-i-1} \\
& + \frac{1}{6} \|a_1\|^2 \sum_{k \geq 4} \sum_{i=0}^{k-2} \frac{(k-i)(k-i-1)k!}{i!(k-i)!} \gamma_3(g, w)^{k-1} |\zeta_1 - w_1|^i \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-i-2} \\
& + \frac{1}{3} \|a_2\| \sum_{k \geq 4} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(k-i)k!}{i!(k-i)!} \gamma_3(g, w)^{k-1} |\zeta_1 - w_1|^i \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^{k-i-1} \\
& + \gamma_3(g, w) \cdot \sum_{k \geq 3} \left( \frac{1}{2} \sum_{l=2}^k \frac{l(l-1)k!}{l!(k-l)!} \hat{\gamma}_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-2} \right. \\
& + \|a_1\| \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l(k-l)k!}{l!(k-l)!} \hat{\gamma}_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-2} \\
& + \frac{1}{2} \|a_1\|^2 \sum_{l=0}^{k-2} \frac{(k-l)(k-l-1)k!}{l!(k-l)!} \hat{\gamma}_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-2} \\
& \left. + \|a_2\| \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(k-l)k!}{l!(k-l)!} \hat{\gamma}_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-1} \right) \|\zeta - w\| \\
& = \frac{1}{3} \gamma_3(g, w) \left( \|\hat{\zeta} - \hat{w}\| + \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_3(g, w) \|\zeta - w\|} \hat{\gamma}_3(g, w) \|\zeta - w\|^2 \right) \|a_2\| \\
& + \frac{1}{3} (8\gamma_3(g, w)^2 + 7\gamma_3(g, w)^2 \|a_1\| + 2\gamma_3(g, w)^2 \|a_1\|^2) \|\hat{\zeta} - \hat{w}\| \\
& + \frac{7}{3} \gamma_3(g, w)^2 \|a_2\| \|\zeta_1 - w_1\| \|\hat{\zeta} - \hat{w}\| + \frac{4}{3} \gamma_3(g, w)^2 \|a_2\| \|\hat{\zeta} - \hat{w}\|^2 \\
& + \frac{17}{3} \gamma_3(g, w) \|\zeta - w\|^2 \|a_2\| \\
& + \frac{1}{6} \sum_{k \geq 4} 2^{k-2} k(k-1) \gamma_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-2} \\
& + \frac{1}{3} \|a_1\| \sum_{k \geq 4} 2^{k-2} k(k-1) \gamma_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-2} \\
& + \frac{1}{6} \|a_1\|^2 \sum_{k \geq 4} 2^{k-2} k(k-1) \gamma_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-2} \\
& + \frac{1}{3} \|a_2\| \sum_{k \geq 4} 2^{k-1} k \gamma_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-1} \\
& + \frac{1}{2} \gamma_3(g, w) \sum_{k \geq 3} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) 2^{k-2} k(k-1) \hat{\gamma}_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^{k-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_3(g, w) \sum_{k \geq 3} \|a_2\| 2^{k-1} k \hat{\gamma}_3(g, w)^{k-1} \|\zeta - w\|^k \\
\leq & \frac{l_2}{3} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) \left( u + \frac{l_1 u}{1 - l_1 u} \right) \|\xi - z\| \\
& + \frac{l_2}{3} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) \cdot \frac{l_1 l_3^2 u}{1 - l_1 l_3 u} \|\xi - z\| \\
& + \frac{l_2^2}{3} (8 + 7\|a_1\| + 2\|a_1\|^2) \left( u + \frac{l_1 u}{1 - l_1 u} \right) \|\xi - z\| \\
& + \frac{7l_2^2}{3} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) \left( u^2 + \frac{l_1 u^2}{1 - l_1 u} \right) \|\xi - z\| \\
& + \frac{4l_2^2}{3} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) u \left( u + \frac{l_1 u}{1 - l_1 u} \right)^2 \|\xi - z\| \\
& + \frac{17l_2}{3} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) l_3^2 u \|\xi - z\| \\
& + \frac{1}{6} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) \cdot \frac{8l_2^3 l_3^2 u (12l_2^2 l_3^2 u^2 - 16l_2 l_3 u + 6)}{(1 - 2l_2 l_3 u)^3} \|\xi - z\| \\
& + \frac{1}{3} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) u \cdot \frac{8l_2^3 l_3^3 u (4 - 6l_2 l_3 u)}{(1 - 2l_2 l_3 u)^2} \|\xi - z\| \\
& + \frac{l_2}{2} (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) \cdot \frac{4l_1^2 l_3^2 u (4l_1^2 l_3^2 u^2 - 6l_1 l_3 u + 3)}{(1 - 2l_1 l_3 u)^3} \|\xi - z\| \\
& + (1 + 2\|a_1\| + \|a_1\|^2) l_2 u \cdot \frac{4l_1^2 l_3^3 u (3 - 4l_1 l_3 u)}{(1 - 2l_1 l_3 u)^2} \|\xi - z\| \\
= & b_2(u) \|z - \xi\|.
\end{aligned}$$

