University of Chinese Academy of Sciences

# 硕士学位论文

## 无限维量子 Strassen 定理


作者姓名：葛京通

指导教师：支丽红 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院


学位类别：工学硕士

学科专业：计算机应用技术


培养单位：中国科学院数学与系统科学研究院


2019 年 6 月

# Infinite Dimensional Quantum Strassen Theorem

A thesis submitted to the
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Science
in Computer Application Technology

By
Jingtong Ge
Supervisor: Professor Lihong Zhi

Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Science

June, 2019

## 中国科学院大学
## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日　　期：

## 中国科学院大学
## 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：　　　　　　　　　　导师签名：

日　　期：　　　　　　　　　　日　　期：

# 摘　要

对于两个集合（有限或者可数无限），给定的支撑集和边缘分布，Strassen 在 1965 年给出了在这两个集合的笛卡尔积上存在对应联合概率分布的充分必要条件。在量子计算中有许多与概率论中类似的基本概念，如概率分布对应于量子计算中的密度算子，边缘分布对应于量子计算中的部分迹，集合的笛卡尔积对应于希尔伯特空间的张量积等。本论文的目的是对于两个可分希尔伯特空间（至少一个是无限维），给定支撑集和部分迹，给出在这两个希尔伯特空间的张量积空间中存在对应密度算子的充分必要条件，即无限维量子 Strassen 定理。

在概率论中，Strassen 定理在有限维的情形等价于一个可以用沉浸理论解决的线性规划问题。有限维量子 Strassen 定理已经由周立，应圣钢，俞能昆和应明生提出并给出了证明。本文的主要贡献是将量子 Strassen 定理推广到无限维情形。我们先将给定的支撑集投影到有限维的子空间，在有限维支撑集下将量子提升问题转化为一系列凸优化问题，并且证明了存在量子提升的充分必要条件是这些凸优化问题解的极限为 0。对于每一个凸优化问题，在给定的误差下，我们可以用内点法，在多项式时间内找到其最优值，通过验证这些最优值的极限是否趋向于 0 来判断量子提升是否存在。对于支撑集是有限维的特殊情形，我们把这个问题转化为一系列半正定优化问题，通过验证这些半正定优化问题的最优解的极限是否为 1，可以判断是否存在量子提升。

**关键词：** 量子耦合，量子提升，量子 Strassen 定理，可分希尔伯特空间，弱收敛，凸优化，半正定优化

# Abstract

Strassen (1965) gave necessary and sufficient conditions on the existence of a probability distribution on Cartesian product of two sets with given support and two marginals. There is a simple and natural correspondence between probability theory and quantum theory, a density operator is a quantum analog of a probability distribution, partial traces of the density operators are analog of marginals, tensor product is analog of Cartesian product, and more. The aim of this thesis is to give the necessary and sufficient conditions on the existence of a density operator on the tensor product of two separable Hilbert spaces with given support and partial trace, where at least one of the Hilbert spaces is infinite dimensional, which is called infinite dimensional quantum Strassen theorem.

Finite Strassen theorem is reduced to a linear programming problem which can be solved using flow theory. Finite dimensional quantum Strassen theorem has been given and proved by L.Zhou, S.Ying, N.Yu and M.Ying(2018). The main contribution of this thesis is the generalization of quantum Strassen theorem to infinite dimensional case. We project the support to a finite dimensional subspace, then thansfer the problem to a set of convex optimization problems. We prove that the necessary and sufficient condition on the existence of quantum lifting is that the limit of solutions of these convex optimization problems is 0. One can use an interior method to find the minimum of each convex optimization problem in polynomial time within a given precision, then determine whether a witness of the quantum lifting exists or not by checking the limit of the minima. When the dimension of the given support is finite, we turn this problem to a sequence of SDP problems. One can check the limit of solutions of these SDP problems to judge whether a witness of the quantum lifting exists or not.

**Keywords:** quantum coupling, quantum lifting, quantum Strassen theorem, separable Hilbert space, weak convergence, convex optimization, SDP

# 目 录

# 第 1 章 引言

## 1.1 问题陈述和研究动机

假设 $\mu$ 是可分空间 $\Omega = [m] \times [n]$ 上的一个概率分布，这里 $m, n$ 是正整数，且 $[m] = \{1, \ldots, m\}$。一个 $\Omega$ 上的概率子分布 (sub-distribution) 是一个非负的 $m \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$，它的所有元素的和不大于 1。当它的所有元素之和为 1 时，称它为一个分布 (distribution)。令 $\mathbf{1}_m = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$，那么它的边际分布（marginal）：$\mu_1 = A\mathbf{1}_n$，$\mu_2 = A^\top \mathbf{1}_m$ 是 $[m]$，$[n]$ 上对应的一个概率分布。$\mu$ 的支撑集 (support)，记为 $\mathrm{supp}\,\mu$，是一个二部图 (bipartite graph)$G = (V, E)$，这里 $V = [m] \cup [n]$，$E = \{(i, j), i \in [m], j \in [n], a_{ij} > 0\}$。于是就有下面这个自然的逆问题：

问题 1.1. 给定在 $[m]$ 和 $[n]$ 上的概率分布 $\mu_1$、$\mu_2$，求存在一个定义在 $[m] \times [n]$ 上的概率分布 $\mu$，使得它的支撑集包含在一个给定的二部图 $G = ([m] \cup [n], E)$ 中，并且它的边际分布是 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 的充分必要条件。

这是一个经典的组合优化问题 (combinatorial optimization)[3]，可以用基本的沉浸理论 (flow theorem) 来解决 [5]。对于两个紧度量空间 (compact metric spaces) 乘积构成集合的 Borel $\sigma$-代数下的一个概率分布，Strassen [16] 给出了问题1.1的一个解。Strassen 没有局限于解决有限维的情形，实际上，Strassen 考虑了问题1.1的一个更一般的 $\varepsilon \geq 0$ 的形式，具体可以参考 [16, 定理 11]。

在最近的一篇文章 [18] 中，周立等人描述并且解决了问题1.1在量子情形下的一个对应问题。假设 $\mathcal{H}$ 是一个在复数域上的有限维内积空间 (inner product space)，维数为 $n$ 。标准内积 (inner product) 定义为：

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x}.$$

我们可以用含有标准内积的 $\mathbb{C}^n$ 空间来确定 $\mathcal{H}$。$\mathrm{B}(\mathcal{H})$ 是由有界线性算子 (bounded linear operator)$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 组成的集合。$\mathrm{S}(\mathcal{H})$ 是所有自伴随算子 *(selfadjoint operator)* 组成的集合，表示成矩阵时，它是 $n \times n$ 实自共轭矩阵构成的空间。$\mathrm{S}_+(\mathcal{H})$ 是 $\mathrm{S}(\mathcal{H})$ 中半正定算子 (semidefinite operator) 构成的凸锥 (cone)，$\mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H})$ 是 $\mathrm{S}(\mathcal{H})$ 中迹为 1 的半正定算子构成的凸集，显然 $\mathrm{S}_+(\mathcal{H}) \supset \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H})$。密度算子 *(density operator)* 是迹为 1 的半正定算子，所有的密度算子组成的集合即为

$\mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H})$。在 $\mathrm{S}(\mathcal{H})$ 中，我们定义一个偏序 *(partial order)*，

$$A \geq B, \text{如果} A - B \in \mathrm{S}_{+}(\mathcal{H}).$$

对于所有的 $\rho \in \mathrm{S}(\mathcal{H})$，$\rho$ 的支撑集 *(support)* 定义为由 $\rho$ 的非零特征向量张成的子空间，记作 $\operatorname{supp}\rho$，这也是 $\mathcal{H}$ 在 $\rho$ 作用下的值域 $\rho(\mathcal{H})$，。

若 $\mathcal{H}_1 \equiv \mathbb{C}^m, \mathcal{H}_2 \equiv \mathbb{C}^n$。令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \equiv \mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{C}^{m\times n}$ 为它们定义的二部空间 (bipartite space)。空间 $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ 可以看作是由 $(mn)\times(mn)$ 矩阵 $T = [t_{(i,p)(j,q)}] \in \mathbb{C}^{(mn)\times(mn)}$ 构成的，这里 $i, j \in [m], p, q \in [n]$。由此可以写出两个自然的收缩映射 (contraction map)

$$\mathrm{Tr}_2 : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_1),\ \ \mathrm{Tr}_2\, T = \left[\sum_{p=1}^{n} t_{(i,p)(j,p)}\right], i, j \in [m],$$
$$\mathrm{Tr}_1 : \mathrm{B}(\mathcal{H}) \to \mathrm{B}(\mathcal{H}_2),\ \ \mathrm{Tr}_1\, T = \left[\sum_{i=1}^{m} t_{(i,p)(i,q)}\right], p, q \in [n].$$

密度算子 $\rho \in \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H})$ 是概率论中概率分布在量子计算中类似的定义。不难发现 $\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\,\rho \in \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H}_1)$，$\rho_2 = \mathrm{Tr}_1\,\rho \in \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H}_2)$ 是边际分布 $\mu_1$ 和 $\mu_2$ 在量子计算中的类似定义。因此对应地可以把问题1.1改写为：

问题 1.2. 令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$，$\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是有限维的内积空间。若 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$ 是一个闭子空间。给定两个密度算子 $\rho_i \in \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H}_i)$，$i = 1, 2$。存在 $\rho \in \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H}), \operatorname{supp}(\rho) \subseteq \mathcal{X}$ 使得 $\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\,\rho, \rho_2 = \mathrm{Tr}_1\,\rho$ 的充分必要条件是什么？

这个问题可以用一个半正定优化问题 (semi-definite programming, SDP) 来描述：令 $P_{\mathcal{X}}$ 为在 $\mathcal{X}$ 上的正交投影。考虑下面这个求最大值的问题

$$\max\{\mathrm{Tr}\, X P_{\mathcal{X}}; X \in \mathrm{S}_{+}(\mathcal{H}),\ \mathrm{Tr}_2\, X = \rho_1, \mathrm{Tr}_1\, X = \rho_2\}. \tag{1.1}$$

当 $X \in \mathrm{S}_{+}(\mathcal{H})$ 时，$\mathrm{Tr}\, X = \mathrm{Tr}\, X P_{\mathcal{X}}$ 意味着 $\operatorname{supp} X \subset \mathcal{X}$。问题1.2有解当且仅当这个最大值问题的解是 1。所以量子提升问题可转化为半正定规划问题。运用内点法，在一个给定的 $\varepsilon > 0$ 下，可以在多项式时间内找到半正定规划问题的最大值，具体方法参考 Nesterov 和 Nemirovsky 的著作 [12]。

周立等人在文章 [18] 中给出了有限维量子提升的充分必要条件：对于任意 $Y_i \in \mathrm{S}(\mathcal{H}_i), i \in [2]$ 有下面的式子成立：

$$P_{\mathcal{X}^{\perp}} \geq Y_1 \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2 \Rightarrow \mathrm{Tr}(\rho_1 Y_1) \leq \mathrm{Tr}(\rho_2 Y_2). \tag{1.2}$$

这个条件与解决问题1.1用的条件类似。

这篇论文的目的就是回答问题1.2在 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 都是无限维的情形。

问题 1.3. 令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$，$\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是可分希尔伯特空间 (separable Hilbert space)。若 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$ 是一个闭的子空间。给定两个密度算子 $\rho_i \in S_{+,1}(\mathrm{H}_i)$，$i = 1, 2$，存在 $\rho \in S_{+,1}(\mathcal{H}), \mathrm{supp}(\rho) \subseteq \mathcal{X}$ 使得 $\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\, \rho, \rho_2 = \mathrm{Tr}_1\, \rho$ 的充分必要条件是什么？

在概率论中，概率耦合和概率提升常常用来比较两个概率分布之间的关系，相应的，量子耦合和量子提升 (定义在第2.2节) 也可以用来比较两个量子程序之间的关系，这将为量子程序验证带来很大的便利，也是今后一个很重要的研究方向。目前周立等人证明了有限维量子 Strassen 定理，即在 $\mathcal{H}$ 是有限维的情形，量子提升存在的充分必要条件，由此说明了量子耦合和量子提升定义在有限维时的合理性。在概率论中，Strassen 定理存在有限维形式和无限维形式，那么一个自然的问题就是，在无限维时，量子提升存在的充分必要条件是什么？

## 1.2 论文结构和主要成果

在这篇论文中，我们从可分希尔伯特空间的一些基本定义开始，把量子计算中基本研究对象的定义推广到可分希尔伯特空间中，然后再证明无限维情形下的量子提升存在的充分必要条件。主要成果如下。

- 在 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是有限维的情形下，我们给出了一个更为一般的半正定优化问题

$$\mu(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) = \max\{\mathrm{Tr}(XP_{\mathcal{X}}); X \in \mathrm{S}_+(\mathcal{H}), \mathrm{Tr}_2\, X \le \rho_1, \mathrm{Tr}_1\, X \le \rho_2\}.$$

我们证明了这个半正定优化问题满足强对偶性 (strong duality) 条件，所以可以通过求对偶命题来求解原命题，并且证明了量子提升存在的充分必要条件是

$$\mu(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) = 1.$$

这一部分工作的介绍在论文第3.2节。

- 无限维的量子 Strassen 定理

为了解决无限维的量子 Strassen 定理，我们对这个问题进行了分解，首先考虑 $\mathcal{X}$ 是有限维情形，再考虑 $\mathcal{X}$ 是无限维情形。

- 假设 $\mathcal{X}$ 是有限维的，$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是无限维可分希尔伯特空间，$\mathbf{e}_{i,1}$ and $\mathbf{e}_{i,2}, i \in \mathbb{N}$ 是它们的一组基。用 $P_{n,i}$ 表示在子空间 $\mathrm{span}(\mathbf{e}_{1,i}, \ldots, \mathbf{e}_{n,i})$ 上的正交投影，$n \in \mathbb{N}, i \in [2]$。令 $\mathcal{X}_n = (P_{n,1} \otimes P_{n,2}\mathcal{X})$，$\rho_{i,n} = P_{n,i}\rho_i P_{n,i}, i \in [2]$。考虑下面这个最值问题

$$\begin{aligned}\mu_n(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) \;=\; & \max\{\mathrm{Tr}(XP_{\mathcal{X}_n}); \\ & \mathrm{Tr}_2\, X \le \rho_{1,n}, \mathrm{Tr}_1\, X \le \rho_{2,n}, X \in (P_{n,1} \otimes P_{n,2})\mathrm{S}_+(\mathcal{H})(P_{n,1} \otimes P_{n,2})\}\end{aligned}$$

我们证明了存在量子提升的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(\rho_1,\rho_2,\mathcal{X})=1.$$

这一部分工作的介绍在论文第3.3.2节。

- 假设 $\mathcal{X}$ 是无限维的，且 $\mathbf{x}_i, i\in\mathbb{N}$ 是 $\mathcal{X}$ 的一组基。若 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 是无限维可分希尔伯特空间。在这种情形下，我们给出了一个新的凸优化 (convex optimization) 问题，并给出了量子提升存在的充分必要条件。把 $\mathcal{X}_n$ 记为由 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ 张成的子空间，考虑在 $\mathrm{B}(\mathcal{X}_n)$ 上的一个有界连续凸函数 (continuous and convex function)

$$f(L)=\|\operatorname{Tr}_2 L-\rho_1\|_1+\|\operatorname{Tr}_1 L-\rho_2\|_1.$$

然后考虑下面这个优化问题

$$\mu_n(\rho_1,\rho_2)=\min\{f(X),\ X\in\mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H})\cap\mathrm{B}(\mathcal{X}_n)\},$$

这里 $n\in\mathbb{N}$。我们证明了量子提升存在的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(\rho_1,\rho_3)=0.$$

当 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 中有一个是有限维时，我们给出了一个简短的证明。而对于一般情形，即 $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 都是无穷维时，基于 Banach-Saks 定理，正交投影，对角线元素与奇异值的关系等，我们证明了引理3.17。有了这个引理，我们可以轻松地给出无限维 Strassen 定理的证明。这一部分工作的介绍在论文第3.3.3节。

# 第 2 章　背景知识

## 2.1　可分希尔伯特空间

我们回顾论文中需要用到的有关可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的一些结论。主要参考的是 [6, 14]。$\mathcal{H}$ 中的元素用小写的加粗字母来表示，例如 $\mathbf{x}$。把 $\mathcal{H}$ 空间中的内积记为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$，这个内积关于 $\mathbf{x}$ 是线性的，关于 $\mathbf{y}$ 是反线性的。$\mathbf{x}$ 的范数定义为

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

把 $\mathcal{H}$ 上定义的线性泛函 (linear functional) 记为 $\mathcal{H}^\vee$。$\mathcal{H}^\vee$ 中一个由 $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ 确定的线性泛函 $f$ 为：

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}, f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

我们把这个 $f$ 记为 $\mathbf{y}^\vee$。这里：

$$(a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2)^\vee = \bar{a}_1\mathbf{y}_1^\vee + \bar{a}_2\mathbf{y}_2^\vee.$$

把 $\mathbb{N}$ 记为正整数的集合。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们记 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，且令 $[\infty] = \mathbb{N}$。$\mathcal{H}$ 是可分的，如果它有一组正交基 $\mathbf{e}_i, i \in [N]$，这里 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。因此当 $N \in \mathbb{N}$ 时，$\mathcal{H}$ 是有限维的。

我们用大写字母 $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，表示有界线性算子。$L$ 的算子范数 *(operator norm)* 定义为

$$\|L\| = \sup\{\|L\mathbf{x}\|, |\mathbf{x}| \leq 1\}.$$

$L$ 的伴随算子 *(adjoint operator)* 记为 $L^\vee$，且满足

$$\langle L\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, L^\vee\mathbf{y} \rangle.$$

**定义 2.1** (可分希尔伯特空间的奇异值分解 (singular value decomposition,SVD))**.** $L$ 是一个有界线性算子，如果它可以表示成

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(L)\mathbf{g}_i\mathbf{f}_i^\vee, \tag{2.1}$$
$$\|L\| = \sigma_1(L) \geq \cdots \geq \sigma_n(L) \geq \cdots \geq 0, \lim_{i\to\infty} \sigma_i(L) = 0.$$

那么我们称它有奇异值分解（或者称为施密特分解）。

这里 $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \ldots\}, \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n, \ldots\}$ 是 $\mathcal{H}$ 中两组两两正交的向量集合。$\sigma_n(L)$ 被称为 $L$ 的第 $n$ 个奇异值 (singular value)，$\mathbf{g}_n$，$\mathbf{f}_n$ 被称为 $L$ 的第 $n$ 个左奇异向量，和右奇异向量。

对于一个有界线性算子 $L$, 我们列出下面几个主要的概念：

1. $L$ 被称为自伴随算子，如果 $L^\vee = L$。如果 $L$ 存在奇异值分解，那么 $L$ 是自伴随的当且仅当 $\mathbf{f}_i = \varepsilon_i \mathbf{g}_i, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 成立。

2. $L$ 被称为半正定（正定）算子，如果 $\langle L\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0$ ($\langle L\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle > 0$) 对所有的 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 都成立。

3. $L$ 被称为秩一 *(rank one)* 算子，如果 $L = \mathbf{x}\mathbf{y}^\vee$，这里 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$。因此 $L(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle \mathbf{x}$。一个秩一算子 $L$ 是自伴随的当且仅当 $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ 对于某一个 $a \in \mathbb{C}$ 成立。

4. $L$ 被称为紧算子，如果 $L$ 在任何有界子集下对应的像集是一个紧的集合。$L$ 是一个紧算子，当且仅当 $L$ 存在奇异值分解。

5. $L$ 被称为迹类 *(trace class)* 算子，如果 $L$ 有奇异值分解，且 $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(L) < \infty$。

对于一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，我们给出从 $\mathcal{H}$ 映射到 $\mathcal{H}$ 的算子组成的空间的一些定义：

1. $\mathrm{B}(\mathcal{H})$ 记为有界线性算子组成的空间。

2. $\mathrm{S}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{B}(\mathcal{H})$ 记为自伴随算子组成的空间。易知这些算子都是实算子。

3. $\mathrm{S}_{++}(\mathcal{H})(\mathrm{S}_{+}(\mathcal{H}))$ 记为由正定（半正定）自伴随算子组成的开集。

4. $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ 记为紧算子的闭理想（左理想或者右理想）。

5. $\mathrm{T}(\mathcal{H})$ 是 $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ 中的迹类算子组成的子集。

对于 $A, B \in \mathrm{S}(\mathcal{H})$，我们定义一个偏序“$>, \geq$”，对应的记为 $A > B$ 和 $A \geq B$，如果 $A - B \in \mathrm{S}_{++}(\mathcal{H})$ 或者 $A - B \in \mathrm{S}_{+}(\mathcal{H})$。容易得出 $L \in \mathrm{S}_{+}(\mathcal{H}) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H})$ 当且仅当在 $L$ 的奇异值分解中 $\mathbf{f}_i = \mathbf{g}_i$ 对于所有的 $i \in \mathbb{N}$ 成立。因此所有的 $\sigma_i(L)^2$ 是紧算子 $LL^\vee, L^\vee L \in \mathrm{S}_{+}(\mathrm{H}) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H})$ 的正特征值。

