密级：______________

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

硕士学位论文

多项式系统简单重根的隔离界

作者姓名：姜文嵘

指导教师：支丽红 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别：理学硕士

学科专业：应用数学

研 究 所：中国科学院数学与系统科学研究院

二〇一七年六月

Separation Bounds of Simple Singular Zeros of Polynomial Systems

A Thesis Submitted to

The University of Chinese Academy of Sciences

in partial fulfillment of the requirement

for the degree of

Master of Science

in

Applied Mathematics

by

Wenrong Jiang

Thesis Supervisor: Professor Lihong Zhi

Academy of Mathematics and Systems Science

Chinese Academy of Sciences

June, 2017

声　　　明

我声明本论文是我本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，本论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

作者签名：　　　　　　日期：

论文版权使用授权书

本人授权中国科学院数学与系统科学研究院可以保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和电子文档，允许本论文被查阅和借阅，可以将本论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编本论文。

（保密论文在解密后适用本授权书。）

作者签名：　　　　　　导师签名：　　　　　　日期：

摘 要

多项式系统根的隔离界，即对于给定的多项式系统及其零点，该零点与多项式系统其他零点之间最小距离的下界。多项式系统根的隔离是多项式系统求解问题中的一项重要内容，也是很多符号和数值计算算法的重要组成部分，在科学与工程计算中有着广泛的应用。通过计算隔离界，我们还可以估计多项式系统零点丛集（cluster）的孤立半径。

本文主要研究多项式系统简单重根的隔离界的计算，以及零点丛集的存在性判定。简单重根也被称为宽度为一的孤立奇异根，多项式系统在简单重根处的 Jacobian 矩阵亏秩为一。

我们首先介绍了多项式系统简单重根代数结构的一种恰当表示——局部对偶空间，以及局部对偶空间的一组既约基（重结构）的参数化表示。然后我们定义了亏秩为一的 Jacobian 矩阵的标准形式。对于给定的多项式系统及其任意重数的简单重根，我们总可以通过酉变换使得 Jacobian 矩阵满足标准形式。基于这样的性质和参数化的重结构，我们简化了简单重根的定义。

其次，在标准形式的假设下，通过对多项式的泰勒展开式中的一些项做迭代替换，我们可以得到简单重根附近的多项式展开式的一般形式，从而定量地给出任意重数的简单重根的隔离界的下界——某个单变元多项式的最小正根。特别地，对于简单三重根，我们给出了局部隔离界的显式表达。同时，文中举例比较了我们计算出的简单重根的隔离界与用其他方法得到的局部隔离界。

最后，我们研究了多项式系统的零点丛集的计算。对于一个多项式系统和它的一个近似根，构造新的多项式系统以这个近似根为简单重根，通过 Rouché 定理，我们给出一种判定准则，来判定在近似根附近是否存在原多项式系统的一个零点丛集，即判定原多项式系统在近似根附近的一个小邻域内根的个数。

关键词： 多项式系统；简单重零点；隔离界；零点丛集

Abstract

The separation bound of zeros of polynomial systems is the lower bound on the minimal distance among zeros. The computation of the separation bound of polynomial systems using symbolic and numeric methods is an important problem of solving polynomial systems, which is widely applied across the engineering and sciences.

This thesis is concerned with the computation of separation bounds of simple multiple zeros of polynomial systems, and the existence of the cluster of polynomial systems. A simple multiple zero of a polynomial system is also known as a breadth-one isolated singular zero, the corank of its Jacobian matrix is one at simple multiple zero.

We first introduce the local dual space for characterizing an isolated singular solution of a polynomial system, and a parametric representation for a reduced basis (multiplicity structure) of the local dual spaces. We present the definition of the standard form of Jacobian matrix whose corank is one. Given a polynomial system with a simple multiple zero, we can always assume that the Jacobian matrix satisfies the standard form by performing a unitary transformation on the polynomial system. Based on the parameterized multiplicity structure, we simplify the definition of simple multiple zeros.

Secondly, under the assumption of the standard form, we can get a general form of polynomial expansion around the simple multiple zero by substituting some items in the Taylor expansion of polynomial iteratively. Then we present a lower bound of the separation bound of simple multiple zeros quantitatively. In particular, for simple triple zeros, we give an explicit expression to the local separation bound. Moreover, we compare our separation bound of simple multiple zeros with the local separation bound obtained by other methods.

Finally, we certify the existence of a cluster of polynomial systems. For a polynomial system with an approximate root, we define a new polynomial system with the approximate root as a simple multiple zero. By Rouché's Theorem, we propose a numerical criterion for the existence of a cluster of the polynomial system around the approximate root.

Keywords: polynomial systems; simple multiple zeros; separation bounds; cluster location

目　录

第一章　引言

1　问题陈述和研究动机

对于给定的多项式系统

$$f(X)=\begin{cases} f_1(X_1,\ldots,X_n),\\ f_2(X_1,\ldots,X_n),\\ \qquad\vdots \\ f_n(X_1,\ldots,X_n),\end{cases}$$

$f_i\in\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]=\mathbb{C}[X], i=1,\ldots,n$，考虑由多项式系统 f 生成的理想 I_f，$x\in\mathbb{C}^n$ 是 f 的重数为 μ 的孤立根，则 x 满足

(1) $f(x)=0$，

(2) 存在一个半径 $r>0$ 的球 $B(x,r)$ 使得 $B(x,r)\cap f^{-1}(0)=\{x\}$，

(3) $\mu=\dim(\mathbb{C}[X]/Q_{f,x})$，

其中

$$B(x,r):=\{y\in\mathbb{C}^n:\|y-x\|<r\}$$

$Q_{f,x}$ 是理想 I_f 的准素分支，I_f 的准素理想是

$$m_x=(X_1-x_1,\ldots,X_n-x_n).$$

在文章 [3] 中，基于 Rouché 定理，条件 (3) 被替换成

(3a) 存在充分接近于 f 的解析函数 g 在 $B(x,r)$ 上有 m 个简单零点。

本文要解决的主要问题是，计算 f 的简单重根的隔离界，估计 f 的零点丛集。

回顾 α-理论 [1]，对于解析函数 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots=\sum_{j=0}^{\infty}a_iz^i$，$z\in\mathbb{C}$，$f'(z)$ 表示 f 的一阶导函数，如果 $(f'(z))^{-1}$ 存在，那么牛顿迭代可表示为

$$N_f(z)=z-(f'(z))^{-1}f(z).$$

在 [1] 中，作者定义了一个辅助变量

$$\gamma(f,z)=\sup_{k\geq 2}\left|\frac{(f'(z))^{-1}f^{(k)}(z)}{k!}\right|^{\frac{1}{k-1}},$$

其中 $f^{(k)}$ 表示 f 的 k 阶导函数，来证明牛顿迭代的收敛性：如果 x 是 f 的根，且 $(f'(x))^{-1}$ 存在，那么任意在以 x 为圆心，半径为 $\frac{5-\sqrt{17}}{4\gamma(f,x)}$ 的球里的点，均可以通过牛顿迭代收敛到 x 。特别地，如果有 f 的另一个根 y，那么便得到了一个关于根的分离的结论：

推论 1.1 [1, 推论 1] 如果 x，y 是 f 的两个不同的根，那么它们之间的距离有下界：

$$\|y-x\| \geq \frac{5-\sqrt{17}}{4\gamma(f,x)}. \tag{1-1}$$

以上的结论可以直接被推广到 n 维空间之间更一般的映射，甚至是 Banach 空间中的映射。对于多项式系统 $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 及其零点 $x \in \mathbb{C}^n$，令 $Df(x)$ 表示 f 在 x 点的 Jacobian 矩阵。假设 $Df(x)$ 可逆，则 x 被称为 f 的简单零点。牛顿迭代可以被定义为

$$N_f(x) = x - Df(x)^{-1}f(x). \tag{1-2}$$

同样地，Shub 和 Smale [11] 也定义了相应的辅助变量

$$\gamma(f,x) = \sup_{k\geq 2}\left\|Df(x)^{-1}\cdot\frac{D^kf(x)}{k!}\right\|^{\frac{1}{k-1}}, \tag{1-3}$$

其中 D^kf 表示 f 的 k-阶导数，是 f 的 k 阶偏导数构成的对称张量，$\|\cdot\|$ 表示经典算子范数。如果 y 是 f 的另一个根，我们有与 [1, 推论 1] 相同的结论。这样我们便可以将简单零点 x 和 f 的其他零点分离开来。

关于以上介绍，更多的细节可查阅 [5, 11–15, 17]。

当 x 的重数大于 1 时，x 是奇异根，即 $\mathrm{rank}(Df(x)) < n$，$Df(x)$ 是奇异矩阵。对此，Dedieu 和 Shub 在 [3] 中针对简单二重根给出了一些定量结果。其中简单二重根定义为：满足 $f(x)=0$ 且

(A) $\dim\ker Df(x) = 1$,

(B) $D^2f(x)(v,v) \notin \mathrm{Im}Df(x)$,

其中 $\ker Df(x)$ 是由单位向量 $v \in \mathbb{C}^n$ 张成的向量空间。他们同时也推广了 (1-3) 中对 γ 的定义：

$$\gamma_2(f,x) = \max\left(1, \sup_{k\geq 2}\left\|A(f,x,v)^{-1}\cdot\frac{D^kf(x)}{k!}\right\|^{\frac{1}{k-1}}\right), \tag{1-4}$$

其中，

$$A(f,x,v) = Df(x). + \frac{1}{2}D^2f(x)(v,\Pi_v.) \tag{1-5}$$

是在简单二重根 x 处可逆的线性算子，Π_v 表示到子空间 $v \subset \mathbb{C}^n$ 的 Hermitian 投影。所以，算子 $A(f,x,v)$ 与坐标系有关。

Dedieu 和 Shub [3] 给出了分离简单二重根 x 和 f 的其他根 y 的下界：

定理 1.1 [3, 定理 1] 如果 x 是 f 的简单二重根，y 是 f 的另一个根，则

$$\|y-x\| \geq \frac{d}{2\gamma_2(f,x)^2}, \tag{1-6}$$

其中 $d \approx 0.2976$ 是方程

$$\sqrt{1-d^2} - 2d\sqrt{1-d^2} - d^2 - d = 0. \tag{1-7}$$

的正实根。

如果 x 只是一个使 $\|f(x)\|$ 和 $\|Df(x)\|$ 都很小的点（或者甚至可以为零），那么 x 很可能非常接近（或属于）f 的一个局部零点丛集。基于这个想法，Dedieu 和 Shub [3] 通过构造一个以 x 为简单重根的多项式系统，利用 Rouché 定理，证明了以下结论：

定理 1.2 [3, 定理 4] 对于给定的点 x 和给定的向量 v，如果判别式

$$\|f(x)\| + \|Df(x)v\|\frac{d}{4\gamma_2(f,x)^2} < \frac{d^3}{32\gamma_2^4\|B(f,x,v)^{-1}\|}, \tag{1-8}$$

成立，那么 f 在以 x 为圆心，半径为 $\frac{d}{4\gamma_2(f,x)^2}$ 的球内有两个零点。

其中，

$$B(f,x,v) = A(f,x,v) - L,$$

$L(v) = Df(x)v$，若 $w \in v^{\perp}$，则 $L(w) = 0$，

$$\gamma_2(f,x) = \max\left(1, \sup_{k\geq 2}\left\|B(f,x,v)^{-1}\cdot\frac{D^k f(x)}{k!}\right\|^{\frac{1}{k-1}}\right). \tag{1-9}$$

Dedieu 和 Shub [3] 在证明这两个定理的过程中，用到了只存在于简单二重根情形的性质。线性算子 $A(f,x,v)$ 恰好对应了 $f(y)$ 在 x 点处的泰勒展开式的前两项，所以只要用 $A(f,x,v)$ 的逆作用到泰勒展开式的两边，便可再由三角不等式得出 $\|y-x\|$ 的下界 [3, 引理 4]。

如果我们想推广 [3] 中的证明方法到简单 μ 重根，需要构造一个在重根处可逆的线性算子，而且这个线性算子与 $f(y)$ 在 x 点处的泰勒展开式的前 μ 项对应。但是当 $\mu \geq 2$ 时，这样的算子是不满足理想 I_f 的局部对偶空间 (2-3) 的稳定性的，也就不能保证算子在重根处可逆，与我们的期望相矛盾。