□

当  $u < u_3 \approx 0.0137$  时, 由命题 5.3, 5.8 和定义 5.3, 可得:

$$\begin{aligned}
\|\hat{x} - \hat{\zeta}\| & \leq L \|\xi - z\|^2 + \frac{1}{1 - \hat{\gamma}_\mu(f, z) \|\xi - z\|} \hat{\gamma}_3(f, z) \|\xi - z\|^2 \\
& \leq \left( u + \frac{l_1 u}{1 - l_1 u} \right) \|z - \xi\| \\
& = b_1(u) \|z - \xi\|.
\end{aligned}$$

现在我们可以完成定理 5.4 的证明.

**证明.** (1) 当  $u < u_3 \approx 0.0137$  时, 可验证  $b_1(u)^2 + b_2(u)^2 < 1$ , 由命题 5.8 可得

$$\begin{aligned}
\|N_f(z) - \xi\| & = \|W_{\dagger} \cdot W_{\ddagger} \cdot (x - \zeta)\| \\
& = \|x - \zeta\| \\
& = \sqrt{|x_1 - \zeta_1|^2 + \|\hat{x} - \hat{\zeta}\|^2}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{b_1(u)^2 + b_2(u)^2} \|z - \xi\| \\ &< \|z - \xi\|. \end{aligned}$$

(2) 当  $u < u'_3 \approx 0.0098$  时, 可验证  $b_1(u)^2 + b_2(u)^2 < \frac{1}{4}$ , 由命题 5.8 可得

$$\begin{aligned} \|N_f(z) - \xi\| &= \|W_{\dagger} \cdot W_{\ddagger} \cdot (x - \zeta)\| \\ &= \|x - \zeta\| \\ &= \sqrt{|x_1 - \zeta_1|^2 + \|\hat{x} - \hat{\zeta}\|^2} \\ &\leq \sqrt{b_1(u)^2 + b_2(u)^2} \|z - \xi\| \\ &< \frac{1}{2} \|z - \xi\|. \end{aligned}$$

因此, 以下不等式在  $k = 1$  时成立:

$$\|N_f^k(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|.$$

对  $k \geq 2$ , 假设结论对  $k-1$  成立, 即

$$\|N_f^{k-1}(z) - \xi\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{k-1}-1} \|z - \xi\|.$$

令  $u^{(k-1)} = \gamma_3(f, \xi)^3 \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|$ . 对  $0 < u < u'_3$ , 都有  $u^{(k-1)} < u$  并且  $\frac{\sqrt{b_1(u)^2 + b_2(u)^2}}{u}$  单调递增. 因此由归纳假设可得,

$$\begin{aligned} &\|N_f^k(z) - \xi\| \\ &< \frac{\sqrt{b_1(u^{(k-1)})^2 + b_2(u^{(k-1)})^2} \gamma_3(f, \xi)^3}{u^{(k-1)}} \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|^2 \\ &< \frac{\sqrt{b_1(u)^2 + b_2(u)^2} \gamma_3(f, \xi)^3}{u} \|N_f^{k-1}(z) - \xi\|^2 \\ &< \frac{\sqrt{b_1(u)^2 + b_2(u)^2} \gamma_3(f, \xi)^3}{u} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-2} \|z - \xi\|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-1} \|z - \xi\|. \end{aligned}$$