如果 $A \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$，$L \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$，那么 $AL, LA \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$。进一步的，我们可以得到如下的不等式

$$\sigma_i(AL), \sigma_i(LA) \leq \sigma_i(L)\|A\|,\ i \in \mathbb{N}.$$

对于 $\mathrm{S}(\mathcal{H})$ 中的一个算子 $L$，我们把 $L$ 的支撑集定义为 $\mathcal{H}$ 在映射 $L$ 下像集的闭包，记作 $\operatorname{supp} L$。这样我们就可以把 $L' \in \mathrm{B}(\operatorname{supp} L)$ 对应地看成 $L$ 限制在它的支撑集中的算子。

我们把 $L \in \mathrm{T}(\mathcal{H})$ 的 1 范数 (迹范数 (trace norm), $\|\cdot\|_1$) 记为 $\|L\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(L) < \infty$。这样 $\|L\|_1$ 是 $\mathrm{T}(\mathcal{H})$ 中定义的一个范数。进一步地，$\mathrm{T}(\mathcal{H})$ 在这个范数下是一个闭的巴拿赫空间。由之前提到的关于奇异值的不等式可以推出，如果 $L \in \mathrm{T}(\mathcal{H})$

那么 $AL, LA \in \mathrm{T}(\mathcal{H})$。并且

$$\|AL\|_1, \|LA\|_1 \le \|L\|_1\|A\|. \tag{2.2}$$

如果 $L \in \mathrm{T}(\mathcal{H})$，那么对于每一个正交基 $\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}$，有如下不等式成立，

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle L\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i\rangle| \le \|L\|_1.$$

此外，求和 $\sum_{i=1}^{\infty}\langle L\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i\rangle$ 的值是与基底的选取无关的，所以我们把 $L$ 的迹 (trace) 定义为

$$\operatorname{Tr} L = \sum_{i=1}^{\infty}\langle L\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i\rangle.$$

给定 $L$ 的一个奇异值分解 (2.1)，我们可以得到

$$\operatorname{Tr} L = \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i(L)\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{f}_i\rangle. \tag{2.3}$$

因此，如果 $L \in \mathrm{S}(\mathcal{H}) \cap \mathrm{T}(\mathcal{H})$，那么 $L$ 的迹就是 $L$ 的所有特征值的和。特别地，$\operatorname{Tr} L = \|L\|_1$ 当且仅当 $L \in \mathrm{S}_+(\mathcal{H}) \cap \mathrm{K}(\mathcal{H})$。对于一个给定的可分希尔伯特空间，我们把 $\mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{S}_+(\mathcal{H})$ 记为所有迹为 1 的半正定算子组成的集合。记 $\mathrm{T}_+(\mathcal{H}) = \mathrm{S}_+(\mathcal{H}) \cap \mathrm{T}(\mathcal{H})$，$\mathrm{T}_{+,1}(\mathcal{H}) = \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H}) \cap \mathrm{T}(\mathcal{H})$。

最后我们回顾下面这个结论：

$$\operatorname{Tr} LA = \operatorname{Tr} AL = \operatorname{Tr} A^{1/2}LA^{1/2} \ge 0$$

这里 $L \in \mathrm{T}_+(\mathcal{H})$ 且 $A \in \mathrm{S}_+(\mathcal{H})$。

接下来我们讨论在 $\mathcal{H}$ 和 $\mathrm{T}(\mathcal{H})$ 上的弱收敛。

**定义 2.2.** 1. 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，一个序列 $\mathbf{x}_n \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}$ 称为在弱拓扑 (weak topology) 下收敛到 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$，记为 $\mathbf{x}_n \overset{w.t.}{\to} \mathbf{x}$，若

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}, \lim_{n\to\infty}\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

2. 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，一个序列 $A_n \in \mathrm{B}(\mathcal{H}), n \in \mathbb{N}$ 称为在弱算子拓扑 (weak operator topology) 下收敛到 $A \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$，记为 $A_n \overset{w.o.t.}{\to} A$，若

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}, \lim_{n\to\infty}\langle A_n\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

给定一个有界序列 $\mathbf{x}_n, \|\mathbf{x}_n\| \le c, n \in \mathbb{N}$，存在一个子列 $n_k, k \in \mathbb{N}$, 和一个 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, 使得 $\mathbf{x}_{n_k} \overset{w.t.}{\to} \mathbf{x}$。此外，我们还可以得到不等式

$$\|\mathbf{x}\| \le \liminf_{n\to\infty}\|\mathbf{x}_{n_k}\|. \tag{2.4}$$

实际上，如果我们写出展开 $\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i,n}\mathbf{e}_i$，然后按康托对角原理选取一个子列 $n_k, k \in \mathbb{N}$ 使得 $\lim_{k\to\infty} x_{i,n_k} = x_i$ 对所有的 $i \in \mathbb{N}$ 都成立，然后我们令 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$，则 $\mathbf{x}$ 是这个子列 $\mathbf{x}_{n_k}$ 的一个弱极限。

下面的例子说明了不等式 (2.4) 在某些情况下是取不到等号的

**例 2.1.** $\mathcal{H}$ 是一个可分希尔伯特空间，它的一组基为 $\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}$。序列 $\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}$ 是一个有界序列。$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}, \lim_{n\to\infty}\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{y}\rangle = 0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{y}\rangle$，所以 $\mathbf{e}_i \overset{w.t.}{\to} \mathbf{0}$。$\|\mathbf{0}\| < \liminf_{i\to\infty} \|\mathbf{e}_i\| = 1$。

若 $A_n \overset{w.o.t.}{\to} A$，则 $(A_n)^\vee \overset{w.o.t.}{\to} A^\vee$。特别的，如果 $A_n \in \mathrm{S}(\mathcal{H})$ 对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 成立，那么 $A \in \mathrm{S}(\mathcal{H})$。此外，如果 $A_n \in \mathrm{S}_+(\mathcal{H}), n \in \mathbb{N}$，那么 $A \in \mathrm{S}_+(\mathcal{H})$.

接下来这个引理是经典的，我们在这里为了论文的完整性给出它的一个证明。

**引理 2.1.** $\mathcal{H}$ 是一个可分希尔伯特空间。

*(1) 假设 $A_n, B_n \in \mathrm{S}(\mathcal{H})$ 对 $n \in N$ 成立，且 $A_n \geq B_n$ 对 $n \in \mathbb{N}$ 成立。此外，$A_n \overset{w.o.t.}{\to} A, B_n \overset{w.o.t.}{\to} B \in \mathrm{S}(\mathcal{H})$，那么 $A \geq B$。*

*(2) 假设 $A_n \in \mathrm{T}(\mathcal{H})$ 且 $\|A_n\|_1 \leq c$ 对 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。那么存在一个子列 $\{n_k\}$ 使得 $A_{n_k} \overset{w.o.t.}{\to} A \in \mathrm{T}(\mathcal{H})$，并且满足 $\|A\|_1 \leq \liminf \|A_{n_k}\|_1$。*

证明. (1) $A_n \geq B_n$ 等价于不等式 $\langle A_n\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq \langle B_n\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ 对于所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ 成立。由 $A_n \overset{w.o.t.}{\to} A, B_n \overset{w.o.t.}{\to} B \in S(\mathcal{H})$ 可知 $\lim_{n\to\infty}\langle A_n\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle, \lim_{n\to\infty}\langle B_n\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle B\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$, 对于所有的 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ 都成立。因此 $A \geq B$。

(2) 写出每个 $A_n$ 的奇异值分解:

$$A_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(A_n)\mathbf{g}_{i,n}\mathbf{f}_{i,n}^\vee.$$

这里 $\{\sigma_i(A_n)\}$ 是一个非增序列，且使得 $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(A_n) \leq c$，对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。并且，集合 $\{\mathbf{g}_{i,n}\}, \{\mathbf{f}_{i,n}\}, i \in \mathbb{N}$ 是 $\mathcal{H}$ 中两组正交向量组成的集合。用康托对角原则选取一个子列 $n_k, k \in \mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_i(A_{n_k}) = \sigma_i,\ \mathbf{g}_{i,n_k} \overset{w.t.}{\to} \mathbf{g}_i,\ \mathbf{f}_{i,n_k} \overset{w.t.}{\to} \mathbf{f}_i, i \in \mathbb{N}.$$

易得，$\{\sigma_i\}$ 是一个非负不增的序列，使得对于 $N \in \mathbb{N}$ 中每一个都有

$$\sum_{i=1}^{N} \sigma_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i(A_{n_k}) \leq c.$$

因此 $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i \le c$ 且 $\lim_{i\to\infty}\sigma_i = 0$。

令 $A = \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{f}_i^{\vee}$。注意到

$$\|A\|_1 \le \sum_{i=1}^{\infty}\|\sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{f}_i^{\vee}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i\|\mathbf{g}_i\|\|\mathbf{f}_i\| \le \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i \le c.$$

因此 $A \in \mathrm{T}(\mathcal{H})$。所以，有 $\|A\|_1 \le \liminf\|A_{n_k}\|_1$。

下面只要证明 $A_{n_k} \overset{w.o.t.}{\to} A$。为了简便且不失一般性，我们给出下面两个假设。第一，$n_k = k$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$。第二，给定的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ 满足 $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \le 1$。为了证明 $A_k \overset{w.o.t.}{\to} A$，我们需要验证以下条件成立：对于一个给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $K(\varepsilon) = K(\varepsilon, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{N}$ 使得，对于任意 $k > K(\varepsilon)$ 我们可以得到 $|\langle (A_k - A)\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| < 3\varepsilon$。

由 $\sigma_k \ge 0, k \in \mathbb{N}$ 且 $\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k \le c$ 可知，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{k=N}^{\infty}\sigma_k < \varepsilon$。特别地，$\sigma_N < \varepsilon$。现在我们令

$$B_k = \sum_{i=1}^{N}\sigma_i(A_k)\mathbf{g}_{i,k}\mathbf{f}_{i,k}^{\vee}, \quad C_k = \sum_{i=N+1}^{\infty}\sigma_i(A_k)\mathbf{g}_{i,k}\mathbf{f}_{i,k}^{\vee},$$

$$B = \sum_{i=1}^{N}\sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{f}_i^{\vee}, \quad C = \sum_{i=N+1}^{\infty}\sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{f}_i^{\vee}$$

因此 $A_k = B_k + C_k$，$A = B + C$。易知 $B_k \overset{w.o.t.}{\to} B$。因此，存在 $K_1(\varepsilon) = K_1(\varepsilon, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{N}$ 使得对于 $k > K_1(\varepsilon)$ 有 $|\langle (B_k - B)\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| < \varepsilon$。又因为 $\lim_{k\to\infty}\sigma_N(A_k) = \sigma_N < \varepsilon$，可知存在 $K_2(\varepsilon)$ 使得对于 $k > K_2(\varepsilon)$ 有 $\sigma_N(A_k) < \varepsilon$。因为 $\sigma_i(A_k), i \in \mathbb{N}$ 是一个非增的序列，可知当 $i \ge N$ ，$k > K_2(\varepsilon)$ 时，$\sigma_i(A_k) < \varepsilon$。注意到上面关于 $C_k$ 的分解是 $C_k$ 的奇异值分解，由此可知 $\|C_k\| = \sigma_{N+1}(A_k)$。因此 $\|C_k\| < \varepsilon$ 对于 $k > K_2(\varepsilon)$ 成立。所以，有 $|\langle C_k \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \le \|C_k\|\|\mathbf{x}\|\mathbf{y}\| < \varepsilon$ 当 $k > K_2(\varepsilon)$ 时成立。注意到

$$\|C\| \le \sum_{i=N+1}^{\infty}\|\sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{f}_i^{\vee}\| \le \sum_{i=N+1}^{\infty}\sigma_i < \varepsilon.$$

因此 $|\langle C\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| < \varepsilon$。令 $K(\varepsilon) = \max(K_1(\varepsilon), K_2(\varepsilon))$，那么

$$|\langle (A_k - A)\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \le |\langle (B_k - B)\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| + |\langle C_k \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| + |\langle C\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| < 3\varepsilon.$$

□

设 $\mathcal{H}$ 是无限维可分希尔伯特空间，用 $\mathrm{K}(\mathcal{H}), \mathrm{B}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 中的紧算子和有界线性算子，那么 $\mathrm{K}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{B}(\mathcal{H})$。任意一个紧算子 $L \in \mathrm{K}$ 存在奇异值分解（施密特分解）：

$$L = \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i(L)\mathbf{g}_i \mathbf{f}_i^{\vee},$$

$$\|L\| = \sigma_1(L) \ge \cdots \ge \sigma_n(L) \ge \cdots \ge 0, \lim_{i\to\infty}\sigma_i(L) = 0.$$

对于 $p \in [1, \infty)$ 我们用 $\mathrm{T}_p(\mathcal{H}) \subset \mathrm{K}$ 表示范数定义为 $\|L\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^p(L)\right)^{1/p}$ 的紧算子构成的 Banach 空间。

下面我们讨论 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 空间中的几种拓扑。首先我们已知 [14, 定理 VI.26] $\mathrm{T}_1(\mathcal{H}) = (\mathrm{K}(\mathcal{H}))^\vee$，$\mathrm{B}(\mathcal{H}) = \mathrm{T}_1^\vee(\mathcal{H})$，这里

$$A \mapsto \mathrm{Tr}\, A\rho,\ \ A \in \mathrm{K}(\mathcal{H}), \rho \in \mathrm{T}_1(\mathcal{H}),$$

$$\rho \mapsto \mathrm{Tr}\, \rho B,\ \ \rho \in \mathrm{T}_1(\mathcal{H}), B \in \mathrm{B}(\mathcal{H}),$$

是对应的 $\mathrm{K}(\mathcal{H})$，$\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 中的线性泛函。设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，定义 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 上的 $*$ 弱拓扑为

**定义 2.3** ($*$ 弱拓扑)**.** 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间, 一个序列 $\rho_n \in \mathrm{T}_1(\mathcal{H}), n \in \mathbb{N}$ 称为 $*$ 弱拓扑下收敛到 $\rho \in \mathrm{T}_1(\mathcal{H})$，记为 $\rho_n \xrightarrow{w^*} \rho$，若

$$\forall A \in \mathrm{K}(\mathcal{H}), \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\, A\rho_n = \mathrm{Tr}\, A\rho.$$

下面我们给出一个经典的结论，并且给出其简短证明

**引理 2.2.** *在 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 中，$*$ 弱收敛和弱算子收敛等价。*

*证明.* 我们证明在 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 中的弱算子收敛是 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 中 $*$ 弱收敛。事实上，如果在 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 中，$\rho_n \xrightarrow{w^*} \rho$，那么对于每个 $A \in \mathrm{K}(\mathcal{H})$，$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\, A\rho_n = \mathrm{Tr}\, A\rho$。假设 $A$ 是秩为 1 的算子：$A = \mathbf{x}\mathbf{y}^\vee$。那么 $\mathrm{Tr}\, A\rho = \mathrm{Tr}\, \rho A = \langle \rho\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$。因此 $*$ 弱收敛意味着在 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 中弱算子收敛。反之亦然，假如 $\rho_n \xrightarrow{w.o.t.} \rho$，那么 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\, A\rho_n = \mathrm{Tr}\, A\rho$ 对于每个秩一算子都成立。因此这个等式对于所有有限秩的情形都成立。因为在 $\mathrm{K}(\mathcal{H})$ 的算子范数下，每个紧的 $A$ 可以用一个有限秩的算子逼近，所以弱算子拓扑收敛可以推出 $*$ 弱收敛。 □

在 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 中，如果把内积定义为 $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\, AB^\vee$，弱收敛和弱算子收敛不等价。下面举出一个反例。

**例 2.2.** 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，令 $\{\mathbf{e}_i\}, i \in \mathbb{N}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组正交基。那么 $\mathbf{e}_n \xrightarrow{w.t} 0$。因此 $\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n^\vee, n \in \mathbb{N}$ 在弱算子拓扑下收敛到 0。令 $I \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ 是恒等算子。那么 $\mathrm{Tr}\, I(\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n^\vee) = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n\rangle = 1$。因此 $\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n^\vee, n \in \mathbb{N}$ 在弱拓扑下不收敛到 0。

下面我们讨论 $\mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 中弱收敛和弱算子收敛的性质，$\mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 空间是希尔伯特施密特算子 (Hilbert-Schmidt operators) 构成的空间。它是一个希尔伯特空间，其

上的内积可以定义为 $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr} AB^\vee$。对于 $A, B \in \mathrm{T}_2(\mathcal{H})$，算子 $AB^\vee \in \mathrm{T}_1(\mathcal{H})$。对于一个 $\mathcal{H}$ 中固定的正交基 $\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}$，$A \in \mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 可以用半无限矩阵 (half infinite matrix)$[\langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle]_{i,j\in\mathbb{N}}$ 来表示，$A^\vee$ 用它的伴随矩阵（即共轭转置），$[\langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle]^*$ 来表示。那么

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr} AB^\vee = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle\langle \mathbf{e}_j, B\mathbf{e}_i\rangle,$$
$$\|A\|_2^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} |\langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle|^2.$$

因为 $\mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 是一个可分希尔伯特空间 (它的一组正交基是 $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\vee, i, j \in \mathbb{N}$)。下面这个引理是基本的，我们为了文章完整性给出它的证明：

**引理 2.3.** *在 $\mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 空间，弱收敛和弱算子收敛等价。*

证明. 假设序列 $\{A_n\}, n \in \mathbb{N}$ 在 $\mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 中的弱拓扑下收敛到 $A$,即 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Tr} A_n B^\vee = \operatorname{Tr} AB^\vee$ 对每个 $B \in \mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 成立。令 $B = \mathbf{x}\mathbf{y}^\vee$，那么 $\mathbf{x}\mathbf{y}^\vee \in \mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 且 $\operatorname{Tr} A\mathbf{x}\mathbf{y}^\vee = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$。因此，如果 $A_n, n \in \mathbb{N}$ 弱收敛到 $A$，那么这个序列也按照弱算子拓扑收敛。下面假设 $\{A_n\} \subset \mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 按照弱算子拓扑收敛到 $A$，特别的

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = a_{ij}, i, j \in \mathbb{N}.$$

这里 $\mathbf{e}_i, i \in \mathbb{N}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组正交基。进一步地，$\|A_n\|_2 \le K, n \in \mathbb{N}$。假设 $B \in \mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 已经给定了。那么

$$B = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} B_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\vee, B_{ij} = \operatorname{Tr} B\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i^\vee, i, j \in \mathbb{N}, \|B\|_2 = \|B^\vee\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j\in\mathbb{N}} |B_{ij}|^2}.$$

给定一个 $\varepsilon > 0$，因为 $\|B\|_2 < \infty$，所以存在 $M(\varepsilon)$，使得

$$B_M = \sum_{i=j=1}^{M} B_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\vee, \quad \|B - B_M\|_2 = \|B^\vee - B_M^\vee\|_2 < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ for } M \ge M(\varepsilon).$$

固定 $M \ge M(\varepsilon)$，因为 $B_M$ 是有限秩，所以存在 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，有

$$|\operatorname{Tr}(A_n - A)B_M^\vee| = |\operatorname{Tr} A_n B_M^\vee - \sum_{i=j=1}^{M} a_{ij}\bar{B}_{ij}| < \varepsilon/2 \quad .$$

因此

$$|\operatorname{Tr} A_n B^\vee - \operatorname{Tr} AB^\vee| = |\operatorname{Tr} A_n(B^\vee - B_M^\vee) +$$
$$\operatorname{Tr}(A_n - A)B_M^\vee + \operatorname{Tr} A(B^\vee - B_M^\vee)| \le$$
$$\|A_n\|\|B^\vee - B_M^\vee\| + |\operatorname{Tr}(A_n - A)B_M^\vee| + \|A\|_2\|B^\vee - B_M^\vee\|_2 \le 3\varepsilon/2$$

对于 $n > N(\varepsilon)$ 都成立。因此 $A_n \overset{w.t.}{\to} A$。 □

对于一个有限维的子空间 $\mathbf{V}\in\mathcal{H}$，用记号 $P(\mathbf{V})$ 表示投影在 $\mathbf{V}$ 上的正交投影算子。选出它的一组基 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$，那么 $P(\mathbf{V})=\sum_{i=1}\mathbf{v}\mathbf{v}_i^\vee\in\mathrm{S}_{1,+}(\mathcal{H})$。令 $\mathbf{W}\subset\mathcal{H}$ 是另一个有限维的子空间。那么我们可以定义 $\mathbf{V}$ 和 $\mathbf{W}$ 之间的距离，例如把 $\|P(\mathbf{V})-P(\mathbf{W})\|_1$ 定义为它们之间的距离。因为有限维子空间的序列 $\mathbf{V}_n$ 收敛到 $\mathbf{V}$ 当且仅当 $\lim_{n\to\infty}\|P(\mathbf{V}_n)-P(\mathbf{V})\|_1=0$。可以直接得到，如果 $\lim_{n\to\infty}\|P(\mathbf{V}_n)-P(\mathbf{V})\|_1=0$，那么对于所有 $n>N$，存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得 $\dim\mathbf{V}_n=\dim\mathbf{V}$。