所以，本文中对 [3] 中结论的推广，一方面沿用了 [3] 中的证明思路，另一方面更重要的是，我们通过定义 Jacobian 矩阵的标准形式，将算子分成两部分分别作用于前 $n-1$ 个多项式 $f_1, \cdots, f_{n-1}$ 和最后一个多项式 f_n，降低了计算的维数，再通过对 f_n 的泰勒展开式的替换变形得到一个新的展开式，使其第一项与我们的算子对应。而且，这种替换方法和 f_n 的表达式可以完全推广到任意重根。

2 论文结构和主要结果

我们将 Dedieu 和 Shub 关于简单二重根的隔离界的定量结果推广到了 Jacobian 矩阵亏秩为 1 的任意重数的简单重根。

假设 x 是 f 的满足 $\dim\ker Df(x) = 1$ 的孤立奇异根。令 $\mathcal{D}_{f,x}$ 表示理想 $I_f = (f_1,\dots,f_n)$ 在 x 点的局部对偶空间：

$$\mathcal{D}_{f,x} := \{\Lambda \in \mathfrak{D}_x \mid \Lambda(g) = 0,\ \forall g \in I_f\},$$

其中 $\mathfrak{D}_x = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\mathbf{d}_x^{\alpha}\}$ 是微分泛函 $\mathbf{d}_x^{\alpha}$ 生成的 $\mathbb{C}$-向量空间，$\alpha \in \mathbb{N}^n$，$\mathbf{d}_x^{\alpha}$ 的具体形式在 (2-1) 中给出。

令 μ 表示 x 的重数，从 $\Lambda_0 = 1$ 开始，

$$\Lambda_1 = d_1 + a_{1,2}d_2 + \cdots + a_{1,n}d_n,$$

其中 $d_1,\dots,d_n$ 是多项式系统 f 在 x 点处的一阶微分泛函。对于 $k = 2,\dots,\mu-1$，通过公式 (2-6) 和 (2-8)，我们可以递归地构造

$$\Lambda_k = \Delta_k + a_{k,2}d_2 + \cdots + a_{k,n}d_n,$$

使得 $\{\Lambda_0,\Lambda_1,\dots,\Lambda_{\mu-1}\}$ 是局部对偶空间 $\mathcal{D}_{f,x}$ 的一组基 [6, 8]。这个构造方法是有效可行的，因为计算过程中矩阵的大小可以被方程的个数约束。

基于以上已有的结论，在本文中，我们将 [3] 中简单二重根的定义推广到简单多重根。f 的简单多重根 x 满足 $f(x) = 0$ 且

(A) $\dim\ker Df(x) = 1$,

(B) $\Delta_k(f) \in \mathrm{im}\, Df(x), k = 2,\dots,\mu-1$,

(C) $\Delta_\mu(f) \notin \mathrm{im}\, Df(x)$.

不失一般性，我们可以假设 $Df(x)$ 具有以下标准形式：

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & D\hat{f}(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1-10}$$

其中 $D\hat{f}(x)$ 是多项式 $\hat{f} = \{f_1,\dots,f_{n-1}\}$ 关于变量 $\hat{X} = \{X_2,\dots,X_n\}$ 的 Jacobian 矩阵，是非奇异的。我们会在第二章第 3 节中证明这种假设的合理性。

如果 x 是 f 的重数为 μ 的简单重根，且 $Df(x)$ 有标准形式 (1-10)，那么显然有

$$\Delta_k(f) \in \mathrm{im}\, Df(x) \Leftrightarrow \Delta_k(f_n) = 0,$$

于是上述条件 (B) 和 (C) 可以简化为

(B) $\Delta_k(f_n) = 0, k = 2,\dots,\mu-1$,

(C) $\Delta_\mu(f_n) \neq 0$.

对于满足条件 (A)，(B) 和 (C) 的简单重根 x，我们推广了 (1-4) 中 γ_2 的定义：

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu(f,x) = \max(\hat{\gamma}_\mu, \gamma_{\mu,n}), \tag{1-11}$$

其中，

$$\hat{\gamma}_{\mu}=\hat{\gamma}_{\mu}(f,x)=\max\left(1,\ \sup_{k\geq 2}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\frac{D^{k}\hat{f}(x)}{k!}\right\|^{\frac{1}{k-1}}\right),\tag{1-12}$$

$$\gamma_{\mu,n}=\gamma_{\mu,n}(f,x)=\left(1,\ \sup_{k\geq 2}\left\|\frac{1}{\Delta_{\mu}(f_{n})}\cdot\frac{D^{k}f_{n}(x)}{k!}\right\|^{\frac{1}{k-1}}\right),\tag{1-13}$$

其中，$D^{k}\hat{f}(x)$，$k\geq 2$ 表示 $\hat{f}$ 关于变量 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 的 k 阶偏导数在 x 点的值。根据这些定义，我们将 [3] 中的主要结论推广到更高重数的简单重根。

首先，在定理 3.5 中，我们给出了分离重数 $\mu\geq 2$ 的简单重根 x 和 f 的其他根 y 的隔离界下界

$$\|y-x\|\geq\frac{d}{2\gamma_{\mu}(f,x)^{\mu}},\tag{1-14}$$

其中 d 是由 (3-20) 定义的单变元多项式 $p(d)$ 的正实根。(3-27) 和 (3-7) 分别给出了重数为 2 和 3 时的 $p(d)$ 的显示表达式。

在第三章第 3 节，我们比较了本文中简单二重根的局部隔离界和 [3] 中简单二重根的隔离界。尽管 (3-7) 的最小正实根 $d\approx 0.2865$ 比 [3] 中给出的 $d\approx 0.2976$ 小，但我们的 γ_2 可能更小。因此，对一些例子 (见例 3.2)，我们的局部隔离界可能比 [3] 中的隔离界大。

其次，对于给定多项式系统 $f:\mathbb{C}^{n}\rightarrow\mathbb{C}^{n}$, $x\in\mathbb{C}^{n}$，如果 f 和 x 满足 $D\hat{f}(x)$ 可逆，且 $\Delta_{\mu}(f_n)\neq 0$，我们定义张量

$$H_{1}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\hat{f}(x)}{\partial X_{1}} & 0\\ \frac{\partial f_{n}(x)}{\partial X_{1}} & \frac{\partial f_{n}(x)}{\partial\hat{X}}\end{pmatrix},\tag{1-15}$$

$$H_{k}=\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ \Delta_{k}(f_{n}) & 0\end{pmatrix}\mathbf{0}_{\underbrace{n\times\cdots\times n}_{k}\times(n-1)}\right),\ 2\leq k\leq\mu-1,\tag{1-16}$$

和多项式

$$g(X)=f(X)-f(x)-\sum_{1\leq k\leq\mu-1}H_{k}(X-x)^{k}.$$

令 $\mathcal{A}$ 是一个可逆矩阵：

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}D\hat{f}(x) & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_{\mu}(f_{n})\end{pmatrix}.\tag{1-17}$$

在定理 3.8 中，我们证明了如果以下不等式成立

$$\|f(x)\|+\sum_{1\leq k\leq\mu-1}\|H_{k}\|\left(\frac{d}{4\gamma_{\mu}(g,x)^{\mu}}\right)^{k}<\frac{d^{\mu+1}}{2\left(4\gamma_{\mu}(g,x)^{\mu}\right)^{\mu}}\|\mathcal{A}^{-1}\|,\tag{1-18}$$

那么 f 在以 x 为圆心，半径为 $\frac{d}{4\gamma_\mu(g,x)^\mu}$ 的球内有 μ 个零点（计算重数）。

第二章　孤立奇异根的代数结构

1　局部对偶空间

令 $\mathbf{d}_x^{\boldsymbol{\alpha}}:\mathbb{C}[X]\to\mathbb{C}$ 表示微分泛函，定义如下：

$$\mathbf{d}_x^{\boldsymbol{\alpha}}(g)=\frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}g}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(x),\quad\forall g\in\mathbb{C}[X],\tag{2-1}$$

其中 $x\in\mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]\in\mathbb{N}^n$。那么我们有

$$\mathbf{d}_x^{\boldsymbol{\alpha}}\left((X-x)^{\boldsymbol{\beta}}\right)=\begin{cases}1, & \text{如果 } \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta},\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}\tag{2-2}$$

令 I_f 为由多项式系统 $f=\{f_1,\ldots,f_n\}$ 生成的理想，其中 $f_i\in\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$。对于给定的孤立奇异根 $x\in\mathbb{C}^n$，I_f 的局部对偶空间 $\mathcal{D}_{f,x}$ 是空间 $\mathfrak{D}_x=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\mathbf{d}_x^{\alpha}\}$ 的子空间，满足

$$\mathcal{D}_{f,x}=\{\Lambda\in\mathfrak{D}_x\mid\Lambda(g)=0,\ \forall g\in I_f\}.\tag{2-3}$$

简单起见，当计值点 x 可以通过上下文确定，不引起疑惑时，我们用 $d_1^{\alpha_1}\cdots d_n^{\alpha_n}$ 代替 $\mathbf{d}_x^{\boldsymbol{\alpha}}$。

令 $\mathcal{D}_{f,x}^{(k)}$ 表示 $\mathcal{D}_{f,x}$ 中微分阶数小于或等于 k 的微分泛函构成的子空间，定义

1. 宽度 $\kappa=\dim\left(\mathcal{D}_{f,x}^{(1)}\setminus\mathcal{D}_{f,x}^{(0)}\right)$,
2. 深度 $\rho=\min\left(\left\{k\mid\dim\left(\mathcal{D}_{f,x}^{(k+1)}\setminus\mathcal{D}_{f,x}^{(k)}\right)=0\right\}\right)$,
3. 重数 $\mu=\dim\left(\mathcal{D}_{f,x}^{(\rho)}\right)$.

如果 x 是 f 的孤立奇异根，那么有 $1\le\kappa\le n$，$\rho<\mu<\infty$。

下面介绍一个反微分算子 $\Phi_\sigma:\mathfrak{D}_x\to\mathfrak{D}_x$：

$$\Phi_\sigma(d_1^{\alpha_1}\cdots d_n^{\alpha_n})=\begin{cases}d_1^{\alpha_1}\cdots d_\sigma^{\alpha_\sigma-1}\cdots d_n^{\alpha_n}, & \text{如果}\alpha_\sigma>0,\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

根据 $\mathcal{D}_{f,x}$ 的稳定性性质，通过矩阵零空间的计算（matrix-kernal computations），可以有效计算局部对偶空间的一组既约基 [2, 9, 10, 16]：

$$\forall\Lambda\in\mathcal{D}_{f,x}^{(k)},\ \Phi_\sigma(\Lambda)\in\mathcal{D}_{f,x}^{(k-1)},\ \sigma=1,\ldots,n.\tag{2-4}$$

2　简单重根

在本文中，我们主要考虑满足 $f(x)=0$，$\dim\ker Df(x)=1$ 的简单重根，在 [2] 中也被称为宽度为 1 的奇异根。

$$\dim(\mathcal{D}_{f,x}^{(k)}\setminus\mathcal{D}_{f,x}^{(k-1)})=1,\ k=1,\ldots,\rho,\ \rho=\mu-1.\tag{2-5}$$

因此，在给定的孤立奇异根 x 点，I_f 的局部对偶空间是

$$\mathcal{D}_{f,x} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{\mu-1}\},$$

其中 $\deg(\Lambda_k) = k$，$\Lambda_0 = 1$。

假设 $\Lambda_1 = a_{1,1}d_1 + \cdots + a_{1,n}d_n$，不失一般性，再假设 $a_{1,1} = 1$。令 $\Psi_\sigma : \mathfrak{D}_x \to \mathfrak{D}_x$ 表示微分算子，定义如下：

$$\Psi_\sigma(d_1^{\alpha_1}\cdots d_n^{\alpha_n}) = \begin{cases} d_\sigma^{\alpha_\sigma+1}\cdots d_n^{\alpha_n}, & \text{如果}\alpha_1 = \cdots = \alpha_{\sigma-1} = 0, \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