□

**注释 5.3.** 算法 3 中共进行了两次正交变换, 虽然第二次正交变换近似等于恒等变换, 但是证明过程及实际算例表明, 算法 3 中的两次正交变换对算法的二次收敛性缺一不可.

**注释 5.4.** 算法 3 中的正交变换可能会将一个稀疏多项式系统变成稠密的, 因此改进的牛顿迭代可能会变得很费时. 作为补充, 我们可以采用链式法则来避免正交变换可能造成的对稠密矩阵的存储或者计算. 例如, 假设  $g(X) = U^* \cdot f(W_{\dagger} \cdot X)$ , 那么,

$$Dg(X) = U^* \cdot Df(W_{\dagger} \cdot X) \cdot W_{\dagger}. \quad (5.26)$$

令  $y = W_{\dagger}^* z$ , 则

$$Dg(y) = U^* \cdot Df(z) \cdot W_{\dagger}. \quad (5.27)$$

此时不再对  $Dg(X)$  在  $y$  点取值, 而是对  $Df(X)$  在  $z$  点取值, 并进行矩阵乘法, 这样便可避免对稠密系统  $Dg(X)$  的存储和计算.

相似的, 与 [31, 例 3.1] 中提到的一样, 不再计算和存储稠密的微分泛函  $\Delta_k$  和  $\Lambda_k$ , 而去计算多项式  $L_k(g)$  和  $P_k(g)$  因为

$$P_k(g) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} \cdot D(L_{k-j}(g)) \cdot \mathbf{a}_j \text{ and } L_k(g) = P_k(g) + Dg \cdot \mathbf{a}_k, \quad (5.28)$$

其中  $L_k$  和  $P_k$  分别为对应于  $\Delta_k$  和  $\Lambda_k$  的微分算子,  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_k = (0, a_{k,2}, \dots, a_{k,n})^T$ . 多项式系统  $P_k(g)$  和值  $\Delta_k(g)$  可对 (5.28) 递归地应用链式法则 (5.26) 和 (5.27) 得到.

## 5.4 数值实验

本章算法的 Maple 程序以及测试结果可在以下链接找到: <http://www.mmrc.iss.ac.cn/~lzhi/Research/hybrid/SimpleMultipleZeros/>

表 5.1 展示了算法 3 对以下例子的测试结果:

1. Ojika1 [38]:  $x^2 + y - 3, x + \frac{1}{8}y^2 - \frac{3}{2}$
2. Ojika2 [38]:  $x^2 + y + z - 1, x + y^2 + z - 1, x + y + z^2 - 1$
3. Ojika3 [38]:  $x + y + z - 1, 2x^3 + 5y^2 - 10z + 5z^3 + 5, 2x + 2y + z^2 - 1$
4. Ojika4 [38]:  $x + x^3z + xy^2z - xz, 10y - 2x^2yz - y^3z - yz,$   
 $6x^4z^2 - 3x^2y^2z^2 - x^2z^2 + 28x^2z - 3y^4z^3 + 2y^2z^2 + 7y^2z + z^2 - 11z + 10$
5. Decker2 [39]:  $x + y^3, x^2y - y^4$
6. DZ3 [35]:  $14x + 33y - 3\sqrt{5}(x^2 + 4xy + 4y^2 + 2) + \sqrt{7} + x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3,$   
 $41x - 18y - \sqrt{5} + 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 + 3\sqrt{7}(4xy - 4x^2 - y^2 - 2)$

7. Dayton2 [40]:  $2x^2 - x - x^3 + z^3, x - y - x^2 + xy + z^2, xy^2z - x^2z - y^2z + x^3z$
8. RG [41]:  $x^2x_2 - x_1x_2^2, x_1 - x_2^2$

表 5.1: 算法 3 的实验结果

系统	简单重根	方程数	变量数	重数	精度
Ojika1	(1, 2)	2	2	3	3 → 6 → 10 → 16
Ojika2	(1, 0, 0)	3	3	2	3 → 5 → 9 → 16
Ojika3	$(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1)$	3	3	2	3 → 6 → 10 → 16
Ojika4	(0, 0, 10)	3	3	3	4 → 5 → 9 → 23
Decker2	(0, 0)	2	2	4	3 → 6 → 20
DZ3	$(\frac{2\sqrt{7}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{7}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5})$	2	2	5	3 → 7 → 16
Dayton2	(0, 0, 0)	3	3	5	3 → 5 → 8 → 15
RG	(0, 0)	2	2	4	3 → 5 → 8 → 15

表 5.1 中最后一列为近似简单重根的精度变化, 每个箭头表示运行一次迭代算法 3.