我们现在分析 $\mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 中的范数收敛。

**引理 2.4.** 若 $A,B,\in\mathrm{T}_2(\mathcal{H})$，且假设 $\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|_2=0$。那么

*(1)*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\sigma_i(A)-\sigma_i(B)|^2\le\|A-B\|_2^2.$$

*(2)* 假如

$$A=\sum_{i=1}\sigma_i(A)\mathbf{g}_i\mathbf{f}_i,\quad\langle\mathbf{g}_i,\mathbf{g}_j\rangle=\langle\mathbf{f}_i,\mathbf{f}_j\rangle=\delta_{ij},i,j\in\mathbb{N}.$$
$$A_n=\sum_{i=1}\sigma_i(A_n)\mathbf{g}_{i,n}\mathbf{f}_{i,n},\quad\langle\mathbf{g}_{i,n},\mathbf{g}_{j,n}\rangle=\langle\mathbf{f}_{i,n},\mathbf{f}_{j,n}\rangle=\delta_{ij},i,j\in\mathbb{N}.$$

那么对于每个 $i,n\in\mathbb{N}$，有 $|\sigma_i(A_n)-\sigma_i(A)|\le\|A_n-A\|$。假如 $\sigma_i(A)>0$，那么存在 $p,q\in\mathbb{N},\ p\le i\le q$ 使得 $\sigma_{p-1}(A)>\sigma_p(A)=\cdots=\sigma_q(A)>\sigma_{q+1}(A)\ge0$. 记

$$\mathbf{U}_{p,q}=\mathrm{span}(\mathbf{g}_p,\ldots,\mathbf{g}_q),\quad\mathbf{V}_{p,q}=\mathrm{span}(\mathbf{f}_p,\ldots,\mathbf{f}_q).$$

那么存在 $N_p=\cdots=N_q\in\mathbb{N}$ 使得 $\sigma_{p-1}(A_n)>\sigma_p(A_n)$ 且 $\sigma_q(A_n)>\sigma_{q+1}(A_n)$ 对于 $n>N_p$ 成立。对于 $n>N_p$ 记

$$\mathbf{U}_{p,q,n}=\mathrm{span}(\mathbf{g}_{p,n},\ldots,\mathbf{g}_{q,n}),\quad\mathbf{V}_{p,q,n}=\mathrm{span}(\mathbf{f}_{p,n},\ldots,\mathbf{f}_{q,n}).$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\|P(\mathbf{U}_{p,q,n})-P(\mathbf{U}_{p,q})\|_1=0,\quad\lim_{n\to\infty}\|P(\mathbf{V}_{p,q,n})-P(\mathbf{V}_{p,q})\|_1=0.$$

更精确地，把由 $\mathbf{g}_p\mathbf{f}_p^\vee,\ldots,\mathbf{g}_q\mathbf{f}_q^\vee$ 张成的 $q-p+1$ 维子空间记为 $\mathbf{W}_{p,q}\subset T_2(\mathcal{H})$。对于 $n>N_p$，把由正交基

$$\mathbf{g}_{p,n}\mathbf{f}_{p,n}^\vee,\ldots,\mathbf{g}_{q,n}\mathbf{f}_{q,n}^\vee$$

张成的 $q-p+1$ 维子空间，记为 $\mathbf{W}_{p,q,n}\subset T_2(\mathcal{H})$。那么

$$\lim_{n\to\infty}\|P(\mathbf{W}_{p,q,n})-P(\mathbf{W}_{p,q})\|_1=0.$$

证明. (1) 假设 $B = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_i(B)\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^\vee$ 是 $B$ 的奇异值分解式。定义

$$A_m = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(A)\mathbf{g}_i\mathbf{f}_i^\vee,\ \sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_l(A) > 0,\ \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j\rangle = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j\rangle = \delta_{ij}, i.j \in [m].$$

$$B_m = \sum_{j=1}^{m} \sigma_i(B)\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i^\vee,\ \sigma_1(B) \geq \cdots \geq \sigma_m(B) > 0,\ \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \delta_{ij}, i.j \in [l].$$

定义

$$\mathbf{X}_m = \mathrm{span}(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_m, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m),\ \mathbf{Y}_m = \mathrm{span}(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m).$$

那么 $A_m, B_m : \mathbf{Y}_m \to \mathbf{X}_m$，$A_m^\vee, B_m^\vee : \mathbf{X}_m \to \mathbf{Y}_m$。因此我们可以把 $A_m$ 和 $B_m$ 看成 $M_m \times N_m$ 维复矩阵 $C_m$ 和 $D_m$，这里 $M_m = \dim X_m$，$N_m = \dim Y_m$。$C_m$ 和 $D_m$ 的正的特征值对应地由 $A_m$ 和 $B_m$ 的正特征值确定。并且，

$$\|A_m - B_m\|_2^2 = \mathrm{Tr}(C_m - D_m)(C_m^* - D_m^*) = \mathrm{Tr}\, C_m C_m^* + \mathrm{Tr}\, D_m D_m^* - 2\Re\, \mathrm{Tr}\, C_m D_m^* = \left(\sum_{i=1}^{m}(\sigma_i^2(A_m) + \sigma_i^2(B_m)\right) - 2\Re\, \mathrm{Tr}\, C_m D_m^*.$$

回顾 von Neumann 不等式 [7, 定理 4.11.8]：$\Re\, \mathrm{Tr}\, C_m D_m^* \leq \sum_{i=1}^{M} \sigma_i(C_m)\sigma_i(D)_m$。这说明了

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\sigma_i(A) - \sigma_i(B))^2} \leq \|A_m - B_m\|_2 = \|(A_m - A) + (B - B_m) + (A - B)\|_2 \leq \|A_m - A\|_2 + \|B - B_m\|_2 + \|A - B)\|_2.$$

令 $m \to \infty$ 可以得到 (1)。

(2) 我们先证明 $\lim_{n\to\infty} \|A_n^\vee A_n - A^\vee A\|_1 = 0$。这可以由引理3.15得到。首先注意到 $F_n = A_n^\vee A_n, F = A^\vee A \in \mathrm{S}_{1,+}(\mathcal{H})$，又因为 $F_n \overset{w.o.t.}{\to} F$。所以，对于任意给定的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ 我们可以得到

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n\mathbf{x} - A\mathbf{x}\| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \|A_n\mathbf{y} - A\mathbf{y}\| = 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n^\vee A_n\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A_n\mathbf{x}, A_n\mathbf{y}\rangle = \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle A^\vee A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

易知 $\mathrm{Tr}\, A_n^\vee A_n = \|A_n\|_2^2, \mathrm{Tr}\, A^\vee A = \|A\|_2^2$。因为 $\lim_{n\to\infty} \|A_n\|_2 = \|A\|_2$ 我们可以推出 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\, F_n = \mathrm{Tr}\, F$。

下面我们写出 $F_n$ 和 $F$ 的谱分解形式：

$$F_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(A_n)^2 \mathbf{f}_{i,n}\mathbf{f}_{i,n}^\vee, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$F = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(A)^2 \mathbf{f}_i\mathbf{f}_i^\vee.$$

由

$$|\sigma_i(A_n) - \sigma_i(A)| \le (\sum_{i=1}^{\infty}(\sigma_i(A_n) - \sigma_i(A))^2)^{1/2} \le \|A_n - A\|_2$$

可知 $\lim_{n\to\infty}\sigma_i(A_n) = \sigma_i(A)$ 对每个 $i \in \mathbb{N}$ 成立。假设 $\sigma_q(A) > \sigma_{q+1}(A)$，存在 $N_q$ 使得当 $n > N_q$ 时，下面不等式成立。

$$\sigma_q(A_n) > (\sigma_q(A) + \sigma_{q+1}(A))/2 > \sigma_{q+1}(A).$$

令 $\mathbf{V}_q, \mathbf{V}_{q,n}$ 为由 $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q$ 和 $\mathbf{f}_{1,n}, \ldots, \mathbf{f}_{q,n}$ 张成的子空间上的投影。令

$$\mathbf{f}_{i,n,q} = \sum_{j=1}^{q}\langle \mathbf{f}_{i,n}, \mathbf{f}_j\rangle \mathbf{f}_j, \quad i \in [q], n \in \mathbb{N}.$$

先假设最简单的情况 $q = 1$：$\sigma_1(A) > \sigma_2(A)$。已知 $\sigma_1^2(A_n) = \sigma_1(F_n) = \langle F_n \mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_n\rangle$。已知下面不等式成立

$$|\langle (F_n - F)\mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_{1,n}\rangle| = |\operatorname{Tr}(A_n - A)(\mathbf{f}_{1,n}\mathbf{f}_{1,n}^{\vee})| \le$$
$$\|F_n - F\|_1 \|(\mathbf{f}_{1,n}\mathbf{f}_{1,n}^{\vee})\| = \|F_n - F\|_1.$$

这里 $\|(\mathbf{f}_{1,n}\mathbf{f}_{1,n}^{\vee})\|$ 是 $\mathbf{f}_{1,n}\mathbf{f}_{1,n}^{\vee}$ 的算子范数，因此等于 1。对 $F$ 的最大特征值 $\sigma_1(F)$ 用极大值原理 (maximum eigenvalue) 可知

$$\sigma_1(F) \ge \langle F\mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_{1,n}\rangle \ge \sigma_1(F_n) - \|F_n - F\|_1.$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\sigma_1(F_n) = \sigma_1(F)$ 且 $\lim_{n\to\infty}\|F_n - F\|_1 = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty}\langle F\mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_{1,n}\rangle = \sigma_1(F)$。又因为

$$\langle F\mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_{1,n}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2(A)|\langle \mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_1\rangle|^2 \le \sigma_1(A)^2|\langle \mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_1\rangle|^2 + \sigma_2(A)^2(1 - |\langle \mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_1\rangle|^2).$$

所以 $\lim_{n\to\infty}|\langle \mathbf{f}_{1,n}, \mathbf{f}_1\rangle| = 1$，等价于 $\lim_{n\to\infty}\|P(\mathbf{V}_{1,n}) - P(\mathbf{V}_1)\|_1 = 0$。(等价于我们可以选取 $\mathbf{f}_{1,n}$ 的相位 (phase) 使得 $\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{f}_{1,n} - \mathbf{f}_1\| = 0$。)

对于一般的情形可以推广到 $q$ 次外积 (wedge product)$\wedge^q A_n, \wedge^q A$[9] 的情形。

□

## 2.2 量子 Strassen 定理

我们首先简单地介绍一下概率耦合，主要的定义来自于参考文献 [18]。令 $\mathcal{A}$ 是一个有限维或者可数无限维的集合。如果一个映射 $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ 使得 $\sum_{a\in\mathcal{A}}\mu(a) \le 1$，那么我们把这个 $\mu$ 称为是 $\mathcal{A}$ 上的一个子分布，当等号取到时，称它为 $\mathcal{A}$ 上的一个分布。

**定义 2.4** (概率耦合 (probabilistic coupling)). 若 $\mu_1, \mu_2$ 是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 上的子分布。那么在 $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ 上的一个分布 $\mu$，称为是 $(\mu_1, \mu_2)$ 的一个耦合，如果它满足 $\pi_1(\mu) = \mu_1, \pi_2(\mu) = \mu_2$。

不难发现，对于两个子分布，它们的概率耦合在很多时候不是唯一的，那么接下来我们给出提升的定义，用来选择一个指定的耦合。

**定义 2.5** (概率提升 (probabilistic lifting)). 若 $\mu_1, \mu_2$ 是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 上的子分布，且 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ 是一个关系。那么 $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ 上的一个子分布称为在 $(\mu_1, \mu_2)$ 的 $\mathcal{R}$-提升 (R-lifting) 的一个证据 (witness)，如果它满足下面的条件：

1. $\mu$ 是 $(\mu_1, \mu_2)$ 的一个耦合；
2. $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \mathcal{R}$.

如果存在一个证据，那么我们就说 $\mu_1$，$\mu_2$ 是 $\mathcal{R}$-提升相关的，记作 $\mu_1 \mathcal{R}^{\#} \mu_2$。类似地在希尔伯特空间中定义量子耦合和量子提升 [18]。

**定义 2.6** (量子耦合 (quantum coupling)). 若 $\rho_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1)$，$\rho_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_2)$，那么 $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ 称为是 $(\rho_1, \rho_2)$ 的一个耦合，如果 $\mathrm{Tr}_1 \rho = \rho_2, \mathrm{Tr}_2 \rho = \rho_1$ 成立。

**定义 2.7** (量子提升 (quantum lifting)). 若 $\rho_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1), \rho_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_2)$，且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 的一个子空间。那么 $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ 称为是提升 $\rho_1 \mathcal{X}^{\#} \rho_2$ 的一个证据，如果：

1. $\rho$ 是 $(\rho_1, \rho_2)$ 的一个量子耦合；
2. $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq \mathcal{X}$.

下面介绍概率论中的一个基本定理，Strassen 定理 [16]。

**定理 2.5** (Strassen 定理). 设 $\mu_1, \mu_2$ 为 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 上有着相同权重的两个概率子分布 $(|\mu_1| = |\mu_2|)$，以及二元关系 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$。那么

$$\mu_1 \mathcal{R}^{\#} \mu_2 \Leftrightarrow \forall S_1 \subseteq \mathcal{A}_1, \mu_1(S_1) \leq \mu_2(\mathcal{R}(S_1)). \tag{2.5}$$

其中 $\mathcal{R}(S_1)$ 是 $S_1$ 在 $\mathcal{R}$ 下的像：

$$\mathcal{R}(S) \equiv \{a_2 \in \mathcal{A}_2 : \exists a_1 \in \mathcal{A}_1, (a_1, a_2) \in \mathcal{R}\}.$$

周立等人在他们的文章中给出了有限维希尔伯特空间中的量子 Strassen 定理。

**定理 2.6** (量子 Strassen 定理)**.** 对于两个迹相同的密度算子 $\rho_1 \in \mathcal{H}_1, \rho_2 \in \mathcal{H}_2$，$\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 中的一个子空间，下面 *3* 个命题是等价的：

*1.* $\rho_1 \mathcal{X}^{\#} \rho_2$.

*2.* 对于 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 中所有的自伴随算子 $Y_1, Y_2$ 满足 $P_{\mathcal{X}^{\perp}} \geq Y_1 \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2$，可以推出

$$\mathrm{Tr}(\rho_1 Y_1) \leq \mathrm{Tr}(\rho_2 Y_2).$$

*3.* 对于 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 中所有的半正定算子 $Y_1, Y_2$ 满足 $P_{\mathcal{X}^{\perp}} \geq Y_1 \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2$，可以推出

$$\mathrm{Tr}(\rho_1 Y_1) \leq \mathrm{Tr}(\rho_2 Y_2).$$

# 第 3 章 无限维量子 Strassen 定理

在这一章里面，我们先定义了无限维可分希尔伯特空间的部分迹，证明了部分迹的一些性质。然后用这些定义，将有限维的 Strassen 定理推广到无限维。首先考虑支撑集 $\mathcal{X}$ 是有限维的情形，通过求解半正定优化问题来验证是否存在量子提升。然后考虑支撑集 $\mathcal{X}$ 是无限维的情形，运用 Banach-Saks 引理和凸优化的知识，给出了存在量子提升的充分必要条件。

## 3.1 希尔伯特空间算子的一些结论

下面介绍两个可分希尔伯特空间的张量积 $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$。假设在 $\mathcal{H}_i$ 中的内积定义为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$，那么在 $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ 空间中诱导的内积满足条件 $\langle\mathbf{x}\otimes\mathbf{y},\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle_1\langle\mathbf{y},\mathbf{v}\rangle_2$。假设 $\mathcal{H}_l$ 有一组正交基 $\mathbf{e}_{i,l}, i\in[N_l]$，在这里对于 $l\in[2]$，有 $N_l\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，$l\in[2]$。这两组正交基诱导出 $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ 中的一组基 $\mathbf{e}_{i,1}\otimes\mathbf{e}_{j,2}$，$i\in[N_1], j\in N_2$。其中的一个向量 $\mathbf{a}\in\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ 有展开式

$$\mathbf{a}=\sum_{i=j=1}^{N_1,N_2}a_{ij}\mathbf{e}_{i,1}\otimes\mathbf{e}_{j,2},\ \|\mathbf{a}\|=\sqrt{\sum_{i=j=1}^{N_1,N_2}|a_{ij}|^2}<\infty. \tag{3.1}$$

注意到 $\mathbf{a}$ 对应了一个有界线性算子 $A:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1$ 定义为

$$A(\mathbf{a})=\sum_{i=j=1}^{N_1,N_2}a_{ij}\mathbf{e}_{i,1}\mathbf{e}_{j,2}^{\vee}. \tag{3.2}$$

在 $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$ 中的弱收敛对应于弱算子收敛 $A_n\overset{w.o.t.}{\to}A\in B(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1)$: 对于所有的 $\mathbf{x}\in\mathcal{H}_1,\mathbf{y}\in\mathcal{H}_2$ 有等式 $\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}^{\vee}(A_n\mathbf{y})=\mathbf{x}^{\vee}(A\mathbf{y})$ 成立。

我们可以把 $A$ 看成是一个矩阵 $\hat{A}=[a_{ij}]_{i=j=1}^{N_1,N_2}$。我们记 $\hat{A}^{\dagger}=[a_{pq}^{\dagger}]_{p=q=1}^{N_2,N_1}$，这里对于所有 $p\in[N_2],q\in[N_1]$，令 $a_{pq}^{\dagger}=\bar{a}_{qp}$。($\hat{A}^{\dagger}$ 是 $\hat{A}$ 的共轭转置。) 令 $\mathbf{b}=\sum_{i=j=1}^{N_1,N_2}b_{ij}\mathbf{e}_{i,1}\otimes\mathbf{e}_{j,2}\in\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$。记 $\hat{B}=[b_{ij}]_{i=j=1}^{N_1.N_2}$，则 $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\mathrm{Tr}\,\hat{A}\hat{B}^{\dagger}=\mathrm{Tr}\,\hat{B}^{\dagger}\hat{A}$。

假设 $F\in T(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)$，下面我们介绍部分迹或称为偏迹 (partial trace) $\mathrm{Tr}_1(F)\in\mathrm{T}(\mathcal{H}_2)$，$\mathrm{Tr}_2(F)\in\mathrm{T}(\mathcal{H}_1)$。先假设 $F$ 是一个秩一的算子: $(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^{\vee}$，类似于参考文献 [13] 中的定义有：

$$\mathrm{Tr}_1((\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^{\vee})=\langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle\mathbf{y}\mathbf{v}^{\vee}, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{Tr}_2((\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^{\vee})=\langle\mathbf{y},\mathbf{v}\rangle\mathbf{x}\mathbf{u}^{\vee}. \tag{3.4}$$

因此

$$\|(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^\vee\|_1 = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|,$$
$$\|\operatorname{Tr}_1(\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^\vee)\|_1 = |\langle\mathbf{x},\mathbf{u}\rangle|\|\mathbf{y}\|\|\mathbf{v}\|,$$
$$\|\operatorname{Tr}_2((\mathbf{x}\otimes\mathbf{y})(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})^\vee)\|_1 = |\langle\mathbf{y},\mathbf{v}\rangle|\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{u}\|.$$

**引理 3.1.** 假设 $\mathcal{H}_i$ 是一个可分希尔伯特空间，维数是 $N_i$，给出它的一组基 $\mathbf{e}_{j,i}, j\in[N_i]$，$i\in[2]$。记 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$，取其中元素 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathcal{H}$。假设 $\mathbf{a}$ 有类似(3.1)的展开式。假设 $\mathbf{b}$ 也有类似展开式，且 $\hat{A}=[a_{ij}],\hat{B}=[b_{ij}], i\in[N_1], j\in[N_2]$ 是 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 对应的矩阵表示。记 $C$ 和 $D$ 为下面的算子:

$$\operatorname{Tr}_2\mathbf{ab}^\vee = C = \sum_{i=p=1}^{N_1} c_{ip}\mathbf{e}_{i,1}\mathbf{e}_{p,1}^\vee, \operatorname{Tr}_1\mathbf{ab}^\vee = D = \sum_{j=q=1}^{N_2} d_{jq}\mathbf{e}_{j,2}\mathbf{e}_{q,2}^\vee. \tag{3.5}$$

那么有

$$\hat{C}=\hat{A}\hat{B}^\dagger = [c_{ip}]_{i=p=1}^{N_1}, \quad \hat{D}=\hat{A}^\top\overline{\hat{B}} = [d_{jq}]_{j=q=1}^{N_2}. \tag{3.6}$$