对于 $k = 2, \ldots, \mu - 1$，由稳定性的性质，可得

$$\begin{cases} \Phi_1(\Lambda_k) = a_{1,1}\Lambda_{k-1} + \cdots + a_{k-1,1}\Lambda_1 + a_{k,1}\Lambda_0, \\ \vdots \\ \Phi_n(\Lambda_k) = a_{1,n}\Lambda_{k-1} + \cdots + a_{k-1,n}\Lambda_1 + a_{k,n}\Lambda_0. \end{cases} \tag{2-6}$$

令 $a_{1,1} = 1$，$a_{k,1} = 0$ $(k = 2, \ldots, n)$，则系统 (2-6) 有唯一的解

$$\Lambda_k = \Delta_k + a_{k,2}d_2 + \cdots + a_{k,n}d_n,$$

其中

$$\Delta_k = \sum_{\sigma=1}^{n} \Psi_\sigma(a_{1,\sigma}\Lambda_{k-1} + \cdots + a_{k-1,\sigma}\Lambda_1), \tag{2-7}$$

而 $a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ 可以通过求解线性系统 $\Lambda_k(f_i) = 0, i = 1, \ldots, n$ 来获得：

$$\begin{pmatrix} d_2(f_1) & \cdots & d_n(f_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_2(f_n) & \cdots & d_n(f_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Delta_k(f_1) \\ \vdots \\ \Delta_k(f_n) \end{pmatrix}. \tag{2-8}$$

在 [6–8] 中，作者详细讨论证明了上述结论。

下面我们推广 [3] 中对简单二重根的定义：

定义 2.1 多项式系统 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，$x \in \mathbb{C}^n$。假设 $f(x) = 0$，如果 x 满足

(A) $\dim\ker Df(x) = 1$,

(B) $\Delta_k(f) \in \mathrm{im}\, Df(x)$, for $k = 2, \ldots, \mu - 1$,

(C) $\Delta_\mu(f) \notin \mathrm{im}\, Df(x)$.

那么 x 是 f 的简单 μ 重根。

事实上，对于 $\mu = 2$，假设 $\ker Df(x) = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{v\}$，其中 $\|v\| = 1$，那么 $\Lambda_1(f) = Df(x)\cdot v = v_1d_1(f) + \cdots + v_nd_n(f)$，

$$\Delta_2(f) = \sum_{\sigma=1}^{n} \Psi_\sigma(v_\sigma\Lambda_1)(f)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma=1}^{n} \Psi_\sigma(v_\sigma(v_1 d_1 + \cdots + v_n d_n))(f) \\
&= \sum_{i>j} v_i v_j d_i d_j(f) + \Sigma v_i^2 d_i^2(f) \\
&= \frac{1}{2} D^2 f(x)(v, v).
\end{aligned}
$$

因此，条件 $\Delta_2(f) \notin \operatorname{im} Df(x)$ 和 [3] 中给出的条件 $D^2 f(x)(v,v) \notin \operatorname{im} Df(x)$ 是等价的。

3 标准形式

定义 2.2 对于多项式系统 $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，其中 $f_i \in \mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$，如果

$$
Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & D\hat{f}(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2-9}
$$

其中 $D\hat{f}(x)$ 是多项式 $\hat{f} = \{f_1,\ldots,f_{n-1}\}$ 关于变量 $\hat{X} = \{X_2,\ldots,X_n\}$ 的 Jacobian 矩阵，是非奇异的，那么我们说 $Df(x)$ 具有标准形式。

下面我们证明只要 $Df(x)$ 亏秩为 1，那么总可以通过对 f 和变量 X 做酉变换来得到等价的多项式系统，其奇异根的 Jacobian 矩阵满足标准形式 (2-9)。

令 $Df(x) = U \cdot \begin{pmatrix} \Sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V^*$ 是 $Df(x)$ 的奇异值分解，其中 $U = (u_1,\ldots,u_n)$，$V = (v_1,\ldots,v_n)$ 是酉矩阵，V^* 是 V 的 Hermitian 转置，Σ_{n-1} 是非奇异的对角矩阵。如果 $Df(x)$ 不是标准形式 (2-9)，令 $g = U^* \cdot f(W \cdot X)$，其中 $W = (v_n, v_1, \ldots, v_{n-1})$ 也是酉矩阵。假设 x 是 f 的重数为 μ 的简单重根，则 W^*x 是 g 的重数为 μ 的简单重根，而且 g 在 W^*x 点的 Jacobian 矩阵具有标准形式：

$$
\begin{aligned}
Dg(W^*x) &= U^* \cdot Df(x) \cdot W \\
&= U^* \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^* \cdot W \\
&= \begin{pmatrix} \Sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \Sigma_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

进一步，假设 y 是 f 的另一个根，那么 W^*y 也是 g 的另一个根，两个根 x 和 y 之间的欧几里得距离在酉变换下保持不变：

$$
\|W^*x - W^*y\| = \|W^*(x-y)\| = \|x-y\|.
$$

所以，如果 x 是 f 的重数为 μ 的简单重根，那么我们不妨假设 $Df(x)$ 具有标准形式 (2-9)。在这种假设下，我们有

$$\mathrm{im}\, Df(x) = \mathrm{im}\begin{pmatrix} D\hat{f}(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_k(f) \in \mathrm{im}\, Df(x) \Leftrightarrow \Delta_k(f_n) = 0.$$

则条件 (B) 和 (C) 可以简化为：

(B) $\Delta_k(f_n) = 0$, for $k = 2, \ldots, \mu - 1$,

(C) $\Delta_\mu(f_n) \neq 0$.

用于求 $a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ 的值的线性系统 (2-8) 可以被简化为：

$$\begin{pmatrix} d_2(f_1) & \cdots & d_n(f_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_2(f_{n-1}) & \cdots & d_n(f_{n-1}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{k,2} \\ \vdots \\ a_{k,n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Delta_k(f_1) \\ \vdots \\ \Delta_k(f_{n-1}) \end{pmatrix}. \tag{2-10}$$

例 2.1 多项式系统

$$\begin{cases} f_1 = X_1^2 - \frac{1}{4}X_1 - \frac{2}{3}X_2 \\ f_2 = \frac{2}{3}X_1^2X_2 \end{cases} \tag{2-11}$$

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $f(X) = \{f_1, f_2\}$ 的一个三重孤立奇异根，$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 f 另一个根。

通过计算可得

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $g(X) = f(W \cdot X)$，其中，$W = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{73}} & -\frac{3}{\sqrt{73}} \\ -\frac{3}{\sqrt{73}} & -\frac{8}{\sqrt{73}} \end{pmatrix}$，则

$$\begin{cases} g_1 = \frac{64}{73}X_1^2 - \frac{48}{73}X_1X_2 + \frac{9}{73}X_2^2 + \frac{\sqrt{73}}{12}X_2 \\ g_2 = -\frac{2}{219\sqrt{73}}(8X_1 - 3X_2)^2(3X_1 + 8X_2) \end{cases}$$

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 g 的三重孤立奇异根，而且

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{73}}{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

满足标准形式 (2-9)。

进一步，$y = W^* \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{73}} \\ -\frac{3}{4\sqrt{73}} \end{pmatrix}$ 是 g 的另一个根。两根之间的距离 $||y - x|| = 0.25$ 保持不变。

第三章　简单重根的局部隔离界和零点丛集

本章中，我们首先将 [3] 中的主要结果推广到简单三重根，然后再推广到任意重数的简单重根。另外，将我们对简单二重根的局部隔离界与 [3] 中给出的局部隔离界做比较。

1　简单三重根

令 x 为多项式系统 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 的简单三重根，$Df(x)$ 有标准形式 (2-9)，即

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial X_1}=0,\quad \frac{\partial f_n(x)}{\partial X_i}=0,\quad 1\le i\le n$$

并且

$$\Delta_2(f_n)=0,\ \Delta_3(f_n)\neq 0.$$

令 $\Lambda_0=1$，$\Lambda_1=d_1$，计算 I_f 的局部对偶空间的一组基。由 (2-7)，可得

$$\Delta_2=\sum_{\sigma=1}^{n}\Psi(a_{1,\sigma}\Lambda_1)=d_1^2,$$

$$\Lambda_2=d_1^2+a_{2,2}d_2+\cdots+a_{2,n}d_n,$$

其中 $a_{2,2},\ldots,a_{2,n}$ 满足

$$\begin{pmatrix}a_{2,2}\\ \vdots\\ a_{2,n}\end{pmatrix}=-D\hat{f}(x)^{-1}\begin{pmatrix}\Delta_2(f_1)\\ \vdots\\ \Delta_2(f_{n-1})\end{pmatrix}=-D\hat{f}(x)^{-1}\begin{pmatrix}d_1^2(f_1)\\ \vdots\\ d_1^2(f_{n-1})\end{pmatrix},$$

因为 $d_2(f_n)=\cdots=d_n(f_n)=0$，$\Delta_2(f_n)=0$，多项式组 $\hat{f}=\{f_1,\ldots,f_{n-1}\}$ 关于向量 $\hat{X}=\{X_2,\ldots,X_n\}$ 的 Jacobian 矩阵 $D\hat{f}(x)$ 可逆。

进一步，因为 $a_{1,1}=1$，$a_{2,1}=0$，我们有

$$\begin{aligned}\Delta_3&=\sum_{\sigma=1}^{n}\Psi_\sigma(a_{1,\sigma}\Lambda_2+a_{2,\sigma}\Lambda_1)\\ &=\Psi_1(\Lambda_2)+\sum_{\sigma=1}^{n}\Psi_\sigma(a_{2,\sigma}d_1)\\ &=d_1^3+a_{2,2}d_1d_2+\cdots+a_{2,n}d_1d_n.\end{aligned}$$

$$= d_1^3 + (d_1d_2, \ldots, d_1d_n) \cdot \left(-D\hat{f}(x)^{-1}\right) \cdot \begin{pmatrix} d_1^2(f_1) \\ \vdots \\ d_1^2(f_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

简单起见，我们使用以下等价条件来描述简单三重根：

$$\Delta_2(f_n) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1^2} = 0, \tag{3-1}$$

$$\Delta_3(f_n) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial X_1^3} - \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \cdot D\hat{f}(x)^{-1} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1^2} \neq 0. \tag{3-2}$$

对于 γ_3 的定义，我们已经在 (1-11) 中给出：

$$\gamma_3 = \gamma_3(f, x) = \max(\hat{\gamma}_3, \gamma_{3,n}),$$

其中，

$$\hat{\gamma}_3 = \hat{\gamma}_3(f, x) = \max\left(1, \sup_{k\geq 2} \left\| D\hat{f}(x)^{-1} \frac{D^k \hat{f}(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}\right),$$

$$\gamma_{3,n} = \gamma_{3,n}(f, x) = \max\left(1, \sup_{k\geq 2} \left\| \frac{1}{\Delta_3(f_n)} \cdot \frac{D^k f_n(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}}\right).$$

$D^k \hat{f}(x)$ 表示 $\hat{f}$ 关于 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的 k 阶偏导数。

对于两个非零的向量 a, $b \in \mathbb{C}^n$，如下定义他们之间的夹角 [3]：

$$d_P(a, b) = \arccos \frac{|\langle a, b\rangle|}{\|a\| \cdot \|b\|}. \tag{3-3}$$

令 y 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的另一个向量，且 $y \neq x$，我们定义

$$w = y - x = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}.$$

令 $\varphi = d_P(v, y - x)$，$v = (1, 0, \ldots, 0)^T$，那么有

$$|\zeta| = \|w\| \cos\varphi, \ \ \|\eta\| = \|w\| \sin\varphi.$$

下面我们将 [3] 的主要结论推广到简单三重根。

引理 3.1 如果 $\hat{\gamma}_3(f, x)\|w\| \leq \frac{1}{2}$，那么

$$\left\| D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y) \right\| \geq \|w\| \sin\varphi - 2\hat{\gamma}_3(f, x)\|w\|^2.$$

证明 对 $\hat{f}(y)$ 在 x 点做泰勒展开，因为 $\frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial X_1}=0$，所以有

$$\hat{f}(y)=\hat{f}(x)+D\hat{f}(x)\eta+\sum_{k\geq 2}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}.$$