**注释 5.5.** 虽然本文中对于二次收敛性的算法及证明都是关于有精确简单重根的多项式系统. 事实上, 算例表明, 我们的算法对一般的解析函数或者有一簇单根的多项式系统也是有效的.

结合 [16, 定理 8] 的结论, 我们同样可以给出多项式系统简单重根的可信验证, 如下例,

**例子 5.1.** 考虑以下多项式系统:

$$\begin{cases} f_1 = \frac{64}{73}X_1^2 - \frac{48}{73}X_1X_2 + \frac{9}{73}X_2^2 + \frac{\sqrt{73}}{12}X_2, \\ f_2 = (8X_1 - 3X_2)^2(3X_1 + 8X_2). \end{cases}$$

其中  $\xi = (0, 0)$  为  $f = \{f_1, f_2\}$  的简单三重根.

取近似根  $x_0 = (-0.01, 0.01)$ , 可以验证  $x_0$  不满足条件 (1.6). 对  $x_0$  进行两次算法 3 中的改进 Newton 迭代, 得到精化的近似根  $x = (-4.1291 \cdot 10^{-8}, -2.9505 \cdot 10^{-8})$ . 令  $g(X) = f(X) - f(x) - H_1(X - x) - H_2(X - x)^2$ . 此时通过计算,

$$\gamma_3 = \gamma_3(g, x) = \max(\hat{\gamma}_3(g, x), \gamma_{3,2}(g, x)) = \frac{12}{\sqrt{73}} \approx 1.4045,$$

并且

$$\|f(x)\| + \|H_1\| \frac{d}{4\gamma_3^3} + \|H_2\| \frac{d^2}{16\gamma_3^6} \approx 1.937364 \cdot 10^{-8} < \frac{d^4}{128\gamma_3^9 \|\mathcal{A}^{-1}\|} \approx 1.937370 \cdot 10^{-8}.$$

那么由 [16, 定理 8], 我们可以说明  $f$  在以  $x$  为圆心,  $\frac{d}{4\gamma_3^3} \approx 0.0076$  为半径的球内有且只有三个根 (计算重数). 又由于  $\frac{d}{4\gamma_3^3} < \frac{1}{2\gamma_3}$ , 由定理 5.3 可知, 以  $x$  为初始点的算法 3 中的改进 Newton 迭代将会二次收敛到  $f$  的简单三重根  $(0, 0)$ .

## 第六章 结论与展望

本文主要内容包括稀疏多项式插值和多项式系统近似简单重根的精细化.

在第二章中, 我们在 Moitra 结果的基础上证明了过采样可以使 Hankel 矩阵的奇异值产生相位突变, 并且当  $m$  足够大时,  $H_m$  的前  $t$  个奇异值都将大于 1. 因此给出了通过检测  $H_m$  的奇异值来判断多项式稀疏度的算法. 我们同时证明, 当过采样至 Hankel 矩阵的奇异值出现相位突变之后, Vandermonde 系统的条件数同样可以被控制, 并且通过一些随机方法可以高概率降低所需过采样的个数. 因此, 我们通过检测 Hankel 矩阵的奇异值便可确保求解插值问题的算法达到数值稳定.

在第三章中, 为保证第二章中给出的算法 NSD 不会过早的终止, 同时也为了回答 [4, 定理 4] 中提出的公开问题, 我们定义了单项式上的一个新的偏序关系, 证明了标准的 Hankel 矩阵同样满足提前终止定理. 并且, 我们利用 Hankel 矩阵奇异值的相位突变性质, 结合过采样方法和提前终止定理, 给出了准确判断多项式稀疏度的算法, 数值实验结果表现稳定.

在第四章中我们简要介绍了简单重根的代数结构, 定义了 Jacobian 矩阵的标准型, 并证明其可通过正交变换得到, 该标准型在算法设计过程中起了重要作用.