进一步地，$C\in T_1(\mathcal{H}_1), D\in T_1(\mathcal{H}_2)$，且下面的等式和不等式成立

$$\max(\|\operatorname{Tr}_2\mathbf{ab}^\vee\|_1, \|\operatorname{Tr}_1\mathbf{ab}^\vee\|_1) \le \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{ab}^\vee\|_1, \tag{3.7}$$
$$\langle(\operatorname{Tr}_2\mathbf{ab}^\vee)\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{N_2}\langle\mathbf{x}\otimes\mathbf{e}_{j,2},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{a},\mathbf{y}\otimes\mathbf{e}_{j,2}\rangle,\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathcal{H}_1, \tag{3.8}$$
$$\langle(\operatorname{Tr}_1\mathbf{ab}^\vee)\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{N_1}\langle\mathbf{e}_{i,1}\otimes\mathbf{u},\mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{a},\mathbf{e}_{i,1}\otimes\mathbf{v}\rangle,\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{H}_2. \tag{3.9}$$

特别地

$$\operatorname{Tr}\mathbf{ab}^\vee = \operatorname{Tr}\operatorname{Tr}_2\mathbf{ab}^\vee = \operatorname{Tr}\operatorname{Tr}_1\mathbf{ab}^\vee = \langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle. \tag{3.10}$$

证明. 易知 $\mathbf{ab}^\vee\in T_1(\mathcal{H})$，且

$$\|\mathbf{ab}^\vee\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| = \left(\sum_{i=j=1}^{N_1,N_2}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p=q=1}^{N_1,N_2}|b_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

另外，

$$\mathbf{ab}^\vee = \left(\sum_{i=j=1}^{N_1,N_2}a_{ij}\mathbf{e}_{i,1}\otimes\mathbf{e}_{j,2}\right)\left(\sum_{p=q=1}^{N_1,N_2}b_{pq}\mathbf{e}_{p,1}\otimes\mathbf{e}_{q,2}\right)^\vee =$$
$$\sum_{i=j=p=q=1}^{N_1,N_2,N_1,N_2}a_{ij}\bar{b}_{pq}(\mathbf{e}_{i,1}\otimes\mathbf{e}_{j,2})(\mathbf{e}_{p,1}\otimes\mathbf{e}_{q,2})^\vee.$$

由(3.3)和(3.4)可求算子 $C = \mathrm{Tr}_2(\mathbf{ab}^\vee)$，$D = \mathrm{Tr}_1(\mathbf{ab}^\vee)$，我们用矩阵 $\hat{C}$ 和 $\hat{D}$ 分别表示它们，并且满足(3.6)和(3.8)-(3.9)。

下面证明 $C$ 和 $D$ 是迹类算子。首先我们知道 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 表示的算子是紧算子，因此 $\hat{C}$ 和 $\hat{D}$ 也表示了紧算子。下面我们证明 (3.7)成立。

观察到 $\hat{C}$ 满足下面的不等式

$$|c_{ip}| = |\sum_{j=1}^{N_2} a_{ij}\bar{b}_{pj}| \leq (\sum_{j=1}^{N_2} |a_{ij}|^2)^{1/2}(\sum_{j=1}^{N_2} |b_{pj}|^2)^{1/2} \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|,\ i, p \in N_1,$$
$$\sum_{i=1}^{N_2} |c_{ii}| \leq \sum_{i=1}^{N_1}(\sum_{j=1}^{N_2} |a_{ij}|^2)^{1/2}(\sum_{j=1}^{N_2} |b_{ij}|^2)^{1/2} \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{ab}^\vee\|_1.$$

如果 $\hat{C}$ 是一个对角矩阵，那么 $\|C\|_1 = \sum_{i=1}^{N_1} |c_{ii}|$，由此可以得到不等式 $\|C\|_1 \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$。假如 $C$ 不是对角矩阵。把 $C$ 看成是一个线性变换 $C : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_3$。那么我们可以选取 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_3$ 的两组不同的正交基底，使得在这两组基底下，$C$ 可以表示为对角矩阵 $\hat{C} = [\hat{c}_{ij}]$。（$\hat{C}$ 是 $C$ 在这两组基底下的奇异值分解形式。）不等式 $\sum_{i=1}^{N_1} |\hat{c}_{ii}| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$ 此时依旧成立。这意味着 $\|C\|_1 \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$。同样地，$\|D\|_1 \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$。因此(3.7)成立。

下面证明(3.10)。因为 $\sigma_1(\mathbf{ab}^\vee) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$，且除此之外的 $\mathbf{ab}^\vee$ 的奇异值都是 0，由(2.3)可知 $\mathrm{Tr}\,\mathbf{ab}^\vee = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$。又因为

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_2\,\mathbf{ab}^\vee) = \sum_{i=1}^{N_1}\langle(\mathrm{Tr}_2\,\mathbf{ab}^\vee)\mathbf{e}_{i,1}, \mathbf{e}_{i,1}\rangle =$$
$$\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\langle \mathbf{e}_{i,1} \otimes \mathbf{e}_{j,2}, \mathbf{b}\rangle\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i,1} \otimes \mathbf{e}_{j,2}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle.$$

所以等式 $\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_1\,\mathbf{ab}^\vee) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ 也同样成立。 □

下面的引理也是基本的，我们在这里为了完整性给出它的一个简短的证明。

**引理 3.2.** 如果 $F \in T_1(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$，下面给出几个关于 $F$ 的迹的性质

1. $\mathrm{Tr}_1(F) \in T_1(\mathcal{H}_2), \mathrm{Tr}_2(F) \in T_1(\mathcal{H}_1)$.
2. $\|\mathrm{Tr}_1(F)\|_1, \|\mathrm{Tr}_2(F)\|_1 \leq \|F\|_1$.
3. $\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_1 F) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_2 F) = \mathrm{Tr}\,F$.
4. 如果 $F \in T_{1,+}(\mathcal{H})$，那么可得 $\mathrm{Tr}_1(F), \mathrm{Tr}_2(F) \geq 0$ 且

$$\|F\|_1 = \mathrm{Tr}(F) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_1(F)) = \|\mathrm{Tr}_1(F)\| = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_2(F)) = \|\mathrm{Tr}_2(F)\|.$$

证明. 假设 $F$ 的奇异值分解为：

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_i(F) \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k^{\vee}, \tag{3.11}$$

在这里 $\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_l \rangle = \langle \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_l \rangle = \delta_{ij}, k, l \in \mathbb{N}, \|F\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(F)$. 因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}_2 F &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(F) \operatorname{Tr}_2 \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k^{\vee}, \\
\|\operatorname{Tr}_2 F\|_1 &\le \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(F) \|\operatorname{Tr}_2 \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k^{\vee}\|_1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(F) \|\mathbf{a}_k\| \|\mathbf{b}_k\| \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(F) = \|F\|_1.
\end{aligned}$$

这说明了 $\operatorname{Tr}_2 F \in T_+(\mathcal{H}_1)$ 且 $\|\operatorname{Tr}_2 F\|_1 \le \|F\|_1$。用(3.10)式可得 $\operatorname{Tr} F = \operatorname{Tr}(\operatorname{Tr}_2 F)$。同样地对于 $\operatorname{Tr}_1 F$ 也有类似的结论。

下面假设 $F \ge 0$。那么在上面 $F$ 的展开式(3.11)中，$\mathbf{a}_k = \mathbf{b}_k$ 对 $k \in \mathbb{N}$ 都成立。由(3.10)式可知

$$\operatorname{Tr} F = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_i(F) \operatorname{Tr} \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^{\vee} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_i(F) \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_i(F) = \|F\|_1.$$

下面我们证明 $\operatorname{Tr}_2 F \ge 0$。由(3.8)式可知

$$\langle (\operatorname{Tr}_2 F)\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_2} \sigma_k(F) \langle \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_{j,2}, \mathbf{a}_k \rangle \langle \mathbf{a}_k, \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_{j,2} \rangle \ge 0, \tag{3.12}$$

对于所有 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_1$ 都成立。因此 $\operatorname{Tr}_2 F \ge 0$。因此 $\|\operatorname{Tr}_2 F\|_1 = \operatorname{Tr}(\operatorname{Tr}_2 F) = \operatorname{Tr} F = \|F\|_1$。同样可以类似得到 $\operatorname{Tr}_1 F$ 的结论。 □

下面我们介绍有关可分希尔伯特空间中与弱收敛和弱算子收敛有关的结论。

**引理 3.3.** *$\mathcal{H}_l$ 是可分希尔伯特空间，它的维数为 $N_l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，$l \in [2]$。令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$。*

*(1) 若 $\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}$ 是两个有界序列，并且满足 $\mathbf{a}_n \overset{w.t.}{\to} \mathbf{a}, \mathbf{b}_n \overset{w.t.}{\to} \mathbf{b}$，那么*

$$\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n^{\vee} \overset{w.o.t.}{\to} \mathbf{a}\mathbf{b}^{\vee}, \tag{3.13}$$

$$\liminf \operatorname{Tr} \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^{\vee} \ge \operatorname{Tr} \mathbf{a}\mathbf{a}^{\vee}. \tag{3.14}$$

*对于每个 $\mathbf{x}_i \in \mathcal{H}_i$，$i \in [2]$ 有下面的不等式成立*

$$\begin{aligned}
\liminf \langle (\operatorname{Tr}_1 \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^{\vee}) \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle &\ge \langle (\operatorname{Tr}_1 \mathbf{a}\mathbf{a}^{\vee}) \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle, \\
\liminf \langle (\operatorname{Tr}_2 \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^{\vee}) \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle &\ge \langle (\operatorname{Tr}_2 \mathbf{a}\mathbf{a}^{\vee}) \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

假如 $N_l$ 有限，$l$ 等于 1 或 2，那么

$$\operatorname{Tr}_l \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n^{\vee} \overset{w.o.t.}{\to} \operatorname{Tr}_l \mathbf{a}\mathbf{b}^{\vee}. \tag{3.16}$$

*(2)* 若 $\rho_n \in \mathrm{T}_+(\mathcal{H})$ 是有界的，即 $\operatorname{Tr}\rho_n \le c$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立，并且 $\rho_n \overset{w.o.t.}{\to} \rho$，那么 $\rho \in T_+(\mathcal{H})$，且下面的条件都成立：

$$\liminf \operatorname{Tr}\rho_n \ge \operatorname{Tr}\rho, \tag{3.17}$$

$$\liminf \langle (\operatorname{Tr}_1 \rho_n)\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2\rangle \ge \langle (\operatorname{Tr}_1 \rho)\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2\rangle, \tag{3.18}$$

$$\liminf \langle (\operatorname{Tr}_2 \rho_n)\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle \ge \langle (\operatorname{Tr}_2 \rho)\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1\rangle. \tag{3.19}$$

如果 $N_l$ 是有限的，那么

$$\operatorname{Tr}_l \rho_n \overset{w.o.t.}{\to} \operatorname{Tr}_l \rho. \tag{3.20}$$

证明. (1) 对于每个 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$ 有等式 $\langle (\mathbf{a}_n \mathbf{b}_n^{\vee})\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{b}_n\rangle\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{v}\rangle$ 成立。又因为 $\mathbf{a}_n \overset{w.t.}{\to} \mathbf{a}, \mathbf{b}_n \overset{w.t.}{\to} \mathbf{b}$ 我们可以推出式子(3.13)。因为 $\liminf \|\mathbf{a}_n\| \ge \|\mathbf{a}\|$，且对于 $\mathbf{c} \in \mathcal{H}$，有 $\operatorname{Tr}\mathbf{c}\mathbf{c}^{\vee} = \|\mathbf{c}\|^2$，那么可以推出式子(3.14)。

假设 $N_2$ 有限，我们对 $l = 2$ 证明式子(3.16)成立。由式子(3.8)可知，对于 $\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n$:

$$\langle (\operatorname{Tr}_2 \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n^{\vee})\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{N_2} \langle \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_{j,2}, \mathbf{b}_n\rangle\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{y} \otimes \mathbf{e}_{j,2}\rangle,\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}_1$$

让 $n \to \infty$ 可以得到式子(3.8)。因此 $l = 2$ 时，(3.16)式成立。同样可以对于 $N_1$ 是有限维的情形证明此时极限和部分迹可交换。

下证式子(3.15)。先假设 $N_2$ 是有限维的，由式子(3.16)可以推出式子(3.15)。假如 $N_2 = \infty$，选择一个 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $L_{n,N}$ 和 $L_N$ 是如下 $T_1(\mathcal{H}_1)$ 中的有限秩的算子:

$$\langle L_{n,N}\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_{j,2}, \mathbf{a}_n\rangle\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{y} \otimes \mathbf{e}_{j,2}\rangle,$$

$$\langle L_N\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_{j,2}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \otimes \mathbf{e}_{j,2}\rangle.$$

易知，对于每个 $N \in \mathbb{N}$，序列 $L_{n,N}, n \in \mathbb{N}$ 弱收敛到 $L_N$。又因为

$$\langle (\operatorname{Tr}_2 \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^{\vee})\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_{j,2}\rangle|^2 \ge \langle L_{n,N}\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle.$$

所以

$$\liminf\langle(\operatorname{Tr}_2 \mathbf{a}_n\mathbf{a}_n^\vee)\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle \geq \langle L_N\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle.$$

由 $\lim_{N\to\infty}\langle L_N\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \langle(\operatorname{Tr}_2 \mathbf{a}\mathbf{a}^\vee)\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle$ 可以推出式子(3.15)中第二个不等式。同样可以得到式子(3.15)中第一个不等式。

(2) 假设 $\rho_n$ 的谱分解展开为 $\sum_{k=1}^\infty \sigma_k(\rho_n)\mathbf{a}_{k,n}\mathbf{a}_{k,n}^\vee$。对于 $l\in[2]$，取定 $\mathbf{x}_l\in\mathcal{H}_l$。我们先取一个子列 $n_p, p\in\mathbb{N}$ 使得第 (2) 部分中，$\rho_{n_p}$ 有极限。易知 $\rho_{n_p}\xrightarrow{w.o.t.}\rho$。因此不失一般性的，我们可以让 $n_p=p$，$p\in\mathbb{N}$。取它的一个子列 $n_m, m\in\mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_k(\rho_{n_m})=\sigma_k,\quad \mathbf{a}_{k,n_m}\xrightarrow{w.t.}\mathbf{a}_k,\quad k\in\mathbb{N}.$$

下面我们用引理2.1第（2）部分的结论证明，因为 $\rho_{n_m}$ 也弱收敛到 $\rho$，所以我们得到

$$\rho=\sum_{k=1}^\infty \sigma_n\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^\vee,\ \|\mathbf{a}_k\|\leq 1, k\in\mathbb{N},$$

$$\|\operatorname{Tr}\rho\|_1\leq\sum_{k=1}^\infty\sigma_k\leq\liminf\operatorname{Tr}\rho_n.$$

因此 $\rho_+\in T_+(\mathcal{H})$ 且

$$\|\rho\|_1=\operatorname{Tr}\rho=\sum_{k=1}^\infty\sigma_k\langle\mathbf{a}_k,\mathbf{a}_k\rangle\leq\sum_{k=1}^\infty\sigma_k\leq\liminf\operatorname{Tr}\rho_n.$$

这就证明了第 (2) 部分第一个不等式。

为了证明第 (2) 部分第二个不等式，我们先用引理2.1（2）中的方法。同样，为了使记号更为简便，我们令 $n_m=m$，$m\in\mathbb{N}$。取一个 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$ 使得 $\sum_{k=N}^\infty\sigma_k<\varepsilon$。另外，存在 $k>K_2(\varepsilon)$ 使得 $\sigma_N(\rho_k)<\varepsilon$。令

$$B_n=\sum_{k=1}^N\sigma_k(\rho_n)\mathbf{a}_{k,n}\mathbf{a}_{k,n}^\vee,\quad C_n=\sum_{k=N+1}^\infty\sigma_k(\rho_n)\mathbf{a}_{k,n}\mathbf{a}_{k,n}^\vee,$$

$$B=\sum_{k=1}^N\sigma_k\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^\vee,\quad C=\sum_{k=N+1}^\infty\sigma_k\mathbf{a}_k\mathbf{a}_k^\vee$$

那么有

$$\rho_n=B_n+C_n,\ \rho=B+C,\ B_n,C_n,B,C\in T_+(\mathcal{H}),\ \|\rho-B\|_1=\|C\|_1<\varepsilon,$$

$$\operatorname{Tr}_l\rho_n\geq\operatorname{Tr}_l B_n,\ \|\operatorname{Tr}_l\rho-\operatorname{Tr}_l B\|_1=\|\operatorname{Tr}_l C\|_1\leq\|C\|_1<\varepsilon,\ n\in\mathbb{N}, l\in[2].$$

对于 $l\in[2]$，令 $\{l'\}=[2]\setminus\{l\}$。第 (1) 部分已经证明了

$$\liminf\langle(\operatorname{Tr}_{l'}\rho_n)\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_l\rangle\geq\liminf\langle(\operatorname{Tr}_{l'}B_n)\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_l\rangle\geq$$

$$\langle(\operatorname{Tr}_{l'}B)\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_l\rangle\geq\langle(\operatorname{Tr}_{l'}\rho)\mathbf{x}_l,\mathbf{x}_l\rangle-\varepsilon\|\mathbf{x}_l\|^2.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 可以取任意小，所以我们证明了 (2) 中其余的不等式。

假设 $N_2$ 是有限维的。那么 $\mathcal{H}$ 等价于 $N_2$ 个 $\mathcal{H}_1$ 的直和。每个 $\mathcal{H}_{1,j}$ 的基底可以记为 $\mathbf{e}_{i,1} \otimes \mathbf{e}_{j,2}$，$i \in [N_1]$。令 $\rho_{n,j} : \mathcal{H}_{1,j} \to \mathcal{H}_{1,j}$ 是半线性形式 $\langle \rho_n \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 限制在 $\mathcal{H}_{1,j}$ 上的形式，这里 $\mathbf{u} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_{j,2}, \mathbf{v} = \mathbf{y} \otimes \mathbf{e}_{j,2}$。又因为 $\mathrm{Tr}_2\, \rho_n = \sum_{j=1}^{N_2} \rho_{n,j}$。同样地，对于 $j \in [N_2]$，类似地定义 $\rho^{(j)}$。易知，$\rho_{n,j} \overset{w.o.t.}{\to} \rho^{(j)}$ for $j \in [N_2]$。因此 $\mathrm{Tr}_2\, \rho_n \overset{w.o.t.}{\to} \mathrm{Tr}_2\, \rho = \sum_{j=1}^{N_2} \rho^{(j)}$。同样对于 $N_1$ 是有限的情形，也可以类似地证明。 □

下面我们给出一个简单的例子，来说明这个引理第 (1) 部分中的不等式可以取不到等号。

**例 3.1.** 假设 $N_1 = \infty$，考虑 $\rho_n = (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_1)^\vee, n \in \mathbb{N}$，那么 $\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_1 \overset{w.o.t.}{\to} \mathbf{0}$。所以 $\rho_n \overset{w.o.t.}{\to} \rho = 0$。易知 $\mathrm{Tr}_2(\rho_n) = \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^\vee \overset{w.o.t.}{\to} 0$，但是 $\mathrm{Tr}_1\, \rho_n = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^\vee$。所以 $\mathrm{Tr}_1\, \rho_n$ 不收敛到 $\mathrm{Tr}_1\, \rho$。

## 3.2 有限维情形下一个更一般的量子 Strassen 定理的充要条件

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 是一个有限维的希尔伯特空间。令 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}$，是一个闭的子空间。给定两个部分密度算子（即半正定算子且迹大于 0 小于等于 1）$\rho_i \in S_+(\mathcal{H}_i)$，$i \in [2]$，给出下面这个半正定优化问题：

$$\begin{aligned} &\mu(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) = \\ &\max\{\mathrm{Tr}(X P_{\mathcal{X}}),\ X \in S_+(\mathcal{H}), \mathrm{Tr}_2\, X \leq \rho_1, \mathrm{Tr}_1\, X \leq \rho_2\}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

写出它的原问题和对偶问题。

| 原问题 | | 对偶问题 | |
|---|---|---|---|
| 求最大值： | $\langle A, X \rangle$, | 求最小值： | $\langle B, Y \rangle$ |
| 限制条件： | $\Phi(X) \leq B$; | 限制条件： | $\Phi^*(Y) \geq A$; |
| | $X \in \mathbf{Pos}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$. | | $Y \in \mathbf{Pos}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)$; |

这里:

$$A = P_{\mathcal{X}}, B = \begin{bmatrix} \rho_1 & \\ & \rho_2 \end{bmatrix},$$

$$\Phi(X) = \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}_2(X) & \\ & \mathrm{Tr}_1(X) \end{bmatrix},$$

$$\Phi^*(Y) = \Phi^* \begin{bmatrix} Y_1 & \cdot \\ \cdot & Y_2 \end{bmatrix} = Y_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes Y_2.$$