注意到 $\hat{f}(x)=0$，$D\hat{f}(x)$ 为可逆矩阵，故

$$\eta=D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)-\sum_{k\geq 2}D\hat{f}(x)^{-1}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}.$$

由三角不等式，可得

$$\begin{aligned}\|w\|\sin\varphi=\|\eta\| &\leq \left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|+\sum_{k\geq 2}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\frac{D^k\hat{f}(x)}{k!}\right\|\|y-x\|^k\\ &\leq \left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|+\sum_{k\geq 2}\hat{\gamma}_3(f,x)^{k-1}\|w\|^k\\ &\leq \left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|+2\hat{\gamma}_3(f,x)\|w\|^2,\end{aligned}$$

□

令

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}D\hat{f}(x) & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta_3(f_n)\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n},\tag{3-4}$$

因为 $D\hat{f}(x)$ 可逆，$\Delta_3(f_n)\neq 0$，所以算子 $\mathcal{A}$ 可逆：

$$\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}D\hat{f}(x)^{-1} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\Delta_3(f_n)}\end{pmatrix}.\tag{3-5}$$

引理 3.2 如果 $\gamma_3(f,x)\|w\|\leq\frac{1}{2}$，那么

$$\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\|\geq\frac{\cos^3\varphi-8\gamma_3^2\cos^2\varphi\sin\varphi-7\gamma_3^2\cos\varphi\sin^2\varphi-2\gamma_3^2\sin^3\varphi}{1+2\cos\varphi+\sin\varphi}\|w\|^3-2\gamma_3^3\|w\|^4.$$

证明 由 $\hat{f}(y)$ 在 x 点的泰勒展开式，可得

$$\eta=D\hat{f}(x)^{-1}\left(\hat{f}(y)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial X_1^2}\zeta^2-\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial X_1\partial\hat{X}}\zeta\eta-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial\hat{X}^2}\eta^2-\sum_{k\geq 3}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}\right).\tag{3-6}$$

将 $f_n(y)$ 在 x 点处做泰勒展开，因为 $\frac{\partial f_n(x)}{\partial X_1}=\cdots=\frac{\partial f_n(x)}{\partial X_n}=\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1^2}=0$，所以有

$$\begin{aligned}f_n(y)=&\left(\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1\partial\hat{X}}\zeta\eta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial\hat{X}^2}\eta^2\right)+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial X_1^3}\zeta^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial X_1^2\partial\hat{X}}\zeta^2\eta\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial X_1\partial\hat{X}^2}\zeta\eta^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial\hat{X}^3}\eta^3+\sum_{k\geq 4}\frac{D^k f_n(x)(y-x)^k}{k!}.\end{aligned}$$

然后用 η 的展开式 (3–6) 替换 $\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}\zeta\eta$ 中的 η 和 $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial \hat{X}^2}\eta^2$ 中其中一个 η。因为 $\Delta_3(f_n) \neq 0$，所以有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_3(f_n)} f_n(y) &= \frac{1}{\Delta_3(f_n)}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\zeta + \frac{1}{\Delta_3(f_n)}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial \hat{X}^2} D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\eta + \zeta^3 \\
&+ \frac{1}{\Delta_3(f_n)} C_{2,1}\zeta^2\eta + \frac{1}{\Delta_3(f_n)} C_{1,2}\zeta\eta^2 + \frac{1}{\Delta_3(f_n)} C_{0,3}\eta^3 + \sum_{k\geq 4}\frac{1}{\Delta_3(f_n)}\frac{D^k f_n(x)(y-x)^k}{k!} \\
&+ \frac{1}{\Delta_3(f_n)} T_{1,0}\sum_{k\geq 3} D\hat{f}(x)^{-1}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}\zeta + \frac{1}{\Delta_3(f_n)} T_{0,1}\sum_{k\geq 3} D\hat{f}(x)^{-1}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}\eta.
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
C_{2,1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial X_1^2 \partial \hat{X}} - \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}\cdot D\hat{f}(x)^{-1}\frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial \hat{X}^2}\cdot D\hat{f}(x)^{-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1^2}, \\
C_{1,2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}^2} - \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}\cdot D\hat{f}(x)^{-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial \hat{X}^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial \hat{X}^2}\cdot D\hat{f}(x)^{-1}\frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}, \\
C_{0,3} &= \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial \hat{X}^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial \hat{X}^2}\cdot D\hat{f}(x)^{-1}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial \hat{X}^2}, \\
T_{1,0} &= -\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}}, \\
T_{0,1} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial \hat{X}^2}.
\end{aligned}$$

因为大多数算子范数满足如下不等式：

$$\left\|\frac{\partial^k \hat{f}(x)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^j}\right\| \leq \|D^k\hat{f}(x)\|,\ \left\|\frac{\partial^k f_n(x)}{\partial X_1^i \partial \hat{X}^j}\right\| \leq \|D^k f_n(x)\|,\ i+j=k.$$

所以，由三角不等式以及假设条件 $\hat{\gamma}_3(f,x)\|w\| \leq \frac{1}{2}$，$\gamma_{3,n}(f,x)\|w\| \leq \frac{1}{2}$，可得

$$\begin{aligned}
|\zeta|^3 \leq& \left|\frac{1}{\Delta_3(f_n)} f_n(y)\right| + 2\gamma_{3,n}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\||\zeta| + \gamma_{3,n}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|\|\eta\| \\
&+ (3\gamma_{3,n}^2 + 2\gamma_{3,n}\cdot 2\hat{\gamma}_3 + \gamma_{3,n}\hat{\gamma}_3)|\zeta|^2\|\eta\| \\
&+ (3\gamma_{3,n}^2 + 2\gamma_{3,n}\hat{\gamma}_3 + \gamma_{3,n}\cdot 2\hat{\gamma}_3)|\zeta|\|\eta\|^2 + (\gamma_{3,n}^2 + \gamma_{3,n}\hat{\gamma}_3)\|\eta\|^3 \\
&+ \sum_{k\geq 4}\gamma_{3,n}^{k-1}\|w\|^k + 2\gamma_{3,n}\sum_{k\geq 3}\hat{\gamma}_3^{k-1}\|w\|^k|\zeta| + \gamma_{3,n}\sum_{k\geq 3}\hat{\gamma}_3^{k-1}\|w\|^k\|\eta\| \\
\leq& \left|\frac{1}{\Delta_3(f_n)} f_n(y)\right| + \left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|(2\gamma_{3,n}|\zeta| + \gamma_{3,n}\|\eta\|) \\
&+ (3\gamma_{3,n}^2 + 5\gamma_{3,n}\hat{\gamma}_3)|\zeta|^2\|\eta\| + (3\gamma_{3,n}^2 + 4\gamma_{3,n}\hat{\gamma}_3)|\zeta|\|\eta\|^2 \\
&+ (\gamma_{3,n}^2 + \gamma_{3,n}\hat{\gamma}_3)\|\eta\|^3 + 2\gamma_{3,n}^3\|w\|^4 + 4\gamma_{3,n}\hat{\gamma}_3^2\|w\|^3|\zeta| + 2\gamma_{3,n}\hat{\gamma}_3^2\|w\|^3\|\eta\| \\
\leq& \left|\frac{1}{\Delta_3(f_n)} f_n(y)\right| + \left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|(2\gamma_{3,n}|\zeta| + \gamma_{3,n}\|\eta\|) + 8\gamma_3^2|\zeta|^2\|\eta\| \\
&+ 7\gamma_3^2|\zeta|\|\eta\|^2 + 2\gamma_3^2\|\eta\|^3 + 2\gamma_3^3\|w\|^4 + 4\gamma_3^3\|w\|^3|\zeta| + 2\gamma_3^3\|w\|^3\|\eta\|,
\end{aligned}$$

又由于 $|\zeta| = \|w\|\cos\varphi$, $\|\eta\| = \|w\|\sin\varphi$，所以有

$$\begin{aligned}\|w\|^3\cos^3\varphi \le &\left|\frac{1}{\Delta_3(f_n)}f_n(y)\right| + \left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|\gamma_{3,n}\|w\|(2\cos\varphi+\sin\varphi)\\ &+2\gamma_3^2\|w\|^3\sin^3\varphi + 7\gamma_3^2\|w\|^3\cos\varphi\sin^2\varphi + 8\gamma_3^2\|w\|^3\cos^2\varphi\sin\varphi\\ &+2\gamma_3^3\|w\|^4(1+2\cos\varphi+\sin\varphi)\end{aligned}$$

当 $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，$1 \le 2\cos\varphi + \sin\varphi \le \sqrt{5}$，故

$$\begin{aligned}&\frac{\cos^3\varphi - 8\gamma_3^2\cos^2\varphi\sin\varphi - 7\gamma_3^2\cos\varphi\sin^2\varphi - 2\gamma_3^2\sin^3\varphi}{1+2\cos\varphi+\sin\varphi}\|w\|^3 - 2\gamma_3^3\|w\|^4\\ \le&\frac{1}{1+2\cos\varphi+\sin\varphi}\left|\frac{1}{\Delta_3(f_n)}f_n(y)\right| + \frac{\gamma_{3,n}w(2\cos\varphi+\sin\varphi)}{1+2\cos\varphi+\sin\varphi}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|\\ \le&\left|\frac{1}{\Delta_3(f_n)}f_n(y)\right| + \frac{\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|\\ \le&\sqrt{2}\left\|\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}}D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\\ \frac{1}{\Delta_3(f_n)}f_n(y)\end{pmatrix}\right\|\\ \le&\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}D\hat{f}(x)^{-1} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\Delta_3(f_n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{f}(y)\\ f_n(y)\end{pmatrix}\right\|\\ =&\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\|.\end{aligned}$$

□

引理 3.3 $d \approx 0.08507$ 是等式

$$(1-2d-8d^2)\sqrt{1-d^2} - 9d - d^2 + 6d^3 = 0. \tag{3-7}$$

的最小正根。θ 按照如下定义：

$$\sin\theta = \frac{d}{\gamma_3^2}. \tag{3-8}$$

那么，当 $\gamma_3(f,x)\|w\| \le \frac{1}{2}$ 时，对于任意的 $y \in \mathbb{C}^n$，有以下结论：

$$\theta \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \text{ 并且 } \|\mathcal{A}^{-1}f(y)\| \ge \sqrt{2}\gamma_3\|w\|\left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_3} - \|w\|\right),$$

或者

$$0 \le \varphi \le \theta \text{ 并且 } \|\mathcal{A}^{-1}f(y)\| \ge 2\gamma_3^3\|w\|^3\left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_3} - \|w\|\right).$$

证明 对于 $\theta \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$，由引理 3.1，可得

$$\sqrt{2}\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\| = \left\|\begin{pmatrix}D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\\ \frac{2}{\Delta_3(f_n)}f_n(y)\end{pmatrix}\right\| \ge \left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|$$

$$\geq \quad \|w\|\sin\theta - 2\hat{\gamma}_3(f,x)\|w\|^2 \geq 2\gamma_3\|w\|\left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_3} - \|w\|\right).$$

对于 $0 \leq \varphi \leq \theta$，由引理 3.2，可得

$$\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\| \geq 2\gamma_3^3\|w\|^3\left(\frac{\cos^3\varphi - 8\gamma_3^2\cos^2\varphi\sin\varphi - 7\gamma_3^2\cos\varphi\sin^2\varphi - 2\gamma_3^2\sin^3\varphi}{2\gamma_3^3(1+2\cos\varphi+\sin\varphi)} - \|w\|\right).$$

令

$$h(\varphi) = \frac{\cos^3\varphi - 8\gamma_3^2\cos^2\varphi\sin\varphi - 7\gamma_3^2\cos\varphi\sin^2\varphi - 2\gamma_3^2\sin^3\varphi}{2\gamma_3^3(1+2\cos\varphi+\sin\varphi)}.$$

我们断言：

$$h(\theta) \geq \frac{\sin\theta}{2\gamma_3}.$$

要证明这个结论，只需证明

$$\left(1-\frac{d^2}{\gamma_3^4}\right)^{\frac{3}{2}} - 8d\left(1-\frac{d^2}{\gamma_3^4}\right) - \frac{7d^2}{\gamma_3^2}\sqrt{1-\frac{d^2}{\gamma_3^4}} - \frac{2d^3}{\gamma_3^4} - d - 2d\sqrt{1-\frac{d^2}{\gamma_3^4}} - \frac{d^2}{\gamma_3^2} \geq 0.$$