在第五章中, 我们首先针对 Jacobian 矩阵具有标准型的多项式简单二重根及简单三重根情形, 定义了改进的 Newton 迭代, 定量证明了其二次收敛性并给出收敛半径. 对 Jacobian 矩阵不具有标准型的多项式简单重根系统, 本文提出先通过近似点处的正交变换得到具有标准型的多项式系统, 并定义改进的 Newton 迭代, 在任意重根情形给出了定性的二次收敛性证明, 并在简单三重根情形给出了定量的收敛半径. 进一步, 结合多项式系统根的隔离界的相关结果, 我们同样可以给出多项式系统简单重根的可信验证, 并确保算法 3 在孤立半径内收敛到唯一的重根.

今后的工作主要包含以下几个方向:

1. 对非移位的提前终止定理给出更精细的概率分析, 即如何通过增大  $\zeta$  来减小算法失败概率.
2. 研究非线性系统奇异根的  $\alpha$  理论.



## 参考文献

- [1] Beckermann B, Golub G, Labahn G. On the numerical condition of a generalized hankel eigenvalue problem[J]. *Numerische Mathematik*. 2007, 106(1): 41–68. DOI: 10.1007/s00211-006-0054-x.
- [2] Giesbrecht M, Labahn G, Lee W. Symbolic-numeric sparse interpolation of multivariate polynomials[J/OL]. *Journal of Symbolic Computation*. 2009, 44(8):943 – 959. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2008.11.003>.
- [3] Moitra A. Super-resolution, extremal functions and the condition number of vandermonde matrices[A]. In *Proceedings of the Forty-Seventh Annual ACM on Symposium on Theory of Computing*[C/OL]. New York, NY, USA: ACM, 2015: 821–830. <http://doi.acm.org/10.1145/2746539.2746561>. DOI: 10.1145/2746539.2746561.
- [4] Kaltofen E, W.-s. Lee. Early termination in sparse interpolation algorithms[J]. *J. Symbolic Comput.* 2003, 36(3–4):365–400.
- [5] Dedieu J P, Shub M. On simple double zeros and badly conditioned zeros of analytic functions of n variables[J]. *Mathematics of Computation*. 2001, 70(233):319–327.
- [6] Berenstein C A, Vidras A, Gay R, et al. *Residue currents and Bézout identities*[M]. Birkhauser, 1993.
- [7] Blum L, Cucker F, Shub M, et al. *Complexity and Real Computation*[M]. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
- [8] Smale S. The fundamental theorem of algebra and complexity theory[J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1981, 4(1):1–36.
- [9] Shub M, Smale S. Computational complexity: On the geometry of polynomials and a theory of cost: I[J]. *Annales Scientifiques De L École Normale Supérieure*. 1985, 18(1):107–142.
- [10] Shub M, Smale S. Computational complexity: On the geometry of polynomials and a theory of cost: II[J]. *SIAM Journal on Computing*. 1986, 15(1):145–161.

- [11] Smale S. Newton's method estimates from data at one point[A]. In *The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics*[C]. New York: Springer, 1986: 185-196.
- [12] Shub M, Smale S. Complexity of bezout's theorem IV: Probability of success; extensions[J/OL]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1996, 33(1):128-148. <http://www.jstor.org/stable/2158428>.
- [13] Wang X, Han D. On dominating sequence method in the point estimate and smale theorem[J]. *Science in China Ser A*. 1990, 33(2):135-144.
- [14] Hauenstein J D, Sottile F. Algorithm 921: AlphaCertified: Certifying solutions to polynomial systems[J/OL]. *ACM Trans. Math. Softw.* August 2012, 38(4): 28:1-28:20. <http://doi.acm.org/10.1145/2331130.2331136>. DOI: 10.1145/2331130.2331136.
- [15] Li N, Zhi L. Computing isolated singular solutions of polynomial systems: case of breadth one[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2012, 50(1):354-372.
- [16] Hao Z, Jiang W, Li N, et al. Computing Simple Multiple Zeros of Polynomial Systems[J/OL]. *arXiv.org*. 2017. <http://https://arxiv.org/pdf/1703.03981>.
- [17] Kaltofen E, W.-s. Lee, Yang Z. Fast estimates of Hankel matrix condition numbers and numeric sparse interpolation[A]. In: Moreno Maza M, SNC'11 Proc. 2011 Internat. Workshop on Symbolic-Numeric Comput[C]. New York, N. Y.: ACM Press, June 2011: 130-136.
- [18] Cuyt A, Lee W. Sparse interpolation and rational approximation[J]. *Contemporary Mathematics*, American Mathematical Society. 2015.
- [19] Candès E J, Fernandez-Granda C. Super-resolution from noisy data[J/OL]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*. 2013, 19(6):1229-1254. <http://dx.doi.org/10.1007/s00041-013-9292-3>. DOI: 10.1007/s00041-013-9292-3.
- [20] Candés E J, Fernandez-Granda C. Towards a mathematical theory of super-resolution[J/OL]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 2014, 67(6):906-956. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.21455>. DOI: 10.1002/cpa.21455.