很容易验证下面的等式:

$$\forall M, N, \langle \Phi(M), N \rangle = \langle M, \Phi^*(N) \rangle.$$

另外，这个半正定系统的强对偶性质可以通过如下验证原问题的可行域是非空的，且对偶问题的可行域有内点得到。

- 原问题可行域的一个解: 令 $X = \rho_1 \otimes \rho_2 \in \mathbf{Pos}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), \mathrm{Tr}_1(X) \le \rho_2, \mathrm{Tr}_2(X) \le \rho_1$。
- 对偶问题可行域的一个内点: 令 $Y = I_1 \oplus I_2 \in \mathbf{Pos}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2), \Phi^*(Y) = 2I_{12} > P_{\mathcal{X}}$。

因此，这里的原问题对偶问题没有对偶间隙。

**定理 3.4.** 令 $\rho_i \in S_{+,1}(\mathcal{H}_i), i \in [2]$，若 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$，那么存在 $\rho \in S_{+,1}(\mathcal{H}), \operatorname{supp} \rho \subseteq \mathcal{X}$ 使得 $\mathrm{Tr}_2\, \rho = \rho_1, \mathrm{Tr}_1\, \rho = \rho_2$，当且仅当 $\mu(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) = 1$。

证明. 若存在 $\rho \in S_{+,1}(\mathcal{H}), \operatorname{supp} \rho \subseteq \mathcal{X}$ 使得 $\mathrm{Tr}_2\, \rho = \rho_1, \mathrm{Tr}_1\, \rho = \rho_2$。令 $X = \rho$，那么 $\mathrm{Tr}(\rho P_{\mathcal{X}}) = \mathrm{Tr}(\rho) = 1$ 且 $\operatorname{supp} \rho \subseteq \mathcal{X}$。对于每一个可行点 $X$,

$$\mathrm{Tr}(X P_{\mathcal{X}}) \le \mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_2(X)) \le \mathrm{Tr}(\rho_1) = 1,$$

所以 $\mu(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) = 1$。

反之，若 $\mu(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) = 1$，且当 $X = X_{max}$ 时取到最大值。则

$$1 = \mathrm{Tr}(X_{max} P_{\mathcal{X}}) \le \mathrm{Tr}(X_{max}) \le \mathrm{Tr}(\rho_1) = 1,$$

所以 $\mathrm{Tr}(X_{max} P_{\mathcal{X}}) = \mathrm{Tr}(X_{max})$，即支撑集 $\operatorname{supp}(X_{max}) \subset \mathcal{X}$。由 $\mathrm{Tr}_2\, X \le \rho_1$ 和 $\mathrm{Tr}(\rho_1 - \mathrm{Tr}_2(X_{max})) = 0$，可得 $\rho_1 = \mathrm{Tr}_2(X_{max})$。用同样的方法可以证明 $\rho_2 = \mathrm{Tr}_1(X_{max})$。 □

由定理3.4，我们可以通过计算 $\mu(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X})$ 是否等于 1 来验证是否存在量子提升。对于任意一个正数 $\varepsilon$，只需要多项式时间，就可以验证是否存在

$$\mu(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) > 1 - \varepsilon,$$

具体方法可以参考 Nesterov 和 Nemirovsky 的书 [12]。

## 3.3 无限维量子 Strassen 定理

### 3.3.1 必要条件

我们现在证明 [18] 中给出的必要条件，对于任意的可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 也成立:

**引理 3.5.** $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是两个可分希尔伯特空间，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$。假设 $\rho \in T_+(\mathcal{H})$，令 $\rho_1 = \mathrm{Tr}_2(\rho) \in T_+(\mathcal{H}_1)$，$\rho_2 = \mathrm{Tr}_1(\rho) \in T_+(\mathcal{H}_2)$。假设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ 是一个闭的子空间使得 $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq \mathcal{X}$。用 $P_{\mathcal{X}^\perp} \in S_+(\mathcal{H})$ 表示在 $\mathcal{X}^\perp$ 上的正交投影（$\mathcal{X}$ 在 $\mathcal{H}$ 中的正交补空间）。那么接下来的两个条件成立:

*(1)* 若 $Y_i \in S(\mathcal{H}_i), i \in [2]$ 满足 $P_{\mathcal{X}^\perp} \geq Y_1 \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2$，则 $\mathrm{Tr}(\rho_1 Y_1) \leq \mathrm{Tr}(\rho_2 Y_2)$。

*(2)* 若 $Y_i \in S_+(\mathcal{H}_i), i \in [2]$ 满足 $P_{\mathcal{X}^\perp} \geq Y_1 \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2$，则 $\mathrm{Tr}(\rho_1 Y_1) \leq \mathrm{Tr}(\rho_2 Y_2)$。

证明. (1)⇒(2) 显然，下面证明 (2)⇒(1)，假设 $Y_i \in S_{\mathcal{H}_i}, i \in [2]$ 满足 $P_{\mathcal{X}^\perp} \geq Y_1 \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2$。令 $Y_i' = Y_i + tI_i$。选取 $t \gg 0$ 使得 $Y_i' \in S_+(\mathcal{H}_i)$。易知 $Y_1 \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2 = Y_1' \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2'$。因为 $\mathrm{Tr}\,\rho_1 = \mathrm{Tr}\,\rho_2$，所以 $\mathrm{Tr}(\rho_1 Y_1) - \mathrm{Tr}(\rho_2 Y_2) = \mathrm{Tr}(\rho_1 Y_1') - \mathrm{Tr}(\rho_2 Y_2')$。因此条件 (1) 等价于 (2)。

下面假设 $\rho \in T_+(\mathcal{X})$ 且 $\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\,\rho, \rho_2 = \mathrm{Tr}_1\,\rho$。当 $\mathrm{supp}(\rho) \subseteq \mathcal{X}$ 时，有 $\mathrm{Tr}\,\rho P_{\mathcal{X}^\perp} = 0$。下面证明条件 (1) 成立。若 $Y_i \in S(\mathcal{H}_i), i \in [2]$ 满足 $P_{\mathcal{X}^\perp} \geq Y_1 \otimes I_2 - I_1 \otimes Y_2$。那么 $P_{\mathcal{X}^\perp} - Y_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes Y_2 \geq 0$。因此

$$0 \leq \mathrm{Tr}(\rho(P_{\mathcal{X}^\perp} - Y_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes Y_2)) = -\mathrm{Tr}\,\rho Y_1 + \mathrm{Tr}\,\rho Y_2.$$

□

对于无限维情形，我们对 $\mathcal{X}$ 进行讨论，在 $\mathcal{X}$ 有限维时基于半正定优化给出一个较为简单的证明，在 $\mathcal{X}$ 无限维时基于凸优化给出证明。

### 3.3.2 $\mathcal{X}$ 是有限维子空间

#### 3.3.2.1 $\mathcal{H}_1$ 是无限维可分希尔伯特空间，$\mathcal{H}_2$ 是有限维希尔伯特空间

假设 $\mathcal{X}$ 是有限维的。若其中有一个希尔伯特空间是无限维，另一个空间是有限维，则这个问题可以转化为两个空间都是有限维的情形，所以这种情况是简单的。我们给出以下结论:

**引理 3.6.** $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是两个可分希尔伯特空间，维数分别为 $N_1 = \infty, N_2 < \infty$。假设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ 是一个有限维的子空间，维数是 $N$。那么存在 $\mathcal{H}_1' \subset \mathcal{H}_1$，维数最多为 $NN_2$ 使得 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}' = \mathcal{H}_1' \otimes \mathcal{H}_2$.

证明. 假设 $\mathbf{e}_{i,1}, i \in \mathbb{N}$ 是 $\mathcal{H}_1$ 的一组正交基，$\mathcal{H}_2$ 的一组正交基为 $\{\mathbf{e}_{1,2}, \ldots, \mathbf{e}_{N_2,2}\}$。假设 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ 是 $\mathcal{X}$ 的一组正交基。那么

$$\mathbf{x}_l = \sum_{i=p=1}^{\infty, N_2} x_{ip,l} \mathbf{e}_{i,1} \otimes \mathbf{e}_{p,2}, \quad l \in [N].$$

令 $\mathbf{u}_{l,p} = \sum_{i=1}^{\infty} x_{ip,l} \otimes \mathbf{e}_{i,1}$。那么 $\mathbf{x}_l = \sum_{p=1}^{N_2} \mathbf{u}_{l.p} \otimes \mathbf{e}_{p,2}$。令 $\mathcal{H}_1'$ 是由 $\mathbf{u}_{l.p}$ ,$l \in [N], p \in [N_2]$ 组成的 $\mathcal{H}_1$ 的一个有限维子空间，那么 $\dim \mathrm{H}_1' \leq NN_2$ 且 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{H}_1' \otimes \mathcal{H}_2$。 □

因此，在这种情况下这个问题是一个有限维的问题。

#### 3.3.2.2 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 都是无限维可分希尔伯特空间

假设 $\mathcal{H}$ 是一个无限维可分希尔伯特空间，$\mathcal{X}$ 是一个闭子空间。那么 $B(\mathcal{X})$ 是所有满足 $L(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ 且 $L(\mathcal{X}^{\perp}) = 0$ 的有界算子 $L \in B(\mathcal{H})$ 组成的子空间。特别的 $L \in B(\mathcal{H})$，它的支撑集在 $\mathcal{X}$ 中当且仅当 $L \in B(\mathcal{X})$。

下面我们假设 $\mathcal{X}$ 是有限维的，维数为 $N = \dim \mathcal{X}$。那么 $B(\mathcal{X})$ 的维数为 $N^2$。这说明它可以被 $\mathbb{C}^{N\times N}$ 确定下来，选定 $\mathcal{X}$ 的一组正交基 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$。那么可以得到 $B(\mathcal{X})$ 的一组基 $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^{\vee}$，$i, j \in [N]$。因此 $L \in B(\mathcal{X})$ 可以表示成 $L = \sum_{i=j=1}^{N} a_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^{\vee}$，因此 $L$ 与 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 一一对应。由此可以得到 $L \in \mathrm{S}(\mathcal{X})$ 当且仅当 $A$ 是自共轭的。

**引理 3.7.** *[6]* 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，它有几组可数基为 $\{h_n\}, n \in \mathbb{N}$。用记号 $P_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 表示在子空间 $\mathrm{span}\{h_1, ..., h_n\}$，$n \in \mathbb{N}$ 上的正交投影。那么对于所有的 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$，$g \in B(\mathcal{H})$

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n \mathbf{x} - \mathbf{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|g P_n \mathbf{x} - g\mathbf{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n g P_n \mathbf{x} - g\mathbf{x}\| = 0.$$

上面的引理等价于：

$$\lim_{n\to\infty} P_n = Id, \lim_{n\to\infty} g P_n = \lim_{n\to\infty} P_n g P_n = g$$

在强算子拓扑下收敛。

我们需要下面这个引理来证明后面的定理。

**引理 3.8.** $\mathcal{H}$ 是一个无限维可分希尔伯特空间。假设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ 是一个有限维子空间，维数是 $N$。假设 $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ 是 $\mathcal{X}$ 的一组正交基底。若 $Q_n, n \in \mathbb{N}$ 是一组投影组成的序列，使得在强算子拓扑下 $Q_n \to I$。令 $\mathcal{X}_n = Q_n \mathcal{X}$。

*(1)* 存在 $K \in \mathbb{N}$ 使得 $\dim \mathcal{X}_n = N$，$n > K$.

*(2)* 若 $\rho^{(n)} \in S_+(\mathcal{X}_n)$ 且 $\operatorname{Tr} \rho^{(n)} \le c$，$n > K$，那么存在一个子列 $\rho^{(n_k)}$ 在迹范数下收敛到 $\rho \in S_+(\mathcal{X})$。

*(3)* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$，这里 $\mathcal{H}_1$ 是一个无限维可分希尔伯特空间，它有一组正交基为 $\mathbf{e}_{n,1}, n \in \mathbb{N}$。令 $P_{n,1} \in S_+(\mathcal{H}_1)$ 是投影在子空间 $(\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{n,1})$，$n \in \mathbb{N}$ 上的正交投影。令 $Q_n = P_{n,1} \otimes I_2$，那么在强算子拓扑下，$Q_n \to I_1 \otimes I_2$。假如 $\rho^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ 满足 *(2)* 中的假设，且 $\rho^{(n_k)}$ 在迹范数下收敛到 $\rho \in S_+(\mathcal{X})$，那么 $\operatorname{Tr}_i \rho^{(n_k)}$ 在迹范数下收敛到 $\operatorname{Tr}_i \rho$，对于 $i \in [2]$ 都成立。

*(4)* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$，这里 $\mathcal{H}_i$ 是一个无限维可分希尔伯特空间，它有一组正交基为 $\mathbf{e}_{n,i}, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，$i \in [2]$。令 $P_{n,i} \in S_+(\mathcal{H}_i)$ 是投影在子空间 $\operatorname{span}(\mathbf{e}_{1,i}, \ldots, \mathbf{e}_{n,i})$，$n \in \mathbb{N}$ 上的投影算子。令 $Q_n = P_{n,1} \otimes P_{n,2}$，那么在强算子拓扑下 $Q_n \to I_1 \otimes I_2$。假如 $\rho^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ 满足 *(2)* 中的假设条件，且 $\rho^{(n_k)}$ 在迹范数下收敛到 $\rho \in S_+(\mathcal{X})$。那么 $\operatorname{Tr}_i \rho^{(n_k)}$ 在迹范数下收敛到 $\operatorname{Tr}_i \rho$，对于 $i \in [2]$ 都成立。

证明. 首先因为 $Q_n$ 是投影算子，所以我们有不等式 $\|Q_n \mathbf{x}_i\| \le 1$，$i \in [N]$，$n \in \mathbb{N}$ 成立。根据 $\lim_{n\to\infty} \|Q_n \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i\| = 0$，$i \in [N]$ 可知，任取 $\varepsilon > 0$ 存在 $K(\varepsilon)$ 使得

$$1 - \varepsilon < \langle Q_n \mathbf{x}_i, Q_n \mathbf{x}_i \rangle \le 1, \quad |\langle Q_n \mathbf{x}_i, Q_n \mathbf{x}_j \rangle| < \varepsilon \text{ for } i, j \in [N] \text{ 且} i \ne j.$$

令 $W_n = [\langle Q_n \mathbf{x}_i, Q_n \mathbf{x}_j \rangle] \in \mathbb{C}^{N\times N}$，那么显然 $W_n$ 是自共轭的。不难证明，在 $\varepsilon < 1/N$ 时，$W_n$ 是正定的。更进一步地，我们可以证明 $\sigma_1(W_n - I_N) < N\varepsilon$。(这是由 Perron-Frobenius 定理得到的，因为每一个矩阵 $I - W_n$ 中元素的绝对值都小于 $\varepsilon$。可以参考 [7]。) 把 $\lambda_1(W_n) \ge \cdots \ge \lambda_N(W_n)$ 记为 $W_n$ 的特征值。因为 $W_n - I_N$ 是自共轭的，所以可以得到 $|\lambda_i(W_n - I_N)| \le N\varepsilon$。

(1) 当 $K = K(1/N)$ 时，$W$ 是正定的。因此 $Q_n\mathbf{x}_1, \ldots, Q_n\mathbf{x}_N$ 在 $n > K$ 时是线性无关的。

(2) 假设 $n > K$，用记号 $W_n^{1/2}$ 表示 $W_n$ 的平方根，这个平方根是唯一的，且是一个正定矩阵。同时 $W_n^{1/2}$ 的特征值满足不等式 $|\lambda_i(W_n^{1/2} - I_N)| < N\varepsilon$。因此 $\lim_{n\to\infty} W_n^{1/2} = I_N$。对于任意一个算子 $L \in B(\mathcal{X}_n)$ 有展开形式 $\sum_{i=j=1}^{N} a_{ij} Q_n \mathbf{x}_i (Q_n \mathbf{x}_j)^\vee$。另外，$\rho \in S_+(\mathcal{X}_n)$ 当且仅当 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 是自共轭且半正定。然而 $L$ 的迹不等于 $A$ 的迹，但是等于 $W_n^{-1/2} A W_n^{-1/2}$ 的迹，这个迹等于 $\operatorname{Tr} W_n^{-1} A$。这是因为 $\mathcal{X}_n$ 有一组正交基 $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) W^{1/2}$。注意到

$$(1 - N\varepsilon) I_N \le W_n \le (1 + N\varepsilon) I_N \iff (1 + N\varepsilon)^{-1} I_N \le W_n \le (1 - N\varepsilon)^{-1} I_N.$$

因此，若 $A \geq 0$ 可以得到

$$(1+N\varepsilon)^{-1} \operatorname{Tr} A \leq \operatorname{Tr} \rho \leq (1-N\varepsilon)^{-1} \operatorname{Tr} A$$

假设 $\rho^{(n)} \in S_+(\mathcal{X}_n)$ 是一个迹有界的序列，令 $\rho^{(n)} = \sum_{i=j=1}^{N} a_{ij,n} Q_n \mathbf{x}_i (Q_n \mathbf{x}_j)^\vee, n > K$，$A_n = [a_{ij,n}] \in \mathbb{C}^{N\times N}$。那么 $A_n, n > K$ 是半正定且迹有界的矩阵。因此存在一个子列 $A_{n_k}$ 每一个元素都单独收敛到 $A = [a_{ij}]$。令 $\rho = \sum_{i=j=1}^{N} a_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^\vee$，那么可以得到 $\lim_{k\to\infty} \|\rho^{(n_k)} - \rho\|_1 = 0$。

(3) 对于这个情况，我们考虑一个更困难的情形，即 $\mathcal{H}_2$ 也是无限维的。那么 $\mathbf{x} \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 可以表示为矩阵 $X = [x_{pq}], p, q \in \mathbb{N}$，这里 $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{p=q=1}^{N} |x_{pq}|^2$。元素 $(P_{n,1} \otimes I_2)\mathbf{x}_i$ 对应矩阵 $X'_n = [x_{pq}], p \in [n], q \in \mathbb{N}$。把 $\hat{X}_n$ 表示为 $X'_n$ 自然延拓到 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上对应的元素。这里所有 $p > n$ 的行和列都是零。易知，$\lim_{n\to\infty} \|\hat{X}_n - X\| = 0$。因此 $Q_n$ 在强算子拓扑下收敛到 $I_1 \otimes I_2$。令 $Y = [y_{pq}], p, q \in \mathbb{N}$ 与 $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$ 对应。那么 $\operatorname{Tr}_2 \mathbf{x}\mathbf{y}^\vee$ 对应于 $XY^*$。接下来只要证明

$$\lim_{n\to\infty} \|XY^* - \hat{X}_n \hat{Y}_n^*\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|Y^* X - \hat{Y}_n^* \hat{X}_n\|_1 = 0. \tag{3.22}$$

若 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$，那么 $\|\mathbf{x}\mathbf{y}^\vee\|_1 = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ 且 $\|\operatorname{Tr}_i(\mathbf{x}\mathbf{y})\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$。那么

$$\|XY^* - \hat{X}_n \hat{Y}_n^*\|_1 = \|XY^* - X\hat{Y}_n^* + X\hat{Y}_n^* - X_n \hat{Y}_n^*\|_1 \leq$$
$$\|X(Y^* - \hat{Y}_n^*)\|_1 + \|(X - X_n)\hat{Y}_n^*\|_1 \leq \|X\|\|Y^* - \hat{Y}_n^*\| + \|X - X_n\|\|\hat{Y}_n^*\|$$

因此对于任意 $i, j \in [N]$ 可以得到等式 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Tr}_l Q_n \mathbf{x}_i (Q_n \mathbf{y}_j)^\vee = \operatorname{Tr}_l \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j^\vee$，$i, j \in \mathbb{N}$。这说明 $\lim_{k\to\infty} \operatorname{Tr}_l \rho^{(n_k)} = \operatorname{Tr}_l \rho$。

(4) 证明过程同 (3)。

□

**引理 3.9.** $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是两个可分的希尔伯特空间，且有对应的正交基为 $\mathbf{e}_{i,1}, \mathbf{e}_{i,2}, i \in \mathbb{N}$。令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$。假如 $\rho \in S_+(\mathcal{H}), \rho_i \in S_+(\mathcal{H}_i)$ 给定，且 $\operatorname{Tr}_i \rho = \rho_i, i \in [2]$。令 $P_{n,i} \in S_+(\mathcal{H}_i)$ 是投影在子空间 $\mathcal{H}_{i,n} = \operatorname{span}(\mathbf{e}_{1,i}, \ldots, \mathbf{e}_{n,i})$ 上的正交投影。对于所有的 $n \in \mathbb{N}, i \in [2]$，$\rho_{i,n} = P_{n,i} \rho_i P_{n,i}$。令 $\rho^{(n)} = (P_{n,1} \otimes P_{n,2}) \rho (P_{n,1} \otimes P_{n,2})$，那么我们可以得到 $\operatorname{Tr}_2 \rho^{(n)} \leq \rho_{1,n}, \operatorname{Tr}_1 \rho^{(n)} \leq \rho_{2,n}$。