因为 $\sin\theta = \frac{d}{\gamma_3^2}$。

又因为这个函数在 $d \in \left[0, \frac{1}{6}\right]$ 上关于 $\gamma_3 \geq 1$ 是递增的，类似于 [3, 引理 4] 的证明，只需证明上述不等式在 $\gamma_3 = 1$ 时成立，即

$$(1-2d-8d^2)\sqrt{1-d^2} - 9d - d^2 + 6d^3 \geq 0.$$

令不等式左边取零，求等式 (3-7) 的最小正根，得

$$d \approx 0.08507 \in \left[0, \frac{1}{6}\right],$$

所以，

$$h(\theta) \geq \frac{\sin\theta}{2\gamma_3}.$$

进一步，多项式 $h(\varphi)$ 在以下区间是非负递减的：

$$\varphi \in [0, \theta], \quad \theta \in \left[0, \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right], \tag{3-9}$$

因为对于满足 (3-9) 的 φ，$h(\varphi)$ 的分子部分非负递减，分母部分为正且递增。因此对于满足 (3-9) 的 φ，

$$h(\varphi) \geq h(\theta) \geq \frac{\sin\theta}{2\gamma_3}.$$

再由引理 3.2，可得

$$\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\| \geq 2\gamma_3^3\|w\|^3\left(h(\varphi) - \|w\|\right) \geq 2\gamma_3^3\|w\|^3\left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_3} - \|w\|\right).$$

□

令 $d \approx 0.08507$ 是等式 (3-7) 的最小正根。以下几个定理将 [3] 的结果推广到了简单三重根。

定理 3.1 令 x 是多项式系统 f 的孤立简单三重根，y 是 f 的另一个根，则

$$\|y - x\| \geq \frac{d}{2\gamma_3^3}. \tag{3-10}$$

证明 因为 $f(y) = 0$，当 $\gamma_3\|w\| \leq \frac{1}{2}$ 时，由引理 3.3 和 (3-8)，可得

$$\|y - x\| = \|w\| \geq \frac{\sin\theta}{2\gamma_3} = \frac{d}{2\gamma_3^3}.$$

当 $\gamma_3\|w\| \geq \frac{1}{2}$ 时，由 $\gamma_3 \geq 1$，$d < 1$，可得出同样的结论。 □

定理 3.2 令 x 是多项式系统 f 的孤立简单三重根，且 y 满足 $\|y - x\| \leq \frac{d}{4\gamma_3^3}$，则

$$\|f(y)\| \geq \frac{d\|y - x\|^3}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|}.$$

证明

$$\|w\| = \|y - x\| \leq \frac{d}{4\gamma_3^3} = \frac{\sin\theta}{4\gamma_3},$$

由引理 3.3，可得

$$\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\| \geq 2\gamma_3^3\|w\|^3\left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_3} - \|w\|\right) \geq 2\gamma_3^3\|w\|^3\frac{\sin\theta}{4\gamma_3} = 2\gamma_3^3\|w\|^3\frac{d}{4\gamma_3^3} = \frac{d}{2}\|w\|^3.$$

□

对于 $R > 0$，我们定义

$$d_R(f, g) = \max_{\|y-x\|\leq R}\|f(y) - g(y)\|. \tag{3-11}$$

定理 3.3 令 x 是多项式系统 f 的孤立简单三重根，且

$$0 < R \leq \frac{d}{4\gamma_3^3}.$$

如果

$$d_R(f, g) < \frac{dR^3}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|},$$

那么 g 在 $B(x, R)$ 上的根的重数之和是三。

证明 由定理 3.2，对于任意满足 $\|y-x\|=R$ 的 y，有

$$\|f(y)-g(y)\| \le d_R(f,g) < \frac{dR^3}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|} = \frac{d\|y-x\|^3}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|} \le \|f(y)\|,$$

由 Rouché 定理，f 和 g 在 $B(x,R)$ 上的零点个数相等。再由定理 3.1，当 $R \le \frac{d}{4\gamma_3^3}$ 时，f 在 $B(x,R)$ 上有唯一零点 x。所以，g 在 $B(x,R)$ 上有三个根。 □

给定 $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$，$x \in \mathbb{C}^n$，满足 $D\hat{f}(x)$ 可逆，且

$$\Delta_3(f_n) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial X_1^3} - \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} D\hat{f}(x)^{-1} \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1^2} \ne 0.$$

定义张量

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{f}(x)}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial X_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial \hat{X}} \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1^2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{0}_{n\times n\times(n-1)} \right),$$

和多项式

$$g(X) = f(X) - f(x) - H_1(X-x) - H_2(X-x)^2.$$

定理 3.4 记 $\gamma_3 = \gamma_3(g,x)$，如果

$$\|f(x)\| + \|H_1\|\frac{d}{4\gamma_3^3} + \|H_2\|\frac{d^2}{16\gamma_3^6} < \frac{d^4}{128\gamma_3^9\|\mathcal{A}^{-1}\|},$$

那么 f 在以 x 为球心，半径为 $\frac{d}{4{\gamma_3}^3}$ 的球里，有三个零点（计算重数）。

证明 自然地，我们有 $g(x)=0$，

$$Dg(x) = Df(x) - H_1 = \begin{pmatrix} 0 & D\hat{f}(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

而且

$$\Delta_2(g_n) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_n(x)}{\partial X_1^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}\Delta_3(g_n) &= \frac{1}{6}\frac{\partial^3 g_n(x)}{\partial X_1^3} - \frac{\partial^2 g_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \cdot D\hat{g}(x)^{-1} \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{g}(x)}{\partial X_1^2} \\ &= \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_n(x)}{\partial X_1^3} - \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \cdot D\hat{f}(x)^{-1} \cdot \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1^2} \ne 0.\end{aligned}$$

所以 $Dg(x)$ 满足标准形式 (2-9)，且 x 是 g 的三重孤立奇异根。

令 $R = \frac{d}{4\gamma_3{}^3}$，有

$$\begin{aligned} d_R(g,f) &= \max_{\|y-x\|\le R} \|g(y) - f(y)\| \\ &= \max_{\|y-x\|\le R} \|f(x) + H_1(y-x) + H_2(y-x)^2\| \\ &\le \|f(x)\| + \|H_1\|R + \|H_2\|R^2 \\ &= \|f(x)\| + \|H_1\|\frac{d}{4\gamma_3^3} + \|H_2\|\frac{d^2}{16\gamma_3^6}. \end{aligned}$$

若

$$\|f(x)\| + \|H_1\|\frac{d}{4\gamma_3^3} + \|H_2\|\frac{d^2}{16\gamma_3^6} < \frac{d^4}{128\gamma_3^9\|\mathcal{A}^{-1}\|},$$

则

$$d_R(g,f) < \frac{d^4}{128\gamma_3^9\|\mathcal{A}^{-1}\|} = \frac{dR^3}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|}.$$

由定理 3.3，f 在 $B(x,R)$ 上的零点的重数之和是三。 □

例 3.1 在例 2.1 中，我们通过对 f 和 X 做酉变换，得到新的多项式系统 g 在重零点处的 Jacobian 矩阵满足标准形式 (2-9)。接下来我们在标准形式的假设下计算多项式系统简单重根的隔离界。

假设给定多项式系统：

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{64}{73}X_1^2 - \dfrac{48}{73}X_1X_2 + \dfrac{9}{73}X_2^2 + \dfrac{\sqrt{73}}{12}X_2, \\ f_2 = (8X_1 - 3X_2)^2(3X_1 + 8X_2). \end{cases}$$

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $f = \{f_1, f_2\}$ 的简单三重根，$y = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{73}} \\ -\frac{3}{4\sqrt{73}} \end{pmatrix}$ 是 f 的另一个根，$\|y - x\| = 0.25$.

计算可得：

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{73}}{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

满足标准形式 (2-9)。

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial X_2} = \frac{\sqrt{73}}{12},$$

$$\Delta_3(f_2) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f_2(x)}{\partial X_1^3} - \frac{\partial^2 f_2(x)}{\partial X_1 \partial X_2} \cdot \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial X_2}\right)^{-1} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial X_1^2} = 192,$$

$$\hat{\gamma}_3(f,x) = \max\left(1, \left\|\left(\frac{\partial f_1}{\partial X_2}\right)^{-1} \cdot \frac{D^2 f_1(x)}{2}\right\|\right) = \frac{12}{\sqrt{73}},$$

$$\gamma_{3,2}(f,x) = \max_{2\le k\le 3}\left(1, \left\|\frac{1}{\Delta_3(f_2)} \cdot \frac{D^k f_2(x)}{k!}\right\|^{\frac{1}{k-1}}\right) = \frac{\sqrt{73}\cdot 146^{\frac{1}{4}}}{24},$$

$$\gamma_3(f,x) = \max(\hat{\gamma}_3(f,x), \gamma_{3,2}(f,x)) = \frac{12}{\sqrt{73}} \approx 1.4045.$$

由定理 3.1，我们可得局部隔离界

$$\|y-x\| \ge \frac{d}{2\gamma_3^3} \approx 0.01545.$$

给定初始点 $(-0.01, 0.01)$，用改进的牛顿迭代算法 [4, 算法 4.2] 迭代两次，可以得到一个近似根$x = (-4.1291\cdot 10^{-8}, -2.9505\cdot 10^{-8})$， 下面验证在 x 附近零点丛集的存在性。

令

$$H_1 = \begin{pmatrix} -5.3000\cdot 10^{-8} & 0 \\ 1.5679\cdot 10^{-12} & -5.4401\cdot 10^{-14} \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3.4641\cdot 10^{-5} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{0}_{n\times n\times(n-1)}\right),$$

则

$$\gamma_3(g,x) = \max(\hat{\gamma}_3(g,x), \gamma_{3,2}(g,x)) = \frac{12}{\sqrt{73}} \approx 1.4045,$$

$$\|f(x)\| + \|H_1\|\frac{d}{4\gamma_3^3} + \|H_2\|\frac{d^2}{16\gamma_3^6} \approx 1.937364\cdot 10^{-8} < \frac{d^4}{128\gamma_3^9\|\mathcal{A}^{-1}\|} \approx 1.937370\cdot 10^{-8}.$$

判别式成立，由定理 3.4，f 在以 x 为球心，半径为 $\frac{d}{4{\gamma_3}^3} \approx 0.0076$ 的球里有三个零点（计算重数）。

2 简单重根

下面我们将第 1 节的结论推广到任意重数的简单重根。

令 $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 为多项式系统，x 是 f 的重数为 μ 的简单根，其中 $Df(x)$ 满足标准形式：

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & D\hat{f}(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$D\hat{f}(x)$ 可逆，并且

$$\Delta_k(f_n) = 0, \text{ for } k = 2, \dots, \mu - 1, \ \ \Delta_\mu(f_n) \neq 0. \tag{3-12}$$

令 $y \in \mathbb{C}^n$，$y \neq x$。回顾以下表示：$\varphi = d_P(v, y - x)$，$v = (1, 0, \dots, 0)^T$ 和 $w = x - y = (\zeta, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$，$\eta = (\eta_2, \dots, \eta_n)^T$，那么有 $|\zeta| = \|w\| \sin\varphi$, $\|\eta\| = \|w\| \cos\varphi$。令

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} D\hat{f}(x) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta_\mu(f_n) \end{pmatrix},$$

$\gamma_\mu = \max(\hat{\gamma}_\mu, \ \gamma_{\mu,n})$，其中

$$\gamma_{\mu,n} = \gamma_{\mu,n}(f, x) = \max\left(1, \ \sup_{k \geq 2} \left\| \frac{1}{\Delta_\mu(f_n)} \cdot \frac{D^k f_n(x)}{k!} \right\|^{\frac{1}{k-1}} \right).$$

情形 1：对于 $\theta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$，假设 $\gamma_\mu \|w\| \leq \frac{1}{2}$。将 $\hat{f}(y)$ 在 x 点处做泰勒展开：

$$\hat{f}(y) = D\hat{f}(x)\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1^2} \zeta^2 + \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \zeta\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{f}(x)}{\partial \hat{X}^2} \eta^2 + \sum_{k \geq 3} \frac{D^k \hat{f}(x)(y - x)^k}{k!}.$$