- 
- [21] Liao W, Fannjiang A. MUSIC for single-snapshot spectral estimation: Stability and super-resolution[J/OL]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 2016, 40(1):33 – 67. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acha.2014.12.003>.
- [22] Golub G H, Van Loan C F. *Matrix Computations*[M]. Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [23] Stoer J, Bulirsch. R. *Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.)*[M]. New York: Springer-Verlag, 2002.
- [24] Weyl H. Das asymptotische verteilungsgesetz der eigenwerte linearer partieller differentialgleichungen (mit einer anwendung auf die theorie der hohlraumstrahlung)[J/OL]. *Mathematische Annalen*. 1912, 71(4):441–479. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01456804>. DOI: 10.1007/BF01456804.
- [25] Mirsky L. Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms[J/OL]. *The Quarterly Journal of Mathematics*. 1960, 11(1):50–59. DOI: 10.1093/qmath/11.1.50.
- [26] Ben-Or M, Tiwari P. A deterministic algorithm for sparse multivariate polynomial interpolation[A]. In *Proc. Twentieth Annual ACM Symp. Theory Comput*[C]. New York, N.Y.: ACM Press, 1988: 301–309.
- [27] Giesbrecht M, Kaltofen E, Lee W. Algorithms for computing the sparsest shifts for polynomials via the Berlekamp/Massey algorithm[A]. In: Mora T, *Proc. 2002 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput. (ISSAC'02)*[C]. New York: ACM Press, 2002: 101–108.
- [28] Kaltofen E, Yuhasz G. A fraction free matrix Berlekamp/Massey algorithm[J]. *Linear Algebra and Applications*. November 2013, 439(9):2515–2526.
- [29] Arnold A, Kaltofen E L. Error-correcting sparse interpolation in the Chebyshev basis[A]. In *Proc. 2015 ACM Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput*[C]. New York, N. Y.: Association for Computing Machinery, 2015: 21–28.
- [30] Li N, Zhi L. Compute the multiplicity structure of an isolated singular solution: case of breadth one[J]. *Journal of Symbolic Computation*. 2012, 47:700–710.

- [31] Li N, Zhi L. Verified error bounds for isolated singular solutions of polynomial systems: case of breadth one[J]. *Theoretical Computer Science*. 2013, 479: 163–173.
- [32] Marinari M G, Mora T, Möller H M. Gröbner duality and multiplicities in polynomial system solving[A]. In *Proceedings of the 1995 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation[C/OL]*. New York, NY, USA: ACM, 1995: 167–179. DOI: 10.1145/220346.220368.
- [33] Mourrain B. Isolated points, duality and residues[J]. *J. of Pure and Applied Algebra*. 1996, 117 & 118:469–493.
- [34] Stetter H. *Numerical Polynomial Algebra[M]*. Philadelphia: SIAM, 2004.
- [35] Dayton B, Zeng Z. Computing the multiplicity structure in solving polynomial systems[A]. In: Kauers M. *Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation[C]*. New York, NY, USA: ACM, 2005: 116–123.
- [36] Gohberg I C, Kreĭn M G. Translated from the Russian by A. Feinstein. *Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18 Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators[M]*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1969: xv+378.
- [37] Stewart G W. Error and perturbation bounds for subspaces associated with certain eigenvalue problems[J/OL]. *SIAM Review*. 1973, 15(4):727–764. <http://www.jstor.org/stable/2028728>.
- [38] Ojika T. Modified deflation algorithm for the solution of singular problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1987, 123(1):199–237.
- [39] Decker D, Keller H, Kelly C. Convergence rate for Newton’s method at singular points[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1983, 20:296–314.
- [40] Dayton B. Numerical local rings and local solutions of nonlinear systems[A]. In *Proceedings of the 2007 International Workshop on Symbolic-Numeric Computation[C]*. New York, NY, USA: ACM, 2007: 79-86.