证明. 写出 $\rho$ 的展开式，对其做部分迹可以得到

$$\rho = \sum_{p,q=1}^{\infty} \rho_{1,pq} \otimes \mathbf{e}_{p,2} \mathbf{e}_{q,2}^\vee = \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbf{e}_{i,1} \mathbf{e}_{j,2}^\vee \otimes \rho_{2,ij},$$

$$\rho_1 = \mathrm{Tr}_2\,\rho = \sum_{p=1}^{\infty}\rho_{1,pp},$$

$$\rho_2 = \mathrm{Tr}_1\,\rho = \sum_{i=1}^{\infty}\rho_{2,ii}.$$

这里 $\rho_{1,pq}$ 是 $\mathcal{H}_1$ 空间上的迹类算子，$\rho_{2,ij}$ 是 $\mathcal{H}_2$ 空间上的迹类算子。那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_2\,\rho^{(n)} &= \mathrm{Tr}_2\left((P_{n,1}\otimes P_{n,2})(\sum_{p,q=1}^{\infty}\rho_{1,pq}\otimes \mathbf{e}_{p,2}\mathbf{e}_{q,2}^{\vee})(P_{n,1}\otimes P_{n,2})\right)\\
&= \mathrm{Tr}_2\left(\sum_{p,q=1}^{n}P_{n,1}\rho_{1,pq}P_{n,1}\otimes \mathbf{e}_{p,2}\mathbf{e}_{q,2}^{\vee}\right)\\
&= \sum_{p=1}^{n}P_{n,1}\rho_{1,pp}P_{n,1} \le \sum_{p=1}^{\infty}P_{n,1}\rho_{1,pp}P_{n,1} = \rho_{1,n}.
\end{aligned}$$

类似地，$\mathrm{Tr}_1\,\rho^{(n)} \le \rho_{2,n}$。 □

**定理 3.10.** $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ 是两个可分的希尔伯特空间，对应的正交基为 $\mathbf{e}_{i,1},\mathbf{e}_{i,2}$，$i \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$。令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$。若 $\mathcal{X}\subset\mathcal{H}$ 是有限维的。假设 $\rho_i \in S_+(\mathcal{H}_i)$ 给定，且他们的迹 $\mathrm{Tr}\,\rho_1 = \mathrm{Tr}\,\rho_2 = 1$。令 $P_{n,i}\in S_+(\mathcal{H}_i)$ 是投影到子空间 $\mathcal{H}_{i,n} = \mathrm{span}(\mathbf{e}_{1,i},\ldots,\mathbf{e}_{n,i})$ 上的正交投影。对所有的 $n\in\mathbb{N}, i\in[2]$，令 $\mathcal{X}_n = (P_{n,1}\otimes P_{n,2}\mathcal{X})$，$\rho_{i,n} = P_{n,i}\rho_i P_{n,i}$。

考虑如下的半正定优化问题

$$\begin{aligned}
\mu_n(\rho_1,\rho_2,\mathcal{X}) &= \max\{\mathrm{Tr}(XP_{\mathcal{X}_n});\\
&\qquad \mathrm{Tr}_2\,X \le \rho_{1,n}, \mathrm{Tr}_1\,X \le \rho_{2,n}, X\in(P_{n,1}\otimes P_{n,2})\mathrm{S}_+(\mathcal{H})(P_{n,1}\otimes P_{n,2})\}
\end{aligned}$$

那么下面的条件是等价的

*(1)* $\exists\rho\in S_{+,1}(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2)$ 满足条件

$$\mathrm{Tr}_1(\rho) = \rho_2, \mathrm{Tr}_2(\rho) = \rho_1, \mathrm{supp}(\rho)\subset\mathcal{X} \tag{3.23}$$

*(2)* $\lim_{n\to\infty}\mu_n(\rho_1,\rho_2,\mathcal{X}) = 1$.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) 假设存在一个 $\rho \in S_{+,1}(\mathcal{H})$ 使得条件 (3.23) 成立。令 $\rho^{(n)} = (P_{n,1}\otimes P_{n,2})\rho(P_{n,1}\otimes P_{n,2})$, $\rho^{(n)} \in (P_{n,1}\otimes P_{n,2})S_+(\mathcal{H})(P_{n,1}\otimes P_{n,2})$。由引理3.9可知，$\mathrm{Tr}_2\,\rho^{(n)} \le \rho_{1,n}, \mathrm{Tr}_1\,\rho^{(n)} \le \rho_{2,n}$。因此 $\rho^{(n)}$ 是这个求最大值问题的一个可行解。另外，因为 $\mathrm{supp}(\rho)\subset\mathcal{X}$，所以 $\rho^{(n)}(\mathcal{H}) = (P_{n,1}\otimes P_{n,2})\rho(P_{n,1}\otimes P_{n,2})(\mathcal{H})\subset\mathcal{X}_n$。又因为 $\mathcal{X}_n$ 是闭的，且 $\mathrm{supp}(\rho^{(n)})$ 是 $\rho^{(n)}(\mathcal{H})$ 的闭包，所以 $\mathrm{supp}(\rho^{(n)})\subset\mathcal{X}_n$。所以我们可以得到

$$\mu_n(\rho_1,\rho_2,\mathcal{X}) \ge \mathrm{Tr}(\rho^{(n)}P_{\mathcal{X}_n}) = \mathrm{Tr}(\rho^{(n)}). \tag{3.24}$$

由引理3.8(4)，可知在强算子拓扑下当 $n \to \infty$ 时，$P_{n,1} \otimes P_{n,2} \to I_1 \otimes I_2$。再用引理3.7，可以得到 $\lim_{n\to\infty} \rho^{(n)} = \lim_{n\to\infty}(P_{n,1} \otimes P_{n,2})\rho(P_{n,1} \otimes P_{n,2}) = \rho$。所以 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Tr} \rho^{(n)} = \operatorname{Tr} \rho = 1$。

因为 $P_{\mathcal{X}_n} \le I$，并且 $X \in S_+(\mathcal{H}), \operatorname{Tr}_2 X \le \rho_1$，所以

$$\operatorname{Tr} X P_{\mathcal{X}_n} = \operatorname{Tr} X^{1/2} X^{1/2} P_{\mathcal{X}_n} = \operatorname{Tr} X^{1/2} P_{\mathcal{X}_n} X^{1/2} \le$$
$$\operatorname{Tr} X^{1/2} I X^{1/2} = \operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr}(\operatorname{Tr}_2 X) \le \operatorname{Tr} \rho_1 = 1.$$

因此 $\operatorname{Tr}(\rho^{(n)}) = \operatorname{Tr}(\rho^{(n)} P_{\mathcal{X}_n}) \le \mu_n(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) \le 1$。两边取极限可以得到

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) = 1.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 令 $\varepsilon_n, n \in \mathbb{N}$ 是正的单调递减趋向于 0 的一组序列。假设

$$\operatorname{Tr}(\rho^{(n)} P_{\mathcal{X}_n}) \ge \mu_n(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) - \varepsilon_n,$$

且 $\operatorname{Tr}_2 \rho^{(n)} \le \rho_{1,n}, \operatorname{Tr}_1 \rho^{(n)} \le \rho_{2,n}$，$\rho^{(n)} \in (P_{n,1} \otimes P_{n,2}) S_+(\mathcal{H})(P_{n,1} \otimes P_{n,2}) \subset S_+(\mathcal{X}_n)$。由引理3.8(2) 可知，存在 $n_k$，使得 $\rho^{(n_k)}$ 在迹类下收敛到 $\rho \in S_+(\mathcal{X})$，又由引理3.8(4)，可知 $\operatorname{Tr}_i \rho^{(n_k)}$ 在迹范数下收敛到 $\operatorname{Tr}_i \rho$ 对 $i \in [2]$。对下面不等式两边取极限，

$$\mu_n(\rho_1, \rho_2, \mathcal{X}) - \varepsilon_n \le \operatorname{Tr}(P_{\mathcal{X}_{n_k}} \rho^{(n_k)}) \le \operatorname{Tr}(\rho^{(n_k)}) \le 1.$$

可以得到 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Tr}(\rho^{(n_k)}) = 1$。又因为 $\rho^{(n_k)}$ 在迹范数下收敛到 $\rho$，可以推出 $\operatorname{Tr}(\rho) = 1$。

对于每一个 $n_k$ 有

$$\operatorname{Tr}_2(\rho^{(n_k)}) \le \rho_{1,n_k}. \tag{3.25}$$

前面已经证明过 $\operatorname{Tr}_2(\rho^{(n_k)})$ 在迹范数下收敛到 $\operatorname{Tr}_2(\rho)$。由引理3.7，可知 $\rho_{1,n_k}$ 在迹范数下收敛到 $\rho_1$。通过对式子(3.25)两边取极限，我们可以得到 $\operatorname{Tr}_2 \rho \le \rho_1$。进一步地，$\operatorname{Tr}(\operatorname{Tr}_2 \rho) = \operatorname{Tr} \rho_1 = 1$，所以 $\operatorname{Tr}_2 \rho = \rho_1$。因为 $\rho_1 - \operatorname{Tr}_2 \rho \ge 0$，且 $\operatorname{Tr}(\rho_1 - \operatorname{Tr}_2 \rho) = 0$ 我们可以得到 $\rho_1 - \operatorname{Tr}_2 \rho = 0$，即 $\operatorname{Tr}_2 \rho = \rho_1$。同样可证 $\operatorname{Tr}_1 \rho = \rho_2$。因此这个 $\rho$ 满足条件 (1)。 □

### 3.3.3 $\mathcal{X}$ 是无限维子空间

假设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 中闭的无限维子空间。

下面先证明必要条件：

**引理 3.11.** $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$,$\mathcal{X}\subset\mathcal{H}$ 是其中的一个闭的子空间(可以是无限维),并且它有一组正交的基为 $\mathbf{x}_i, i\in\mathbb{N}$。假设 $\rho\in S_{+,1}(\mathcal{H})$, $\operatorname{supp}\rho\subseteq\mathcal{X}$ 且 $\rho_i\in S_{+,1}(\mathcal{H}_i), i\in[2]$。对于取定的 $n\in\mathbb{N}$,我们把 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ 张成的子空间记作 $\mathcal{X}_n$。那么 $B(\mathcal{X}_n)$ 是由 $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^\vee, i,j\in[n]$ 张成的。在 $B(\mathcal{X}_n)$ 上考虑下面这个有界的凸函数

$$f(L)=\|\operatorname{Tr}_2 L-\rho_1\|_1+\|\operatorname{Tr}_1 L-\rho_2\|_1.$$

那么 $f$ 是 $B(\mathcal{X}_n)$ 上的一个连续的凸函数。考虑下面这个最小值问题:

$$\mu_n(\rho_1,\rho_2)=\min\{f(X),\ X\in S_{+,1}(\mathcal{H})\cap B(\mathcal{X}_n)\}, \tag{3.26}$$

这里 $n\in\mathbb{N}$。那么 $\mu_n(\rho_1,\rho_2), n\in\mathbb{N}$ 是一个单调的序列。假设 $\rho_1=\operatorname{Tr}_2\rho$ 和 $\rho_2=\operatorname{Tr}_1\rho$,那么:

*(1)* $\lim_{n\to\infty}\mu_n(\rho_1,\rho_2)=0$.

*(2)* 令 $\varepsilon_n, n\in\mathbb{N}$ 是正的单调趋向于零的序列。假设 $f(Q_n)\le\mu_n(\rho_1,\rho_2)+\varepsilon_n$,这里 $Q_n\in S_{+,1}(\mathcal{H})\cap B(\mathcal{X}_n)$, $n\in\mathbb{N}$。对于所有 $n\in\mathbb{N}$,令 $\rho_{1,n}:=\operatorname{Tr}_2 Q_n$, $\rho_{2,n}:=\operatorname{Tr}_1 Q_n$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\|\rho_{1,n}-\rho_1\|_1=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|\rho_{2,n}-\rho_2\|_1=0.$$

证明. 用 $\|\cdot\|_1$ 的三角不等式,可以得到

$$|f(X)-f(Y)|\le\|\operatorname{Tr}_2(X)-\operatorname{Tr}_2(Y)\|_1+\|\operatorname{Tr}_1(X)-\operatorname{Tr}_1(Y)\|_1\le 2\|X-Y\|_1.$$

所以 $f$ 在 $T(\mathcal{H})$ 上,在迹范数意义下是连续的。$f$ 的凸性是直接可以证明的。

已知 $B(\mathcal{X}_n)$ 是一个有限维复空间,维数是 $n^2$,$\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^\vee$,$i,j\in[n]$ 是它的一组基。即 $X\in \mathrm{B}(\mathcal{X}_n)$ 可以写成 $X=\sum_{i=j=1}^n a_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j^\vee$ 的形式。因此我们可以用 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 来确定 $\mathrm{B}(\mathcal{X}_n)$ 中的元素,这里 $X$ 用 $A=[a_{ij}]$ 来确定。因为 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ 是正交的,易得 $\|X\|_1=\|A\|=\sum_{i=1}^n\sigma_i(A)$。那就是说,映射 $X\to A$ 是从 $B(\mathcal{X}_n)$ 到 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的一个同构。更精确地,映射 $\mathcal{X}_n\to\mathbb{C}^n$ 是一个同构,这里 $\mathbb{C}^n$ 中蕴含一个标准的内积。特别地,$\|X\|=\|A\|=\sigma_1(A)$。注意到 $\mathrm{S}(\mathcal{X}_n)$ 和所有自共轭矩阵组成的集合 $H_n\subset\mathbb{C}^{n\times n}$ 同构,$\mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H})\cap\mathrm{B}(\mathcal{X}_n)$ 和 $n\times n$ 的密度矩阵组成的凸集 $H_{n,+,1}$ 同构。由 $\mathcal{X}_{n+1}\supset\mathcal{X}_n$ 可知,$\mu_n(\rho_1,\rho_2)$ 是一个不增的序列,所以 $\mu_n(\rho_1,\rho_2)$ 存在极限。下面假设 $\operatorname{Tr}_2\rho=\rho_1, \operatorname{Tr}_1\rho=\rho_2$。我们先证明 $\lim_{n\to\infty}\mu_n(\rho_1,\rho_2)=0$。首先写出 $\rho$ 的谱分解形式

$$\rho=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^\vee,\ \langle\mathbf{y}_i,\mathbf{y}_j\rangle=\delta_{ij}, i,j\in\mathbb{N},\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i=1,\lambda_i\ge\lambda_{i+1}\ge0, i\in\mathbb{N}.$$

因为 $\operatorname{supp}\rho \subseteq \mathcal{X}$，所以 $\mathbf{y}_i \in \mathcal{X}$，$i \in \mathbb{N}$。令 $P_n$ 是 $\mathcal{H}$ 上投影在子空间 $\mathcal{X}_n$ 上的正交投影。那么

$$P_n\rho P_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (P_n\mathbf{y}_i)(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee},$$
$$\|P_n\rho P_n - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (P_n\mathbf{y}_i)(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}\|_1 = \operatorname{Tr}(\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i (P_n\mathbf{y}_i)(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i.$$

由假设可知

$$\rho_1 = \operatorname{Tr}_2\rho = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \operatorname{Tr}_2(\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee}), \quad \rho_2 = \operatorname{Tr}_1\rho = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \operatorname{Tr}_1(\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee})$$

固定 $\varepsilon \in (0, 1/4)$，假设 $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i > 1-\varepsilon$。又注意到 $\lim_{n\to\infty} \| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee}\|_1 = 0$。选取 $n > K(\varepsilon)$ 使得 $\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee}\|_1 < \varepsilon^2$。因此

$$|\operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee})| = |\operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i| \leq \varepsilon^2.$$

令

$$\rho^{N,n} = \frac{1}{\operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee})} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}, \quad \tilde{\rho}^{N,n} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee}.$$

注意到这样定义的 $\rho^{N,n} \in S_{+,1}(\mathcal{X}_n)$。可以推出

$$\begin{aligned}\|\rho^{N,n} - \tilde{\rho}^{N,n}\|_1 \leq \| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee}\|_1 + \\ \|\frac{1 - \operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee})}{\operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee})} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}\|_1 \leq \\ \varepsilon^2 + \frac{|1 - \operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee})|}{\operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee})} \| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}\|_1.\end{aligned}$$

进一步地，

$$\begin{aligned}&\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}\|_1 = \operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}, \\ &|1 - \operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee})| = |\operatorname{Tr}(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee})| \leq \\ &\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}\|_1 \leq \| \sum_{i=1}^{N} \lambda_1\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_n\mathbf{y}_i(P_n\mathbf{y}_i)^{\vee}\|_1 + \\ &\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_1\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee}\|_1 \leq \varepsilon^2 + \varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\|\rho^{N,n}-\tilde{\rho}^{N,n}\|_1 \le 2\varepsilon^2+\epsilon<3\varepsilon$。所以

$$\|\operatorname{Tr}_2\rho^{N,n}-\rho_1\|_1 \le \|\operatorname{Tr}_2(\rho^{N,1}-\tilde{\rho}^{N,n})\|_1+\|\sum_{i=N+1}^{\infty}\lambda_i\operatorname{Tr}_2(\mathbf{y}_i\mathbf{y}_i^{\vee})\|_1 \le$$
$$\|\rho^{N,1}-\tilde{\rho}^{N,n}\|_1+\sum_{i=N+1}^{\infty}\lambda_i \le 3\varepsilon+\varepsilon=4\varepsilon.$$

同理，$\|\operatorname{Tr}_1\rho^{N,n}-\rho_2\|_1\le 4\varepsilon$。这说明了 $\mu_n(\rho_1,\rho_2)\le 8\varepsilon$. 由于 $\varepsilon$ 选取的任意性，我们可以得出 $\lim_{n\to\infty}\mu_n(\rho_1,\rho_2)=0$。

(2) 因为序列 $\{\mu_n(\rho_1,\rho_2)\},\{\varepsilon_n\}$ 收敛到零，所以 $\lim_{n\to\infty}\|\rho_{j,n}-\rho_j\|_1=0$，对于 $j\in[2]$ 都成立。 □

下面先假设 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 中一个是有限维，一个是无限维可分希尔伯特空间。这种情况下我们直接可以证明定理的充分性成立。

**定理 3.12.** $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是两个可分希尔伯特空间。假设其中 $\mathcal{H}_1$ 是无限维，$\mathcal{H}_2$ 是有限维的。$\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$，假设 $\mathcal{X}\subset\mathcal{H}$ 是无限维子空间，$\mathbf{x}_i, i\in\mathbb{N}$ 是它得一组基。假设 $\rho_i\in S_{+,1}(\mathcal{H}_i), i\in[2]$。若 $\mu_n(\rho_1,\rho_2), n\in\mathbb{N}$ 的定义和引理*3.11*中相同，那么存在 $\rho\in S_{+,1}(\mathcal{H}), \operatorname{supp}\rho\subseteq\mathcal{X}$ 使得 $\operatorname{Tr}_2\rho=\rho_1, \operatorname{Tr}_1\rho=\rho_2$ 当且仅当 $\lim_{n\to\infty}\mu_n(\rho_1,\rho_2)=0$。

证明. 必要性已经在引理3.11的第 (1) 部分证明了。假设 $\lim_{n\to\infty}\mu_n(\rho_1,\rho_2)=0$，$Q_n\in \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{X}_n), n\in\mathbb{N}$ 的定义和引理3.11中的定义相同。选取 $Q_{n_k}$ 的一组子列弱收敛到 $\rho\in S_+(\mathcal{H})$。令 $\rho_{1,n_k}=\operatorname{Tr}_2 Q_{n_k}, \rho_{2,n_k}=\operatorname{Tr}_1 Q_{n_k}$。因为 $\mathcal{H}$ 是有限维的，由引理3.3可知 $\rho_{1,n_k}=\operatorname{Tr}_2 Q_{n_k}$ 按照弱拓扑收敛到 $\operatorname{Tr}_2\rho$。引理3.11中证明了 $\rho_{1,n}$ 按照 $\|\cdot\|_1$ 范数收敛到 $\rho_1$，因此 $\operatorname{Tr}_2\rho=\rho_1$。所以 $\operatorname{Tr}\rho=\operatorname{Tr}\rho_1=1$。又因为 $\rho_{2,n}$ 按照范数 $\|\cdot\|_1$ 收敛到 $\rho_2$。由引理3.3，可知 $\operatorname{Tr}_1\rho\le\rho_2$，而在这里 $\operatorname{Tr}\rho=1$，所以有 $\operatorname{Tr}_1\rho=\rho_2$。

下面只要证明 $\operatorname{supp}\rho\subseteq\mathcal{X}$。注意到 $\operatorname{supp}Q_n\subseteq\mathcal{X}_n\subset\mathcal{X}$。令 $\mathbf{z}\in\mathcal{X}^{\perp}$。那么 $Q_n\mathbf{z}=0$，因此 $\langle Q_n\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle=0$。因为 $\lim_{k\to\infty}\langle Q_{n_k}\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle=\langle\rho\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle$，所以 $\langle\rho\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle=0$，因此 $\rho\mathbf{z}=0$，得出 $\operatorname{supp}\rho\subseteq\mathcal{X}$。 □