由三角不等式，有

$$\begin{aligned} \|w\| \sin\varphi = \|\eta\| &\leq \left\| D\hat{f}(x)^{-1} \hat{f}(y) \right\| + \sum_{k \geq 2} \hat{\gamma}_\mu(f, x)^{k-1} \|w\|^k \\ &\leq \left\| D\hat{f}(x)^{-1} \hat{f}(y) \right\| + 2\hat{\gamma}_\mu(f, x) \|w\|^2. \end{aligned}$$

因此，我们有如下命题：

命题 3.1 对于 $\theta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$，假设 $\gamma_\mu \|w\| \leq \frac{1}{2}$，那么有

$$\left\| D\hat{f}(x)^{-1} \hat{f}(y) \right\| \geq 2\gamma_\mu \|w\| \left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu} - \|w\| \right),$$

以及

$$\|w\| \geq \frac{\sin\varphi}{2\hat{\gamma}_\mu} \geq \frac{\sin\theta}{2\hat{\gamma}_\mu} \geq \frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu}.$$

情形 2：对于 $0 \leq \varphi < \theta \leq \frac{\pi}{2}$，假设 $\gamma_\mu \|w\| \leq \frac{1}{2}$。将 f_n 在 y 点处做泰勒展开：

$$\begin{aligned} f_n(y) = &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1^2} \zeta^2 + \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1 \partial \hat{X}} \zeta\eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial \hat{X}^2} \eta^2 + \cdots + \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu f_n(x)}{\partial X_1^\mu} \zeta^\mu \\ &+ \frac{1}{(\mu - 1)!} \frac{\partial^\mu f_n(x)}{\partial X_1^{\mu-1} \partial \hat{X}} \zeta^{\mu-1} \eta + \cdots + \frac{1}{\mu!} \frac{\partial^\mu f_n(x)}{\partial \hat{X}^\mu} \eta^\mu + \sum_{k \geq \mu+1} \frac{D^k f_n(x)(y - x)^k}{k!}. \end{aligned}$$

在 f_n 的泰勒展开式中，项 $\zeta^i\eta^j$ 的系数 $\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}f_n(x)}{\partial X_1^i\partial\hat{X}^j}$ 满足

$$\left\|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}\cdot\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}f_n(x)}{\partial X_1^i\partial\hat{X}^j}\right\|\le\frac{(i+j)!}{i!j!}\gamma_\mu^{i+j-1}. \tag{3-13}$$

对于单项式 $\zeta^i\eta^j$, $i+j<\mu$, $j>0$，用下列式子替换 $\zeta^i\eta^j$ 中的第一个 η，

$$\begin{aligned}\eta=&-D\hat{f}(x)^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial X_1^2}\zeta^2+\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial X_1\partial\hat{X}}\zeta\eta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial\hat{X}^2}\eta^2+\cdots\right.\\&+\sum_{0\le k\le\mu+1-i-j}\frac{1}{(\mu+1-i-j-k)!k!}\frac{\partial^{\mu+1-i-j}\hat{f}(x)}{\partial X_1^{\mu+1-i-j-k}\partial\hat{X}^k}\zeta^{\mu+1-i-j-k}\eta^k\\&\left.+\sum_{k\ge\mu+2-i-j}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}-\hat{f}(y)\right),\end{aligned}$$

该式是由 $\hat{f}(y)$ 在 x 点处的泰勒展开式变形得到的。则有

$$\begin{aligned}\zeta^i\eta^j=&-D\hat{f}(x)^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial X_1^2}\zeta^{i+2}\eta^{j-1}+\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial X_1\partial\hat{X}}\zeta^{i+1}\eta^j+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\hat{f}(x)}{\partial\hat{X}^2}\zeta^i\eta^{j+1}+\cdots\right.\\&+\sum_{0\le k\le\mu+1-i-j}\frac{1}{(\mu+1-i-j-k)!k!}\frac{\partial^{\mu+1-i-j}\hat{f}(x)}{\partial X_1^{\mu+1-i-j-k}\partial\hat{X}^k}\zeta^{\mu+1-j-k}\eta^{k+j-1}\\&\left.+\sum_{k+i+j-1\ge\mu+1}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}\zeta^i\eta^{j-1}-\hat{f}(y)\zeta^i\eta^{j-1}\right),\end{aligned}$$

这个式子中每一项的次数都大于或等于 $i+j+1$。

进一步，替换后新得到的项 $\zeta^{i+k}\eta^{j-1+l}$，$i+k+j-1+l\le\mu$ 的系数被 $\Delta_\mu(f_n)$ 除后的范数大小可以用

$$\left(\frac{(i+j)!}{i!j!}\gamma_\mu^{i+j-1}\right)\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}\hat{f}(x)}{\partial X_1^k\partial\hat{X}^l}\right\|\le\frac{(i+j)!}{i!j!}\frac{(k+l)!}{k!l!}\gamma_\mu^{i+k+j+l-2} \tag{3-14}$$

来界定。

从 $i+j=2$, $j\ge1$ 开始，最多经过 $\mu-2$ 次迭代替换，我们可以将 f_n 写成如下形式：

$$\begin{aligned}f_n(y)=&C_2\zeta^2+\cdots+C_\mu\zeta^\mu+\sum_{i+j=\mu,j>0}C_{i,j}\zeta^i\eta^j+\sum_{k\ge\mu+1}\frac{D^kf_n(x)(y-x)^k}{k!}\\&+\sum_{1\le i+j-1\le\mu-2}T_{i,j-1}\cdot\left(\sum_{k+i+j-1\ge\mu+1}D\hat{f}(x)^{-1}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}\zeta^i\eta^{j-1}\right)\\&-\sum_{1\le i+j-1\le\mu-2}T_{i,j-1}D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\zeta^i\eta^{j-1},\end{aligned} \tag{3-15}$$

其中 $C_2,\ldots,C_\mu$ 是常量，系数 $C_{i,j}$ 和 $T_{i,j-1}$ 被 $\Delta_\mu(f_n)$ 除后的范数满足：

$$\left\|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}C_{i,j}\right\|\le c_{i,j}\gamma_\mu^{i+j-1},\ \left\|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}T_{i,j-1}\right\|\le t_{i,j-1}\gamma_\mu^{i+j-1}, \tag{3-16}$$

其中 $c_{i,j}$, $t_{i,j-1} \in \mathbb{R}$ 是常数。这个结论可以由 (3-13) 和 (3-14) 归纳得到。

命题 3.2 $C_t = \Delta_t(f_n), t = 2, \ldots, \mu.$

简单起见，我们用 j 代替 (3-15) 式的最后两项中的 $j-1$：

证明 将微分泛函 Δ_t 作用到 (3-15) 式的两边，得

$$\begin{aligned}\Delta_t(f_n) =& C_2\Delta_t(\zeta^2) + \cdots + C_\mu \Delta_t(\zeta^\mu) + \sum_{i+j=\mu, j>0} C_{i,j}\Delta_t(\zeta^i\eta^j) \\ &+ \sum_{1\le i+j\le \mu-2} T_{i,j}\cdot\left(\sum_{k\ge\mu+1-i-j} D\hat{f}(x)^{-1}\Delta_t\left(\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}\zeta^i\eta^j\right)\right) \\ &- \sum_{1\le i+j\le\mu-2} T_{i,j}D\hat{f}(x)^{-1}\Delta_t\left(\hat{f}(y)\zeta^i\eta^j\right) + \sum_{k\ge\mu+1}\Delta_t\left(\frac{D^k f_n(x)(y-x)^k}{k!}\right).\end{aligned}$$

根据 (2-2) 和 (2-4) 式，注意到 d_1^t 是 Δ_t 中唯一次数为 t 的微分单项式，而且 Δ_t 中不存在 d_1^s，$s<t$，我们可以归纳出当 $2\le t\le\mu$ 时，

(1) $\Delta_t(\zeta^s) = 1$，如果 $s=t$，否则为 0；

(2) $\Delta_t(\zeta^i\eta^j) = 0$，其中 $t\le i+j=\mu$，$j>0$；

(3) $\Delta_t\left(\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}\zeta^i\eta^j\right) = 0$，其中，$t\le\mu<i+j+k$；

(4) $\Delta_t\left(\hat{f}(y)\zeta^i\eta^j\right) = 0$，其中，$1\le i+j\le\mu-2$；

(5) $\Delta_t\left(\frac{D^k f_n(x)(y-x)^k}{k!}\right) = 0$，其中，$t\le\mu<k$。

因此可得，$C_t = \Delta_t(f_n)$，$t=2,\ldots,\mu$。 □

由命题 3.2 和 (3-12)，我们有

$$C_t = \Delta_t(f_n) = 0,\quad t = 2,\cdots,\mu-1,\quad C_\mu = \Delta_\mu(f_n) \neq 0. \tag{3-17}$$

由 (3-15) 式和 (3-17) 式，可得

$$\begin{aligned}\zeta^\mu =& -\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}\sum_{i+j=\mu,j>0} C_{i,j}\zeta^i\eta^j - \frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}\sum_{k\ge\mu+1}\frac{D^k f_n(x)(y-x)^k}{k!} \\ &- \frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}\sum_{1\le i+j\le\mu-2} T_{i,j}\cdot\left(\sum_{k\ge\mu+1-i-j} D\hat{f}(x)^{-1}\frac{D^k\hat{f}(x)(y-x)^k}{k!}\zeta^i\eta^j\right) \\ &+ \frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}\sum_{1\le i+j\le\mu-2} T_{i,j}D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\zeta^i\eta^j + \frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}f_n(y).\end{aligned}$$

根据三角不等式，有

$$|\zeta|^\mu \le \sum_{i+j=\mu,j>0}\left\|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}C_{i,j}\right\| |\zeta|^i\|\eta\|^j + \sum_{k\ge\mu+1}\left\|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}\frac{D^k f_n(x)}{k!}\right\| \|w\|^k$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}\left\|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}T_{i,j}\right\|\cdot\left(\sum_{k\ge\mu+1-i-j}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\frac{D^k\hat{f}(x)}{k!}\right\|\|w\|^k|\zeta|^i\|\eta\|^j\right)\\
&+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}\left\|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}T_{i,j}\right\|\cdot\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\||\zeta|^i\|\eta\|^j+\left|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}f_n(y)\right|\\
\le&\sum_{i+j=\mu,j>0}c_{i,j}\gamma_\mu^{i+j-1}|\zeta|^i\|\eta\|^j+\sum_{k\ge\mu+1}\gamma_{\mu,n}^{k-1}\|w\|^k\\
&+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}t_{i,j}\gamma_\mu^{i+j}\cdot2\hat{\gamma}_\mu^{\mu-i-j}\|w\|^{\mu-i-j+1}|\zeta|^i\|\eta\|^j\\
&+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}t_{i,j}\gamma_\mu^{i+j}\cdot\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\||\zeta|^i\|\eta\|^j+\left|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}f_n(y)\right|\\
\le&\sum_{i+j=\mu,j>0}c_{i,j}\gamma_\mu^{\mu-1}|\zeta|^i\|\eta\|^j+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}2t_{i,j}\gamma_\mu^{\mu}\|w\|^{\mu-i-j+1}|\zeta|^i\|\eta\|^j+2\gamma_\mu^{\mu}\|w\|^{\mu+1}\\
&+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}t_{i,j}\gamma_\mu^{i+j}\cdot\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\||\zeta|^i\|\eta\|^j+\left|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}f_n(y)\right|.
\end{aligned}
$$