- 
- [41] Rump S, Graillat S. Verified error bounds for multiple roots of systems of nonlinear equations[J]. Numerical Algorithms. 2010, 54(3):359–377.



## 发表文章目录

1. *Numerical sparsity determination and early termination In ISSAC'2016 Proc. 2016 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput.* Zhiwei Hao, Erich L. Kaltofen, and Lihong Zhi.
2. *Computing Simple Multiple Zeros of Polynomial Systems.* Zhiwei Hao, Wenrong Jiang, Nan Li and Lihong Zhi. Submitted.



# 简 历

## 作者基本情况

郝志伟, 男, 1990 年 7 月 25 日出生于河北省秦皇岛市, 中国科学院数学与系统科学研究院博士研究生.

## 教育经历

2012.9–2017.6 硕博研究生, 应用数学专业, 中国科学院数学与系统科学研究院, 数学机械化重点实验室, 导师: 支丽红研究员.

2008.9–2012.6 理学学士, 信息与计算科学专业, 吉林大学数学学院.

## 学术经历

1. 第 41 届国际符号和代数计算会议 (ACM ISSAC 2016), 加拿大滑铁卢, 2016 年 7 月.
2. 多伦多大学 Fields 中心交流项目 “Thematic Program on Computing Algebra”, 加拿大多伦多, 2015 年 9 月至 12 月.
3. 学术会议: “SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry (SIAM AG 15)”, 韩国大田, 2015 年 8 月.
4. 韩国 NIMS 中心学术交流项目 “Thematic Program on Applied Algebraic Geometry”, 韩国大田, 2014 年 6 月.

## 获奖经历

- |        |                 |
|--------|-----------------|
| 2016 年 | 博士研究生国家奖学金      |
| 2016 年 | 数学与系统学院院长奖学金特等奖 |
| 2016 年 | 中科院大学三好学生标兵     |
| 2013 年 | 硕士研究生国家奖学金      |





## 致 谢

五年的博士生涯转瞬即逝,回首走过的路,感慨颇多.首先诚挚的感谢我的导师支丽红研究员.她严谨的治学态度和对科研事业的奉献精神深深的激励着我,她对前沿问题准确的把握和毫无保留的悉心指导照亮了我的科研之路,她宽厚仁慈的胸怀和积极乐观的生活态度为我树立了学习的榜样.师恩似海,没齿难忘!

衷心的感谢 Erich L. Kaltofen 教授在我完成我的第一篇学术文章中给予我的鼓励与帮助,感谢他在科研和生活中给我的指导与建议.祝他吉祥如意,笑口常开!

感谢数学机械化中心的全体同仁.感谢吴文俊院士,万哲先院士,李邦河院士,高小山研究员,李洪波研究员,李子明研究员,刘卓军研究员,王定康研究员,闫振亚研究员,冯如勇副研究员,袁春明副研究员,程进三副研究员,感谢他们五年来给予我的关心和鼓励.感谢周代珍老师,李佳老师和牛园园老师,感谢她们帮我处理诸多日常事务.感谢我的合作者李楠师兄,姜文嵘,和你们合作很荣幸也很愉快!感谢杨争峰师兄,陈绍示师兄,郭峰师兄,林旺师兄,郭庆东师兄,王础师兄,杨志红,葛京通,难忘我们”中国队”并肩战斗的日子,祝你们心想事成!

特别感谢我的妻子何盼女士,感谢她的包容和体贴,感谢她在科研中给我带来的灵感.难忘我们一起上课,一起讨论问题的日子,这段共同奋斗的博士生活必将成为我们日后美好的回忆!

感谢白志平,迟迅,邓涧秋,李瑞囡,李兴娥,刘飞,刘如祥,伊帅,王健,王卓,张宝川,张辉鑫,张念溥,张鹏,感谢他们的鼓励与支持,祝你们前程似锦!

最后谨以此文献给我挚爱的双亲,感谢他们在背后默默的付出,感谢在我遇到挫折的时候他们温暖的怀抱.祝他们身体健康!