为了证明 $\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$ 都是无限维可分希尔伯特空间的情况，我们需要几个引理。首先介绍著名的 Banach-Saks 定理 [1]

**定理 3.13.** $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，假设 $(\mathbf{x}_n\in\mathcal{H})_{n\in\mathbb{N}}$ 在弱拓扑下收敛到 $\mathbf{x}$。那么存在一个子列 $(\mathbf{x}_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ 使得，对这组子列求算术平均数得到的一组新的序列在强

拓扑下收敛到 $\mathbf{x}$，即

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{x}_{n_j}=\mathbf{x}.$$

假设有一个序列 $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset \mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 在弱算子拓扑下收敛到 $\rho\in\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$。那我们可知在 $\mathrm{T}_2(\mathcal{H})$ 中，$\rho_n\overset{w.t.}{\to}\rho$ 也成立。在第二章里，我们知道在 $\mathrm{T}_2$ 空间中弱收敛与弱算子收敛是一致的，并且 $\mathrm{T}_2$ 空间是一个希尔伯特空间，所以可以在上面应用 Banach-Saks 定理。

**引理 3.14.** 设 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，若 $\rho_n\in\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 是一组有界线性算子组成的序列，且 $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在弱算子拓扑下收敛到 $\rho$。那么存在一组子列 $(\rho_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ 使得这组子列的算术平均组成的一组新的序列在 $T_2(\mathcal{H})$ 中强收敛到 $\rho$，即

$$\lim_{m\to\infty}\|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\rho_{n_j}-\rho\|_2=0.$$

**引理 3.15.** 若 $A_n\in\mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H}),n\in\mathbb{N}$，且假设 $A_n\overset{w.o.t.}{\to}A\in\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$。那么

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|_1=0\iff\lim_{n\to\infty}\mathrm{Tr}\,A_n=\mathrm{Tr}\,A.$$

证明. 注意到，对于 $A\in\mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H})$ 我们有 $\|A\|_1=\mathrm{Tr}\,A$。因此

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n-A\|_1=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\|A_n\|_1=\|A\|_1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathrm{Tr}\,A_n=\mathrm{Tr}\,A.$$

假如 $A_n\overset{w.o.t.}{\to}A\in\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 且 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Tr}\,A_n=\mathrm{Tr}\,A$。假设结论不成立，即 $\{A_n\}$ 在范数 $\mathrm{T}_1(\mathcal{H})$ 下不收敛到 $A$。因此存在 $\varepsilon_0>0$ 和子列 $\{A_{n_k}\}$ 使得 $\|A_{n_k}-A\|_1\geq\varepsilon_0$ 对所有 $k\in\mathbb{N}$ 成立。为了导出矛盾，不失一般性，我们令 $n_k=k,k\in\mathbb{N}$。对于每个 $A_n$ 做下面这样的奇异值分解：

$$A_n=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i(A_n)\mathbf{g}_{i,n}\mathbf{g}_{i,n}^{\vee},\quad\langle\mathbf{g}_i,\mathbf{g}_j\rangle=\delta_{ij},i,j\in\mathbb{N}.$$

由引理2.1知，存在一个子列 $n_k,k\in\mathbb{N}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_i(A_{n_k})=\sigma_i,\ \mathbf{g}_{i,n_k}\overset{w.t.}{\to}\mathbf{g}_i,\ \text{对于任意的}i\in\mathbb{N},$$
$$A=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^{\vee}.$$

这里 $\{\sigma_i\}$ 是非负单调递减的，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i\leq\liminf\|A_{n_k}\|=\mathrm{Tr}\,A$。因此 $\|\mathbf{g}_i\|\leq 1,i\in\mathbb{N}$。由引理2.1 的证明可知，

$$\mathrm{Tr}\,A=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i\|\mathbf{g}_i\|^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i\leq\mathrm{Tr}\,A.$$

因此对于每个 $\sigma_i > 0$ 可知 $\|\mathbf{g}_i\| = 1$。由引理2.1可知，对于每个 $\sigma_i > 0$ 有 $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{g}_{i,n} - \mathbf{g}_i\| = 0$ 。

下面我们证明更难的情形：$\sigma_i > 0$，$i \in \mathbb{N}$。选定 $\varepsilon \in (0, 1/8)$，那么存在 $M(\varepsilon)$ 使得

$$\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \sigma_i \geq (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i = (1-\varepsilon) \operatorname{Tr} A.$$

因此 $\sum_{i='M(\varepsilon)+1}^{\infty} \sigma_i \leq \varepsilon \operatorname{Tr} A$。根据假设 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Tr} A_n = \operatorname{Tr} A$ 可知存在 $N(\varepsilon)$ 使得对于 $n > N(\varepsilon)$，不等式 $\operatorname{Tr} A_n \leq (1+\varepsilon) \operatorname{Tr} A$ 成立。因为 $\lim_{k\to\infty} \sigma_i(A_{n_k}) = \sigma_i$ ，$i \in \mathbb{N}$ ，所以存在 $N_1(\varepsilon)$ 使得对于每个 $k > N_1(\varepsilon)$ 不等式

$$|\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \sigma_i(A_{n_k}) - \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \sigma_i| \leq \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} |\sigma_i(A_{n_k}) - \sigma_i| \leq \varepsilon \operatorname{Tr} A$$

成立。因此，当 $k > \max(N(\varepsilon), N_1(\varepsilon))$ 时

$$\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \sigma_i(A_{n_k}) \geq (1-2\varepsilon) \operatorname{Tr} A,$$

$$\sum_{i=M(\varepsilon)+1}^{\infty} \sigma_i(A_{n_k}) \leq 3\varepsilon \operatorname{Tr} A.$$

我们用 $\|A_{n_k} - A\|_1$ 在 $n > \max(N(\varepsilon), N_1(\varepsilon))$ 时，估计得到：

$$\begin{aligned}
&\|A_{n_k} - A\|_1 = \|\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(A_{n_k}) \mathbf{g}_{i,n_k} \mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee} - \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^{\vee}\|_1 \leq \\
&\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \|\sigma_i(A_{n_k}) \mathbf{g}_{i,n_k} \mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee} - \sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^{\vee}\|_1 + \\
&\sum_{i=M(\varepsilon)+1}^{\infty} \|\sigma_i(A_{n_k}) \mathbf{g}_{i,n_k} \mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee}\|_1 + \sum_{i=M(\varepsilon)+1}^{\infty} \|\sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^{\vee}\|_1 \leq \\
&\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \|\sigma_i(A_{n_k}) \mathbf{g}_{i,n_k} \mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee} - \sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^{\vee}\|_1 + \sum_{i=M(\varepsilon)+1}^{\infty} \sigma_i(A_{n_k}) + \sum_{i=M(\varepsilon)+1}^{\infty} \sigma_i \leq \\
&\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \|\sigma_i(A_{n_k}) \mathbf{g}_{i,n_k} \mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee} - \sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^{\vee}\|_1 + 4\varepsilon \operatorname{Tr} A.
\end{aligned}$$

对于任意一个 $i \in \mathbb{N}$，等式

$$\lim_{k\to\infty} \|\sigma_i(A_{n_k}) \mathbf{g}_{i,n_k} \mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee} - \sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^{\vee}\|_1 = 0$$

成立。写出式子

$$\begin{aligned}
&\sigma_i(A_{n_k}) \mathbf{g}_{i,n_k} \mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee} - \sigma_i \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^{\vee} = \\
&(\sigma_i(A_{n_k}) - \sigma_i) \mathbf{g}_{i,n_k} \mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee} + \sigma_i(A)(\mathbf{g}_{i,n_k} - \mathbf{g}_i) \mathbf{g}_{i,n}^{\vee} + \sigma_i(A) \mathbf{g}_i (\mathbf{g}_{i,n_k}^{\vee} - \mathbf{g}_i^{\vee})
\end{aligned}$$

我们现在可以说，每一个上面的加数都在 $\|\cdot\|_1$ 范数下趋向于 0。首先，$\|\mathbf{x}\mathbf{y}^\vee\|_1 = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$。其次，

$$\lim_{k\to\infty} |\sigma_i(A_{n_k})) - \sigma_i| = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{g}_{i,n_k} - \mathbf{g}_i\| = 0 \text{ 对于所有} i \in \mathbb{N}.$$

因此存在 $N_2(\varepsilon) > \max(N(\varepsilon), N_1(\varepsilon))$ 使得对所有 $k > N_2(\varepsilon)$ 不等式

$$\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} \|\sigma_i(A_{n_k})\mathbf{g}_{i,n_k}\mathbf{g}_{i,n_k}^\vee - \sigma_i\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^\vee\|_1 \le \varepsilon \operatorname{Tr} A.$$

成立。把上面的所有式子联系起来考虑，可以推出 $\|A_{n_k} - A\| \le 5\varepsilon \operatorname{Tr} A$ 对所有 $k > N_2(\varepsilon)$ 成立。选择 $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{5 \operatorname{Tr} A}$，与我们的假设 $\|A_k - A\|_1 \ge \varepsilon_0$，$k \in \mathbb{N}$ 相互矛盾。 □

**引理 3.16.** $\mathcal{H}$ 是一个可分的希尔伯特空间，$A \in \mathrm{S}(\mathcal{H}) \cup \mathrm{T}(\mathcal{H})$ 是一个自伴随的算子，它的奇异值为 $\sigma_i(A), i \in \mathbb{N}$，对角线上的元素为 $d_i, i \in \mathbb{N}$ (在 $\mathcal{H}$ 的任意一组基下)。那么

$$\sum_{i=1}^{\infty} |d_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(A).$$

证明. 我们在 $\mathcal{H}$ 的一组固定的基下，考虑 $B(\mathcal{H})$ 中算子的对角线上元素。对于某一个算子 $C$，把 $C$ 的特征值和奇异值记为 $\lambda_i(C)$□$\sigma_i(C)$。令 $B$ 是一个让 $AB$ 的对角线元素都变成非负的算子，且 $B$ 是一个对角矩阵，对角线上元素只取 1 或者 $-1$，所以 $BB = Id_{\mathcal{H}}$。$(AB)^* = B^*A^* = BA$，所以 $AB(AB)^* = ABBA = AA = AA^*$，由此可得 $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(AB)$。所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} |d_i| = \operatorname{Tr}(AB) \le \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(AB)| \le \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(AB) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(A).$$

□

**引理 3.17.** 令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$，这里 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是无限维可分希尔伯特空间。假如我们有一个有界的序列 $\rho_n \in \mathrm{S}_{1,+}(\mathcal{H}), n \in \mathbb{N}$ 在弱拓扑下收敛到 $\rho \in \mathrm{S}_+(\mathcal{H})$，且满足下面两个条件

$$\lim_{n\to\infty} \|\operatorname{Tr}_1 \rho_n - \rho_2\|_1 = 0, \quad \rho_2 \in \mathrm{S}_{1,+}(\mathcal{H}_2),$$
$$\lim_{n\to\infty} \|\operatorname{Tr}_2 \rho_n - \rho_1\|_1 = 0, \quad \rho_1 \in \mathrm{S}_{1,+}(\mathcal{H}_1).$$

那么我们可以推出 $\operatorname{Tr}_p \rho = \rho_q$，这里 $\{p, q\} = \{1, 2\}$。进一步地，可以得到 $\rho_n$ 在 $\|\cdot\|_1$ 下收敛到 $\rho$，即

$$\lim_{n\to\infty} \|\rho_n - \rho\|_1 = 0.$$

证明. 根据引理3.14，我们把序列 $\rho_n, n \in \mathbb{N}$ 替换为 $\hat{\rho}_n, n \in \mathbb{N}$，这是 $\rho_n, n \in \mathbb{N}$ 的某个子列的算术平均，使得

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{\rho}_n - \rho\|_2 = 0.$$

易知 $\mathrm{Tr}_1\, \hat{\rho}_n$ 和 $\mathrm{Tr}_2\, \hat{\rho}_n$ 在迹范数下还是收敛到 $\rho_2$ 和 $\rho_1$。

假设我们有谱分解形式

$$\hat{\rho}_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,n} \mathbf{x}_{i,n} \mathbf{x}_{i,n}^{\vee}, \{\lambda_{i,n}\} \searrow 0, \langle \mathbf{x}_{i,n}, \mathbf{x}_{j,n} \rangle = \delta_{ij}, \mathrm{Tr}\, \hat{\rho}_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,n},$$
$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^{\vee}, \{\lambda_i\} \searrow 0, \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij}, \mathrm{Tr}\, \rho = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i.$$

由引理2.4可知 $\lim_{n\to\infty} \lambda_{i,n} = \lambda_i$ 对所有 $i \in \mathbb{N}$ 成立。另外，通过取一次子列 $\hat{\rho}_n$，我们可以假设 $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_{i,n} - \mathbf{x}_i\| = 0$ 对所有的 $\lambda_i > 0$ 都成立。

下面我们要证明 $\mathrm{Tr}_2\, \rho = \rho_1$，$\mathrm{Tr}_1\, \rho = \rho_2$。

第一步，我们证明 $\rho_2' = \rho_2 - \mathrm{Tr}_1\, \rho \in T_+(\mathcal{H}), \rho_1' = \rho_1 - \mathrm{Tr}_2\, \rho \in T_+(\mathcal{H})$。

根据引理3.3可知

$$\begin{aligned} \rho_2' &= \rho_2 - \mathrm{Tr}_1\, \rho \geq 0, \\ \rho_1' &= \rho_1 - \mathrm{Tr}_2\, \rho \geq 0. \end{aligned}$$

根据引理3.2，$\mathrm{Tr}_1\, \rho$ 是迹类算子，因此我们得到

$$\rho_2' = \rho_2 - \mathrm{Tr}_1\, \rho \in T_+(\mathcal{H}).$$

同样的，我们可以证明

$$\rho_1' = \rho_1 - \mathrm{Tr}_2\, \rho \in T_+(\mathcal{H}).$$

考虑 $\rho_1'$ 和 $\rho_2'$ 的谱分解形式：

$$\rho_1' = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{i,1} \mathbf{g}_i \mathbf{g}_i^{\vee}, \{\sigma_{i,1} \geq 0\} \searrow 0, \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \rangle = \delta_{ij}, \mathrm{Tr}\, \rho_1' = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{i,1},$$
$$\rho_2' = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{i,2} \mathbf{f}_i \mathbf{f}_i^{\vee}, \{\sigma_{i,2} \geq 0\} \searrow 0, \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = \delta_{ij}, \mathrm{Tr}\, \rho_2' = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_{i,2}.$$

假设 $\rho_1', \rho_2'$ 都不等于 0，那么存在 $\delta > 0$，使得

$$\sigma_{1,1} > \delta,\ \sigma_{1,2} > \delta. \tag{3.27}$$

下面我们将由此得到一个矛盾。

第二步，给定 $\varepsilon = o(\delta)$，选择一个合适的 $N$ 使得 $\|\widetilde{\rho_1'^N}\|_1 < \varepsilon$，$\|\widetilde{\rho_2'^N}\|_1 < \varepsilon$。

令

$$\rho_1'^N = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{i,1}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^\vee,\ \widetilde{\rho_1'^N} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \sigma_{i,1}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^\vee,$$

$$\rho_2'^N = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{i,2}\mathbf{f}_i\mathbf{f}_i^\vee,\ \widetilde{\rho_2'^N} = \sum_{i=N+1}^{\infty} \sigma_{i,2}\mathbf{f}_i\mathbf{f}_i^\vee.$$

因为 $\rho_1', \rho_2' \in T_+(\mathcal{H})$，对于一个给定的 $\varepsilon = o(\delta)$，存在 $N(\varepsilon)$，使得

$$\|\widetilde{\rho_1'^N}\|_1 < \varepsilon,\ \|\widetilde{\rho_2'^N}\|_1 < \varepsilon. \tag{3.28}$$

对于一个给定的 $\varepsilon = o(\delta)$，在这里固定 $N$，下面的证明中 $N$ 的值不再变化。

第三步，对于上面给定的 $\varepsilon = o(\delta)$，选择一个 $m > N$，使得映射 $R_m = P_m \otimes Q_m$ 满足 $\|R_m\rho R_m - \rho\|_1 < \varepsilon$。

令 $\tilde{\mathcal{H}}_1, \tilde{\mathcal{H}}_2$ 是由所有 $\mathbf{g}_i, \mathbf{f}_i$ 张成的子空间的闭包，令 $\hat{\mathcal{H}}_i$ 是 $\tilde{\mathcal{H}}_i, i \in [2]$ 在 $\mathcal{H}$ 中的正交补空间。选取 $\hat{\mathcal{H}}_1$，$\hat{\mathcal{H}}_2$ 是无限维子空间且有一组正交基记为 $\hat{\mathbf{g}}_i$，和 $\hat{\mathbf{f}}_i, i \in \mathbb{N}$。$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 的一组正交基，记为

$$\{\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{n,1}, \ldots\}, \{\mathbf{e}_{i,2}, \ldots, \mathbf{e}_{n,2}, \ldots\} \tag{3.29}$$

$$\mathbf{e}_{2i-1,1} = \mathbf{g}_i, \mathbf{e}_{2i,1} = \hat{\mathbf{g}}_i, \mathbf{e}_{2i-1,2} = \mathbf{f}_i, \mathbf{e}_{2i,2} = \hat{\mathbf{f}}_i,\ 1 \le i \le N.$$

令 $P_m$ 和 $Q_m$ 是 $\mathrm{span}(\mathbf{e}_{1,1}, \ldots, \mathbf{e}_{2m,1}) \subset \mathcal{H}_1$ 和 $\mathrm{span}(\mathbf{e}_{1,2}, \ldots, \mathbf{e}_{2m,2}) \subset \mathcal{H}_2$ 上的正交投影，$R_m = P_m \otimes Q_m$。

注意到

$$\lim_{m\to\infty} \|R_m\rho R_m - \rho\|_1 = 0.$$

对于前面给定的 $\varepsilon$，可以选取一个 $L(\varepsilon) > N$，使得对于任意的 $m > L(\varepsilon) > N$，我们可以推出

$$\|R_m\rho R_m - \rho\|_1 < \varepsilon. \tag{3.30}$$

在这里取定一个 $m > L(\varepsilon)$ 使得 $m > N$ 且 $\|R_m\rho R_m - \rho\|_1 < \varepsilon$。

第四步，对于固定的 $N$，$m$，我们证明当 $n$ 很大的时候，$\|\operatorname{Tr}_1(\hat{\rho}_n - R_m\hat{\rho}_n R_m) - \rho_2'^N\|_1 \le 4\varepsilon, \|\operatorname{Tr}_2(\hat{\rho}_n - R_m\hat{\rho}_n R_m) - \rho_1'^N\|_1 \le 4\varepsilon.$

因为 $\lim_{n\to\infty}\|\hat{\rho}_n-\rho\|_2=0$，所以

$$\|R_m(\hat{\rho}_n-\rho)R_m\|_2\le\|R_m\|\|\hat{\rho}_n-\rho\|_2\|R_m\|\le\|\hat{\rho}_n-\rho\|_2.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\|R_m\hat{\rho}_nR_m-R_m\rho R_m\|_2=0.$$

对于上面给定的 $\varepsilon$ 和 $m$，我们可以取一个 $K_1(\varepsilon,m)$，当 $n>K_1(\varepsilon,m)$ 时，我们可以得到

$$\|R_m\hat{\rho}_nR_m-R_m\rho R_m\|_2<\frac{\varepsilon}{m}.$$

注意到 $R_m\hat{\rho}_nR_m$ 和 $R_m\rho R_m$ 是在空间 $(P_m\mathcal{H}_1)\otimes(Q_m\mathcal{H}_2)$ 上面定义的，这是一个有限维的空间，因此我们可以推出

$$\|R_m\hat{\rho}_nR_m-R_m\rho R_m\|_1\le m\|R_m\hat{\rho}_nR_m-R_m\rho R_m\|_2\le\varepsilon.$$

根据3.2(2) 可知

$$\|\operatorname{Tr}_1(R_m\hat{\rho}_nR_m)-\operatorname{Tr}_1(R_m\rho R_m)\|_1\le\|R_m\hat{\rho}_nR_m-R_m\rho R_m\|_1\le\varepsilon.$$

另外，我们由条件 $\operatorname{Tr}_1\hat{\rho}_n$ 在 $\|\cdot\|_1$ 下收敛到 $\rho_2$，所以我们可以选取 $K_2(\varepsilon)$，当 $n>K_2(\varepsilon)$ 时，可得

$$\|\operatorname{Tr}_1\hat{\rho}_n-\rho_2\|_1\le\varepsilon.$$

当 $n>\max\{K_1(\varepsilon,m),K_2(\varepsilon)\}$ 时，我们可以得到

$$\|\operatorname{Tr}_1(\hat{\rho}_n-R_m\hat{\rho}_nR_m)-(\rho_2-\operatorname{Tr}_1(R_m\rho R_m))\|_1\le2\varepsilon. \tag{3.31}$$