再由 $|\zeta|=\|w\|\sin\varphi$, $\|\eta\|=\|w\|\cos\varphi$，可得

$$
\begin{aligned}
\|w\|^\mu\cos^\mu\varphi\le&\sum_{i+j=\mu,j>0}c_{i,j}\gamma_\mu^{\mu-1}\|w\|^\mu\cos^i\varphi\sin^j\varphi\\
&+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}2t_{i,j}\gamma_\mu^{\mu}\|w\|^{\mu+1}\cos^i\varphi\sin^j\varphi+2\gamma_\mu^{\mu}\|w\|^{\mu+1}\\
&+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}t_{i,j}\gamma_\mu^{i+j}\|w\|^{i+j}\cos^i\varphi\sin^j\varphi\cdot\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|+\left|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}f_n(y)\right|.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos^\mu\varphi-\sum_{i+j=\mu,j>0}c_{i,j}\gamma_\mu^{\mu-1}\cos^i\varphi\sin^j\varphi}{1+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}t_{i,j}\cos^i\varphi\sin^j\varphi}\cdot\|w\|^\mu-2\gamma_\mu^{\mu}\|w\|^{\mu+1}\\
\le&\frac{1}{1+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}t_{i,j}\cos^i\varphi\sin^j\varphi}\left|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}f_n(y)\right|\\
&+\frac{\sum_{1\le i+j\le\mu-2}t_{i,j}\gamma_\mu^{i+j}\|w\|^{i+j}\cos^i\varphi\sin^j\varphi}{1+\sum_{1\le i+j\le\mu-2}t_{i,j}\cos^i\varphi\sin^j\varphi}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|\\
\le&\left|\frac{1}{\Delta_\mu(f_n)}f_n(y)\right|+\frac{1}{2}\left\|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\right\|\\
\le&\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\|.
\end{aligned}
$$

我们得到下列不等式：

$$\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\| \geq h(\varphi)\cdot 2\gamma_\mu^\mu\|w\|^\mu - 2\gamma_\mu^\mu\|w\|^{\mu+1}. \tag{3-18}$$

其中，

$$h(\varphi) = \frac{\cos^\mu\varphi - \sum_{i+j=\mu,j>0} c_{i,j}\gamma_\mu^{\mu-1}\cos^i\varphi\sin^j\varphi}{\sum_{1\leq i\leq\mu-2} 2t_{i,0}\gamma_\mu^\mu + \sum_{1\leq i+j\leq\mu-2,j>0} 2t_{i,j}\gamma_\mu^\mu\cos^i\varphi\sin^j\varphi + 2\gamma_\mu^\mu}. \tag{3-19}$$

定义 3.1 定义 $d = \min(d_1, d_2, d_3)$，其中

$$d_1 = \sqrt{\frac{1}{c_{\mu-1,1}^2+1}},\ d_2 = \sqrt{\frac{1}{\mu-1}},$$

而 d_3 是多项式

$$\begin{aligned} p(d) =& (1-d^2)^{\frac{\mu}{2}} - \sum_{i+j=\mu,j>0} c_{i,j}d(1-d^2)^{\frac{i}{2}}d^{j-1} \\ & - d\left(\sum_{1\leq i\leq\mu-2} t_{i,0} + \sum_{1\leq i+j\leq\mu-2,j>0} t_{i,j}(1-d^2)^{\frac{i}{2}}d^j + 1\right) \end{aligned} \tag{3-20}$$

的最小的正实根。

在接下来的内容中，我们假设 d 有上述定义。

命题 3.3 我们有 $h(\theta) \geq \frac{\sin(\theta)}{2\gamma_\mu}$，其中，$\sin\theta = \frac{d}{\gamma_\mu^{\mu-1}}$。

为了证明这个命题，用 $\sin\theta = \frac{d}{\gamma_\mu^{\mu-1}}$，$\cos\theta = \left(1-\frac{d^2}{\gamma_\mu^{2(\mu-1)}}\right)^{1/2}$ 来替换 (3-19) 式中的 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$，则我们需要证明下列不等式：

$$\left(1-\frac{d^2}{\gamma_\mu^{2(\mu-1)}}\right)^{\frac{\mu}{2}} - c_{\mu-1,1}d\left(1-\frac{d^2}{\gamma_\mu^{2(\mu-1)}}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \tag{3-21}$$

$$-\sum_{i+j=\mu-1,j>0} c_{i,j+1}d\left(1-\frac{d^2}{\gamma_\mu^{2(\mu-1)}}\right)^{\frac{i}{2}}\frac{d^j}{\gamma_\mu^{j(\mu-1)}} \tag{3-22}$$

$$-d\left(\sum_{1\leq i\leq\mu-2} t_{i,0} + \sum_{1\leq i+j\leq\mu-2,j>0} t_{i,j}\left(1-\frac{d^2}{\gamma_\mu^{2(\mu-1)}}\right)^{\frac{i}{2}}\frac{d^j}{\gamma_\mu^{j(\mu-1)}} + 1\right) \geq 0. \tag{3-23}$$

- 当 $d \leq d_1 = \sqrt{\frac{1}{c_{\mu-1,1}^2+1}}$ 时，(3-21) 式的前两项的和关于 $\gamma_\mu \geq 1$ 是非负递增的，因为它等于

$$\left(1-\frac{d^2}{\gamma_\mu^{2(\mu-1)}}\right)^{\frac{\mu-1}{2}}\left(\sqrt{1-\frac{d^2}{\gamma_\mu^{2(\mu-1)}}} - c_{\mu-1,1}d\right).$$

- 单项式 $\cos^i\varphi\sin^j\varphi$, $j>0$ 关于 $\varphi\in\left[0,\ \arctan\sqrt{\frac{1}{i}}\right]$ 是单调递增的，因为此时有

$$(\cos^i\varphi\sin\varphi)' = \cos^{i-1}\varphi(\cos^2\varphi - i\sin^2\varphi) \geq 0.$$

  所以，当 $1\leq i+j\leq\mu-1$，$j>0$，$d\in\left[0,\ \sqrt{\frac{1}{\mu-1}}\right]$ 时，$\left(1-\frac{d^2}{\gamma_\mu^{2(\mu-1)}}\right)^{\frac{i}{2}}\frac{d^j}{\gamma_\mu^{j(\mu-1)}}$ 关于 γ_μ 单调递减。

因此，(3-21) 式的左边是关于 $\gamma_\mu\geq 1$ 递增的函数，我们只需证明不等式在 $\gamma_\mu=1$ 时成立，即

$$\begin{aligned} p(d) =&(1-d^2)^{\frac{\mu}{2}} - \sum_{i+j=\mu,j>0} c_{i,j}d(1-d^2)^{\frac{i}{2}}d^{j-1} \\ &-d\left(\sum_{1\leq i\leq\mu-2} t_{i,0} + \sum_{1\leq i+j\leq\mu-2,j>0} t_{i,j}(1-d^2)^{\frac{i}{2}}d^j + 1\right)\geq 0, \end{aligned}$$

这个结论是显然的，因为 $p(d)$ 关于 $0\leq d\leq d_3$ 单调递减，$p(0)>0$，而 d_3 是 $p(d)=0$ 的最小正实根。

命题 3.4 对于 $0\leq\varphi\leq\theta$，$h(\varphi)$ 关于 $0\leq\varphi\leq\theta$ 单调递减，且

$$h(\varphi)\geq h(\theta)\geq\frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu} \tag{3-24}$$

以及

$$\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\|\geq 2\gamma_\mu^\mu\|w\|^\mu\left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu}-\|w\|\right). \tag{3-25}$$

进一步，如果 y 是 f 的另一个根，那么

$$\|w\| = \|y-x\|\geq\frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu}.$$

证明 对于 $\varphi\in\left[0,\ \arctan\sqrt{\frac{1}{\mu-1}}\right]$，因为 $\cos^i\varphi\sin^j\varphi$, $i+j=\mu$, $j>0$ 单调递增，所以 $h(\varphi)$ 的分子部分非负递减，$h(\varphi)$ 的分母部分为正且递增。因此，$h(\varphi)$ 关于 $0\leq\varphi\leq\theta$ 非负递减。于是我们得到 (3-24) 式。进一步，由 (3-18) 式，可得

$$\|\mathcal{A}^{-1}f(y)\|\geq h(\varphi)\cdot 2\gamma_\mu^\mu\|w\|^\mu - 2\gamma_\mu^\mu\|w\|^{\mu+1}\geq 2\gamma_\mu^\mu\|w\|^\mu\left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu}-\|w\|\right).$$

□

定理 3.5 令 x 为 f 的重数为 μ 的简单重根，且 y 是 f 的另一个根，那么

$$\|y-x\|\geq\frac{d}{2\gamma_\mu^\mu}.$$

证明 由命题 3.1 和命题 3.4，可得

$$\|w\| = \|y - x\| \geq \frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu} = \frac{d}{2\gamma_\mu^\mu},$$

因为 $\sin\theta = \frac{d}{\gamma_\mu^{\mu-1}}$。 □

定理 3.6 令 x 为 f 的重数为 μ 的简单重根，且 $\|y - x\| \leq \frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}$，那么我们有

$$\|f(y)\| \geq \frac{d\|y - x\|^\mu}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|}.$$

证明 对于 $\theta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$，由命题 3.1，可以得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}^{-1} f(y)\| &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y) \\ \frac{\sqrt{2}}{\Delta_\mu(f_n)} f_n(y) \end{pmatrix} \right\| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|D\hat{f}(x)^{-1}\hat{f}(y)\| \\ &\geq \sqrt{2}\gamma_\mu\|w\| \left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu} - \|w\| \right).\end{aligned}$$

对于 $0 \leq \varphi \leq \theta$，由命题 3.4，有

$$\|\mathcal{A}^{-1} f(y)\| \geq 2\gamma_\mu^\mu \|w\|^\mu \left(\frac{\sin\theta}{2\gamma_\mu} - \|w\| \right).$$

当 $\|w\| = \|y - x\| \leq \frac{d}{4\gamma_\mu^\mu} = \frac{\sin\theta}{4\gamma_\mu}$ 时，我们有

$$\|\mathcal{A}^{-1} f(y)\| \geq 2\gamma_\mu^\mu \|w\|^\mu \frac{\sin\theta}{4\gamma_\mu} = \frac{d\|y - x\|^\mu}{2}.$$

□

定理 3.7 令 x 为 f 的重数为 μ 的简单重根，且

$$0 < R \leq \frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}.$$

如果

$$d_R(f, g) < \frac{dR^\mu}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|},$$

那么，g 在 $B_R(x)$ 上的零点的重数之和是 μ。

证明 由定理 3.6，对任意满足 $\|y - x\| = R < \frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}$ 的 y，有

$$\|f(y) - g(y)\| \leq d_R(f, g) < \frac{dR^\mu}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|} = \frac{d\|y - x\|^\mu}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|} \leq \|f(y)\|,$$

由 Rouché 定理，f 和 g 在 $B_R(x)$ 上有相同个数的根。再由定理 3.5，当 $R \leq \frac{d}{4\gamma_\mu^3}$ 时，f 在 $B_R(x)$ 上有唯一根 x。所以，g 在 $B_R(x)$ 上有 μ 个根。 □

给定多项式系统 $f:\mathbb{C}^n\rightarrow\mathbb{C}^n$, $x\in\mathbb{C}^n$，满足 $D\hat{f}(x)$ 可逆，$\Delta_\mu(f_n)\neq 0$。

定义张量

$$H_1=\begin{pmatrix} \frac{\partial\hat{f}(x)}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial X_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial\hat{X}} \end{pmatrix}$$

$$H_k=\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta_k(f_n) & 0 \end{pmatrix}\mathbf{0}_{\underbrace{n\times\cdots\times n}_{k}\times(n-1)}\right),\ 2\leq k\leq\mu-1,$$

和多项式

$$g(X)=f(X)-f(x)-\sum_{1\leq k\leq\mu-1}H_k(X-x)^k.$$

定理 3.8 令 $\gamma_\mu=\gamma_\mu(g,x)$，如果

$$\|f(x)\|+\sum_{1\leq k\leq\mu-1}\|H_k\|\left(\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}\right)^k<\frac{d^{\mu+1}}{2\left(4\gamma_\mu^\mu\right)^\mu\|\mathcal{A}^{-1}\|},\tag{3-26}$$

那么 f 在以 x 为圆心，半径为 $\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}$ 的球上有 μ 个零点 (计算重数)。

证明 首先我们有 $g(x)=0$，

$$Dg(x)=Df(x)-H_1=\begin{pmatrix} 0 & D\hat{f}(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