根据式子 (3.30) 可知

$$\|\operatorname{Tr}_1(R_m\rho R_m)-\operatorname{Tr}_1\rho\|_1\le\|R_m\rho R_m-\rho\|_1<\varepsilon.$$

我们用 $\operatorname{Tr}_1\rho$ 来替换 (3.31) 式中的 $\operatorname{Tr}_1(R_m\rho R_m)$ 可得

$$\|\operatorname{Tr}_1(\hat{\rho}_n-R_m\hat{\rho}_nR_m)-(\rho_2-\operatorname{Tr}_1\rho)\|_1\le3\varepsilon.$$

又因为 $\rho_2'=\rho_2-\operatorname{Tr}_1\rho=\rho_2'^N+\widetilde{\rho_2'^N}$，由 (3.28) 式，可知

$$\|\operatorname{Tr}_1(\hat{\rho}_n-R_m\hat{\rho}_nR_m)-\rho_2'^N\|_1\le4\varepsilon. \tag{3.32}$$

同样可以证明

$$\| \mathrm{Tr}_2(\hat{\rho}_n - R_m\hat{\rho}_n R_m) - \rho_1'^N \|_1 \leq 4\varepsilon. \tag{3.33}$$

第五步，我们证明了 (3.32), (3.33) 不可以同时被满足。

写下 $\hat{\rho}_n$ 的谱分解形式:

$$\hat{\rho}_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,n}\mathbf{x}_{i,n}\mathbf{x}_{i,n}^{\vee}, \{\lambda_{i,n}\} \searrow 0, \langle \mathbf{x}_{i,n}, \mathbf{x}_{j,n}\rangle = \delta_{ij}, \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,n},$$

这里 $\mathbf{x}_{i,n} \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \lambda_{i,n} \geq 0$。用 (3.29) 式中定义的 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 的基，我们可以写出

$$\mathbf{x}_{i,n} = \sum_{p,q=1}^{\infty} \mu_{p,q}^{i,n}\mathbf{e}_{p,1} \otimes \mathbf{e}_{q,2}.$$

可以得到

$$\begin{aligned}
\lambda_{i,n}\mathbf{x}_{i,n}\mathbf{x}_{i,n}^{\vee} &= \lambda_{i,n}(\sum_{p,q=1}^{\infty} \mu_{p,q}^{i,n}\mathbf{e}_{p,1} \otimes \mathbf{e}_{q,2})(\sum_{p,q=1}^{\infty} \mu_{p,q}^{i,n}\mathbf{e}_{p,1} \otimes \mathbf{e}_{q,2})^{\vee} \\
&= \lambda_{i,n}\left(\sum_{p,q,r,v}^{\infty} \mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{r,v}^{i,n}(\mathbf{e}_{p,1} \otimes \mathbf{e}_{q,2})(\mathbf{e}_{r,1} \otimes \mathbf{e}_{v,2})^{\vee}\right).
\end{aligned}$$

即

$$\hat{\rho}_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,n}\left(\sum_{p,q,r,v=1}^{\infty} \mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{r,v}^{i,n}(\mathbf{e}_{p,1} \otimes \mathbf{e}_{q,2})(\mathbf{e}_{r,1} \otimes \mathbf{e}_{v,2})^{\vee}\right),$$

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_n - P_m\hat{\rho}_n P_m &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,n}\left(\sum_{p,q,r,v=1}^{\infty} \mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{r,v}^{i,n}(\mathbf{e}_{p,1} \otimes \mathbf{e}_{q,2})(\mathbf{e}_{r,1} \otimes \mathbf{e}_{v,2})^{\vee}\right) \\
&- \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,n}\left(\sum_{p,q,r,v=1}^{m} \mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{r,v}^{i,n}(\mathbf{e}_{p,1} \otimes \mathbf{e}_{q,2})(\mathbf{e}_{r,1} \otimes \mathbf{e}_{v,2})^{\vee}\right)
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_1(\mathbf{x}_{i,n}\mathbf{x}_{i,n}^{\vee}) &= \sum_{p,q,v} \mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,v}^{i,n}\mathbf{e}_{q,2}\mathbf{e}_{v,2}^{\vee}, \\
\mathrm{Tr}_1\,\hat{\rho}_n &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{i,n}(\sum_{p,q,v} \mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,v}^{i,n}\mathbf{e}_{q,2}\mathbf{e}_{v,2}^{\vee}) \\
&= \sum_{q,v=1}^{\infty}\left((\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,v}^{i,n})\mathbf{e}_{q,2}, \mathbf{e}_{v,2}^{\vee}\right) \\
\mathrm{Tr}_1(\hat{\rho}_n - P_m\hat{\rho}_n P_m) &= \sum_{q,v=1}^{\infty}\left((\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,v}^{i,n})\mathbf{e}_{q,2}, \mathbf{e}_{v,2}^{\vee}\right) \\
&- \sum_{q,v=1}^{m}\left((\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{m} \lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,v}^{i,n})\mathbf{e}_{q,2}, \mathbf{e}_{v,2}^{\vee}\right)
\end{aligned}$$

写出 $\mathrm{Tr}_1(\hat{\rho}_n - P_m\hat{\rho}_n P_m)$ 的对角线上的元素，可得

$$\sum_{q=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}+\sum_{q=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n} \tag{3.34}$$

当 $m, N$ 被选定以后，当 $n > \max\{K_1(\varepsilon, m), K_2(\varepsilon)\}$ 时，根据 (3.32)，可知

$$\| \mathrm{Tr}_1(\hat{\rho}_n - P_m\hat{\rho}_n P_m) - \rho_2'^N \|_1 \leq 4\varepsilon.$$

写下 $\mathrm{Tr}_1(\hat{\rho}_n - P_m\hat{\rho}_n P_m) - \rho_2'^N$ 的对角线上元素，根据引理3.16，对角线上元素的绝对值可以用它的奇异值来限制，即：

$$\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{N}|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}-\sigma_{q,2}|+\sum_{q=N+1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n} \\ &+\sum_{q=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}\leq 4\varepsilon,\end{aligned} \tag{3.35}$$

由 $\lambda_{i,n} \geq 0$ 可知

$$\begin{aligned}\sum_{q=N+1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n} &\geq 0,\\ \sum_{q=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n} &\geq 0.\end{aligned}$$

根据 (3.35) 式，可得

$$\sum_{q=1}^{N}|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}-\sigma_{q,2}|\leq 4\varepsilon. \tag{3.36}$$

同样可以证明

$$\sum_{p=1}^{N}|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{q=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}-\sigma_{p,1}|\leq 4\varepsilon. \tag{3.37}$$

进一步的，我们有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{p=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{q=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}-\sum_{p=1}^{N}\sigma_{p,1}\right|\\ \leq&\sum_{p=1}^{N}|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{q=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}-\sigma_{p,1}|\\ \leq&\ 4\varepsilon.\end{aligned}$$

根据式子 (3.27)，可知

$$\sum_{p=1}^{N}\sigma_{p,1}>\delta.$$

因此

$$\sum_{p=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{q=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}\geq\delta-4\varepsilon. \tag{3.38}$$

回顾式子 (3.35)

$$\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{N}|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}-\sigma_{q,2}|+\sum_{q=N+1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}\\ +&\sum_{q=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{N}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}+\sum_{q=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=N+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}\leq 4\varepsilon.\end{aligned}$$

但是根据式子 (3.38)，可知

$$\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{N}|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}-\sigma_{q,2}|+\sum_{q=N+1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=m+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}\\ +&\sum_{q=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{N}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}+\sum_{q=m+1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{p=N+1}^{\infty}\lambda_{i,n}\mu_{p,q}^{i,n}\bar{\mu}_{p,q}^{i,n}\geq\delta-4\varepsilon.\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon=o(\delta)$，如果取 $\varepsilon<\frac{\delta}{8}$ 的话，就可以导出矛盾。

所以我们有 $\rho_1'$ 或者 $\rho_2'$ 等于 0。同时注意到 $\operatorname{Tr}\rho=\operatorname{Tr}_1\operatorname{Tr}_2\rho=\operatorname{Tr}_2\operatorname{Tr}_1\rho$，所以 $\operatorname{Tr}\rho_1'=\operatorname{Tr}\rho_2'$。因此，如果 $\rho_1'$ 或者 $\rho_2'$ 等于 0，那么两个 $\rho_1'$ 和 $\rho_2'$ 都等于零，即 $\operatorname{Tr}_p\rho=\rho_q$，这里 $\{p,q\}=\{1,2\}$.

第六步，用引理3.15证明 $\rho_n$ 按 $\|\cdot\|_1$ 收敛到 $\rho$。

由 $\operatorname{Tr}_1\rho=\rho_2$ 可知

$$\lim_{n\to\infty}|\operatorname{Tr}\rho_n-\operatorname{Tr}\rho|=\lim_{n\to\infty}|\operatorname{Tr}_2(\operatorname{Tr}_1\rho_n-\rho_2)|\leq\lim_{n\to\infty}\|\operatorname{Tr}_1\rho_n-\rho_2\|_1=0$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Tr}\rho_n=\operatorname{Tr}\rho.$$

根据引理3.15可知 $\rho_n$ 在迹范数下收敛到 $\rho$，即

$$\lim_{n\to\infty}\|\rho_n-\rho\|_1=0.$$

□

由这些引理，我们可以证明当 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是两个无限维可分希尔伯特空间时，量子 Strassen 定理的充分性也成立。

**定理 3.18** (无限维量子 Strassen 定理). $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 是两个无限维可分希尔伯特空间。$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$，假设 $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ 是无限维子空间，$\mathbf{x}_i, i \in \mathbb{N}$ 是它的一组基。假设 $\rho_i \in S_{+,1}(\mathcal{H}_i), i \in [2]$。若 $\mu_n(\rho_1, \rho_2), n \in \mathbb{N}$ 的定义和引理*3.11*中相同，那么存在 $\rho \in S_{+,1}(\mathcal{H}), \operatorname{supp} \rho \subseteq \mathcal{X}$ 使得 $\operatorname{Tr}_2 \rho = \rho_1, \operatorname{Tr}_1 \rho = \rho_2$ 当且仅当 $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\rho_1, \rho_2) = 0$。

证明. 必要性已经在引理3.11的第（1）部分证明了。假设 $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\rho_1, \rho_2) = 0$，$Q_n \in \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{X}_n), n \in \mathbb{N}$ 的定义和引理3.11中的定义相同。选取 $Q_{n_k}$ 的一组子列弱收敛到 $\rho \in S_+(\mathcal{H})$。令 $\rho_{1,n_k} = \operatorname{Tr}_2 Q_{n_k}, \rho_{2,n_k} = \operatorname{Tr}_1 Q_{n_k}$ 。引理3.11证明了 $\rho_{1,n_k}$ 按照范数 $\|\cdot\|_1$ 收敛到 $\rho_1$，$\rho_{2,n_k}$ 按照范数 $\|\cdot\|_1$ 收敛到 $\rho_2$。由引理3.17, 可得 $\operatorname{Tr}_1 \rho = \rho_2$，$\operatorname{Tr}_2 \rho = \rho_1$。

下面只要证明 $\operatorname{supp} \rho \subseteq \mathcal{X}$。注意到 $\operatorname{supp} Q_n \subseteq \mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}$。令 $\mathbf{z} \in \mathcal{X}^\perp$。那么 $Q_n\mathbf{z} = 0$，因此 $\langle Q_n\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle = 0$。因为 $\lim_{k\to\infty}\langle Q_{n_k}\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle = \langle \rho\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle$，所以 $\langle \rho\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle = 0$，所以 $\rho\mathbf{z} = 0$，推出 $\operatorname{supp} \rho \subseteq \mathcal{X}$。 □

**例 3.2.** 假设 $\rho$ 是 $\mathcal{H}$ 中一个密度算子，那么可以写出 $\rho$ 的谱分解形式为

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\vee.$$

在这里 $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$，且每一个 $\lambda_i > 0$，$\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j, i \neq j$ 互相正交，且模为 1。令 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 中的子空间 $\mathcal{X}$ 定义为 $\mathcal{X} = \operatorname{span}\{\mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i\}, i \in \mathbb{N}$，则 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ 中的一个无限维子空间。是否存在量子提升 $\rho\mathcal{X}^\#\rho$?

取 $\mathcal{X}$ 中一组正交基为 $\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i$，令 $\mathcal{X}_n = \operatorname{span}\{\mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i\}, i \in \{1, \ldots, n\}$。由此可知 $\mathrm{B}(\mathcal{X}_n) = \operatorname{span}\{(\mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i)(\mathbf{y}_j \otimes \mathbf{y}_j)^\vee\}, i, j \leq n$。给出 $f(L)$ 的定义：

$$f(L) = \|\operatorname{Tr}_2 L - \rho\|_1 + \|\operatorname{Tr}_1 L - \rho\|_1.$$

给出我们定义的凸优化问题

$$\mu_n(\rho, \rho) = \min\{f(X),\ X \in \mathrm{S}_{+,1}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \cap \mathrm{B}(\mathcal{X}_n)\}.$$

当 $n = k, k \in \mathbb{N}$ 时，$\mathrm{B}(\mathcal{X}_k) = \{(\mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i)(\mathbf{y}_j \otimes \mathbf{y}_j)^\vee\}, i, j \leq k$，任取 $X_k \in \mathrm{B}(\mathcal{X}_k)$，则 $f(X_k) = \|\operatorname{Tr}_2 X_k - \rho\|_1 + \|\operatorname{Tr}_1 X_k - \rho\|_1$。又因为

$$\operatorname{Tr}_2 X_k - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^\vee \in \operatorname{span}\{\mathbf{y}_p \mathbf{y}_q^\vee\}, p \leq k, q \leq k.$$

所以

$$\|\operatorname{Tr}_2 X_k - \rho\|_1 = \|\operatorname{Tr}_2 X_k - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^{\vee}\|_1 + \|\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^{\vee}\|_1 \geq \|\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^{\vee}\|_1.$$

同理可以证明 $\|\operatorname{Tr}_1 X_k - \rho\|_1 \geq \|\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^{\vee}\|_1$。因此可知当 $X_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i)(\mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i)^{\vee}$ 时，$f(X_k)$ 取到最小值，所以

$$\mu_k(\rho, \rho) = 2\|\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^{\vee}\|_1 = 2\sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i.$$

因为 $\rho$ 是迹类算子，所以可知当 $n \to \infty$ 时，$\mu_n(\rho, \rho) \to 0$，且 $X_n \overset{w.o.t.}{\to} X = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i)(\mathbf{y}_i \otimes \mathbf{y}_i)^{\vee}$，所以 $X$ 是 $\rho \mathcal{X}^{\#} \rho$ 的一个证据。

容易验证，$\operatorname{supp} X \subset \mathcal{X}$，$\operatorname{Tr}_1 X = \rho, \operatorname{Tr}_2 X = \rho$。所以 $X$ 确实是 $\rho \mathcal{X}^{\#} \rho$ 的一个证据。

# 第 4 章 结论与展望

## 4.1 总结

本文研究量子 Strassen 定理在无限维的推广。我们给出了无限维可分希尔伯特空间中密度算子、部分迹等的定义。并用投影，半正定优化和凸优化等方法，给出并证明了量子提升在无限维可分希尔伯特空间中存在的充分必要条件。

在第 2 章中，我们首先介绍了可分希尔伯特空间中算子的一些性质，讨论了弱收敛、弱算子收敛在不同范数定义下的区别，还介绍了强收敛的相关性质。然后类比于概率论中的概率耦合和提升，引入了量子耦合和量子提升的概念，并将 Strassen 定理推广到了无限维量子 Strassen 定理。

在第 3 章中，我们介绍了可分希尔伯特空间的张量积，定义了部分迹，并且证明了在可分希尔伯特空间中部分迹与取极限可交换当且仅当空间的维数是有限的。基于这样的性质，我们考虑至少一个希尔伯特空间是无限维时的无限维量子 Stassen 定理。当支撑集是有限维的情形，我们把量子提升问题转化为半正定优化问题，只要验证这个优化问题的解是否等于 1，就可以判断量子提升是否存在。当支撑集是无限维的情形，我们将量子提升问题转化为一系列凸优化的问题，通过验证凸优化问题解的极限是否等于 0，来判断量子提升是否存在。特别地，我们对于一个空间是有限维，一个空间是无限维的特殊情形给出了一个较为简单的证明。对于一般的无限维情形，我们基于 Banach-Saks 引理，运用投影等技巧，证明了一个有界线性算子构成的序列，当它的部分迹满足某些条件，该序列会按照 $\|\cdot\|_1$ 收敛。由此证明无限维的量子 Strassen 定理。

## 4.2 未来工作与展望

量子耦合和提升在量子理论中有广泛的应用，无限维量子 Strassen 定理说明了量子耦合和量子提升的定义在无限维也是合理的。在概率论中，概率耦合和提升常用来比较两个概率分布之间的关系，对应地，量子耦合和提升也可以用来比较两个量子程序之间的关系，这将为量子程序验证带来很大的便利，是今后一个重要研究方向。事实上，概率耦合也经常应用于不同分布之间距离的估算，并由此发展出许多用于分析算法收敛速度的技术。对应地，量子耦合的技术，也可以用于分析量子 Markov 链或部分量子算法的收敛性。

Hsu[10] 对于近似概率耦合做了大量的研究，并用这个方法对程序差分隐私

性质进行了推理。一个可能的方向是对量子耦合进行扩展，定义近似量子耦合，近似量子提升。作为应用，可能用于量子差分隐私机制的验证等。

# 参考文献


[1] S.Banach and S.Saks, Sur la convergence forte dans les champs $L^p$, IEEE, 1930.

[2] P.Blanchard, and E.Bruning, Mathematical methods in physics: distributions, Hilbert space operators and variational methods, Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[3] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, A.Schrijver, Combinatorial Optimization, Wiley, 1998.

[4] J.Diestel, Geometry of Banach Spaces Selected Topics, Springer-Verlag,Berlin-New York, 1975.

[5] L.R. Ford and D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962.

[6] S. Friedland, Infinite Dimensional Generalizations of Choi's Theorem, arXiv:1806.06938.

[7] S. Friedland, Matrices: Algebra, Analysis and Applications, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

[8] S. Friedland, J. Ge and L. Zhi, On quantum Strassen's theorem, arXiv:1905.06865.

[9] S. Friedland and G. Porta, The limit of the product of the parameterized exponential of two operators, J. Functional Analysis, 210 (2004), 436-464.

[10] J. Hsu, Probabilistic Coupling for Probabilistic Reasoning, PhD Thesis, University of Pennsylvania, 2017.

[11] G.J. Murphy, C*-Algebras and Operator Theory, Academic Press,1990.

[12] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994.

[13] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press, 2000.

[14] M. Reed and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis I, Academic Press, 1998.

[15] S. Semmes, An introduction to some aspects of functional analysis, 2: Bounded linear operators, https://math.rice.edu/~semmes/fun2.pdf.

[16] V. Strassen, The existence of probability measures with given marginals, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 423–439.

[17] R.C. Thompson, Singular values, digonal elements, and convexity, SIAM J.Appl.Math, 32(1977), 39-63.

[18] L. Zhou, S. Ying, N. Yu, and M. Ying, Quantum Coupling and Strassen Theorem, 2018, arXiv:1803.10393.

# 作者简历

姓名：葛京通　　性别：男　　出生日期：1994.12.17

2016.9 – 现在　　中国科学院数学与系统科学研究院攻读硕士研究生

2012.9 – 2016.7　　南京师范大学本科生

【已完成（待接收）的论文】

- S. Friedland, J. Ge and L. Zhi, On quantum Strassen's theorem, arXiv:1905.06865.

【学术经历】

- 华东师范大学量子计算暑期班，中国上海，2018 年 7 月
- 日本-亚洲青少年科技交流项目（樱华科技计划），日本新泻，2017 年 7 月-2017 年 8 月

# 致　谢

首先诚挚地感谢我的导师支丽红研究员的悉心指导，其言传身教将使我终生受益，激励我在未来的工作中贯彻严谨的科学精神，勇于开拓创新，不要轻言放弃。

感谢芝加哥大学的 Friedland 教授，本文中的工作是由我的导师，他和我一同完成的，他对于数学的热情感染了我，使我能更投入的学习和工作。

感谢杨铮锋师兄，李楠师兄，郝志伟师兄，姜文嵘师姐，杨志红师姐，在一同讨论课题的过程中，他们给予了我极大的帮助，鼓舞了我的信心，给单调的科研生活带来了很多乐趣。感谢叶科老师，沈月，丁昊，王成杰，潘冯超，陈良彪以及实验室全体老师和同学们的热情帮助和支持，大家在一起的日子快乐而充实！

最后感谢我的父母家人和女友王绮依对我选择数学道路的理解和支持，有你们的认可我的一切工作才显得意义非凡。