进一步，

$$\Delta_k(g_n)=\Delta_k(f_n)-\Delta_k(f_n)=0,\ 2\leq k\leq\mu-1,$$

$$\Delta_\mu(g_n)=\Delta_\mu(f_n)\neq 0.$$

因此，$Dg(x)$ 满足标准形式，而且 x 为 g 的重数为 μ 的简单重根。

令 $R=\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu(g,x)}$，我们有

$$\begin{aligned} d_R(g,f) &= \max_{\|y-x\|\leq R}\|g(y)-f(y)\| \\ &= \max_{\|y-x\|\leq R}\|f(x)+\sum_{1\leq k\leq\mu-1}H_k(X-x)^k\| \\ &\leq \|f(x)\|+\sum_{1\leq k\leq\mu-1}\|H_k\|R^k \\ &= \|f(x)\|+\sum_{1\leq k\leq\mu-1}\|H_k\|\left(\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}\right)^k. \end{aligned}$$

如果

$$\|f(x)\|+\sum_{1\le k\le\mu-1}\|H_k\|\left(\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}\right)^k<\frac{d^{\mu+1}}{2\,(4\gamma_\mu{}^\mu)^\mu\,\|\mathcal{A}^{-1}\|},$$

那么

$$d_R(g,f)<\frac{d^{\mu+1}}{2\,(4\gamma_\mu{}^\mu)^\mu\,\|\mathcal{A}^{-1}\|}=\frac{dR^\mu}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|}.$$

由定理 3.7，可以得出 f 在以 x 为圆心，半径为 $\frac{d}{4\gamma_\mu^\mu}$ 的球上有 μ 个零点 (计算重数)。 □

3 简单二重根

本节中，我们假设 x 是多项式系统 f 的简单二重根，$Df(x)$ 满足标准形式，而 y 是 f 的另一个根。我们将第 2 节中对简单重根的讨论应用到简单二重根，计算简单二重根的隔离界，并与 [3] 中的根的隔离界作比较。

已知 $\frac{\partial f_n(x)}{\partial X_1}=\cdots=\frac{\partial f_n(x)}{\partial X_n}=\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1^2}=0$，通过将 $f_n(y)$ 在 x 点处做泰勒展开，我们有：

$$f_n(y)=\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1\partial\hat{X}}\zeta\eta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial\hat{X}^2}\eta^2+\sum_{k\ge3}\frac{D^k f_n(x)(y-x)^k}{k!}.$$

非零项

$$C_{1,1}=\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial X_1\partial\hat{X}},\ C_{0,2}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial\hat{X}^2},\ c_{1,1}=2,\ c_{0,2}=1.$$

因此，$p(d)$ 的具体形式为：

$$p(d)=1-2d^2-2d\sqrt{1-d^2}-d. \tag{3-27}$$

$p(d)$ 的最小正实根是

$$d\approx0.2865.$$

令 y 是 f 的另一个根，由定理 3.5, 可得

$$\|y-x\|\ge\frac{d}{2\gamma_2^2}.$$

例 3.2 给定多项式系统：

$$\begin{cases}f_1=X_1^2-\frac{1}{4}X_1-\frac{1}{2}X_2,\\ f_2=\frac{1}{2}X_1X_2.\end{cases}$$

容易看出，$x=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ 是 $f=\{f_1,f_2\}$ 的简单二重根，且 $\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$ 是 f 的一个单根。

计算得

$$Df(x)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $g(X)=f(W\cdot X)$，其中 $W=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，那么

$$\begin{cases} g_1=\dfrac{4}{5}X_1^2-\dfrac{4}{5}X_1X_2+\dfrac{1}{5}X_2^2+\dfrac{\sqrt{5}}{4}X_2, \\ g_2=-\dfrac{1}{5}X_1^2-\dfrac{3}{10}X_1X_2+\dfrac{1}{5}X_2^2, \end{cases} \tag{3-28}$$

$x=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 g 的简单二重根，$y=\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{4\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ 是 g 的另一个根。

计算可得

$$Dg(x)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^2g(x)=\left(\begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\right).$$

因为

$$\frac{\partial g_1(x)}{\partial X_2}=\frac{\sqrt{5}}{4},\ \ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_2}{\partial X_1^2}=\Delta_2=-\frac{1}{5},$$

则我们有

$$\hat{\gamma}_2=\max\left(1,\left\|\left(\frac{\partial g_1(x)}{\partial X_2}\right)^{-1}\cdot\frac{D^2g_1(x)}{2}\right\|\right)=\frac{4}{\sqrt{5}},$$

$$\gamma_{2,2}=\max\left(1,\left\|\frac{1}{\Delta_2(g_2)}\cdot\frac{D^2g_2(x)}{2}\right\|\right)=1.$$

所以，

$$\gamma_2=\frac{4}{\sqrt{5}}\approx 1.7888.$$

根据定理 3.5，可得局部隔离界为

$$\|y-x\|\geq\frac{d}{2\gamma_2^2}\approx 0.0447.$$

现在我们用 [3] 中的方法再次估计局部隔离界。[3] 中定义的可逆线性算子为

$$A(f,x,v)=Df(x).+\frac{1}{2}D^2f(x)(v,\Pi_v.),$$

其中 $v=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$ 是张成空间 $\ker Df(x)$ 的单位向量，

$$D^2f(x)=\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\right).$$

令 $\omega=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$，记 $A=A(f,x,v)$，则我们有

$$\begin{aligned}A\omega=Df(x)\omega+\frac{1}{2}D^2f(x)(v,\Pi_v\omega)&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\\&+\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&0\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\omega_1-\frac{2}{5}\omega_2\\ -\frac{2}{5}\omega_1+\frac{1}{5}\omega_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}+\frac{8}{5\sqrt{5}}\right)\omega_1+\left(-\frac{1}{2}-\frac{4}{5\sqrt{5}}\right)\omega_2\\ -\frac{2}{5\sqrt{5}}\omega_1+\frac{1}{5\sqrt{5}}\omega_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

所以，

$$A^{-1}\frac{D^2f(x)}{2}=\left(\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}&-\frac{2(25+8\sqrt{5})}{10\sqrt{5}}\\-\frac{8}{5}&-\frac{-25+32\sqrt{5}}{20\sqrt{5}}\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}-\frac{2(25+8\sqrt{5})}{10\sqrt{5}}&0\\-\frac{-25+32\sqrt{5}}{20\sqrt{5}}&0\end{pmatrix}\right).$$

通过求解多项式和有理函数的全局最优问题，我们对张量 $A^{-1}\frac{D^2f(x)}{2}$ 的范数进行了估计，可以得到

$$\gamma_2(f,x)=\max\left(1,\left\|A^{-1}\cdot\frac{D^2f(x)}{2}\right\|\right)\geq 3.1121$$

因此，用 [3] 中的方法计算的局部隔离界满足：

$$\frac{d}{2\gamma_2(f,x)^2}\leq 0.01546,\ d\approx 0.2976$$

注释 3.1 尽管我们的 d 比 [3] 中获得的 d 小，但通过我们的方法计算出来的 γ_2 的值也更小。所以，正如例 3.2 中所展示的一样，我们可能会得到更好的局部隔离界。

第四章　结论与展望

本文主要研究多项式系统的简单重根的隔离界的计算，和零点丛集的估计问题。

在第二章中，我们介绍了多项式系统在孤立奇异根处的局部对偶空间，以及在宽度为 1 的情形下，孤立奇异根的重结构的计算。基于这种参数化的重结构，我们给出了简单重根的等价定义，并提出一种 Jacobian 矩阵的标准形式。在标准形式的条件下，我们进一步简化了简单重根需要满足的条件。而事实上，对于宽度为 1 的情形，我们总可以通过对多项式系统做酉变换，使得多项式系统在简单重根处的 Jacobian 矩阵满足标准形式，而且酉变换不改变算子范数定义下的隔离界。

在第三章中，我们首先针对简单三重根，给出了简单三重根和多项式系统的其他根的隔离界，并举例说明在实际计算中这种方法的可行性。然后我们将简单三重根的结论推广到了任意重数的简单重根。在标准形式的假设下，通过对多项式的泰勒展开式中的一些项做迭代替换，我们可以去掉低阶项，得到简单重根附近的多项式展开式的一般形式，并且对新的展开式中的系数做了估计，从而定量地给出任意重数的简单重根的隔离界下界的显示表达式。另外，第三章比较了我们得到的简单二重根的局部隔离界和 Shub 与 Smale 在他们的文章中给出的局部隔离界。因为我们对辅助变量 γ 的定义略有不同，所以对于一些例子，我们可以得到更大的局部隔离界，这说明我们的计算方法是有一定优势的。

最后，我们研究了多项式系统的零点丛集孤立半径的计算。对于一个多项式系统和它的一个近似根，构造一个以近似根为简单重根的新的多项式系统，由 Rouché 定理，我们给出一种可计算的判定准则，来判定在这个近似根附近是否存在原多项式系统的一个零点丛集，即判定多项式系统在近似根附近的一个小邻域上的根的个数，而零点丛集中零点的个数恰好是新的多项式系统的简单重根的重数。

今后的工作主要包含以下两个方面：

1. 解决张量范数的计算问题，从而实现我们对局部隔离界和零点丛集的计算。

2. 研究更多有关零点丛集和牛顿迭代的收敛问题。

参考文献

[1] Lenore Blum, Felipe Cucker, Michael Shub, and Steve Smale. *Complexity and Real Computation*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1998.

[2] B. Dayton and Z. Zeng. Computing the multiplicity structure in solving polynomial systems. In M. Kauers, editor, *Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 116–123, New York, NY, USA, 2005. ACM.

[3] Jean Pierre Dedieu and Mike Shub. On simple double zeros and badly conditioned zeros of analytic functions of n variables. *Mathematics of Computation*, 70(233):319–327, 2001.

[4] Zhiwei Hao, Wenrong Jiang, Nan Li, and Lihong Zhi. Computing simple multiple zeros of polynomial systems. 2017.

[5] Jonathan D. Hauenstein and Frank Sottile. Algorithm 921: AlphaCertified: Certifying solutions to polynomial systems. *ACM Trans. Math. Softw.*, 38(4):28:1–28:20, August 2012.

[6] Nan Li and Lihong Zhi. Compute the multiplicity structure of an isolated singular solution: case of breadth one. *Journal of Symbolic Computation*, 47:700–710, 2012.

[7] Nan Li and Lihong Zhi. Computing isolated singular solutions of polynomial systems: case of breadth one. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(1):354–372, 2012.

[8] Nan Li and Lihong Zhi. Verified error bounds for isolated singular solutions of polynomial systems: case of breadth one. *Theoretical Computer Science*, 479:163–173, 2013.

[9] Maria Grazia Marinari, Teo Mora, and Hans Michael Möller. GrÖbner duality and multiplicities in polynomial system solving. In *Proceedings of the 1995 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC ’95, pages 167–179, New York, NY, USA, 1995. ACM.

[10] B. Mourrain. Isolated points, duality and residues. *J. of Pure and Applied Algebra*, 117 & 118:469–493, 1996.

[11] Michael Shub and Steve Smale. Complexity of bezout’s theorem IV: Probability of success; extensions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(1):128–148, 1996.

[12] Mike Shub and Steve Smale. Computational complexity: On the geometry of polynomials and a theory of cost: I. *Annales Scientifiques De L École Normale Supérieure*, 18(1):107–142, 1985.

[13] Mike Shub and Steve Smale. Computational complexity: On the geometry of polynomials and a theory of cost: II. *SIAM Journal on Computing*, 15(1):145–161, 1986.

[14] Steve Smale. The fundamental theorem of algebra and complexity theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 4(1):1–36, 1981.

[15] Steve Smale. Newton's method estimates from data at one point. In *The Merging of Disciplines: New Directions in Pure, Applied and Computational Mathematics*, pages 185–196. Springer New York, 1986.

[16] H. Stetter. *Numerical Polynomial Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2004.

[17] Xinghua Wang and Danfu Han. On dominating sequence method in the point estimate and smale theorem. *Science in China Ser A*, 33(2):135–144, 1990.

致　谢

首先诚挚地感谢我的导师支丽红研究员的悉心指导，其言传身教将使我终生受益，激励我在未来的工作中贯彻严谨的科学精神，勇于开拓创新。

感谢天津大学的李楠师兄，数学机械化实验室的郝志伟师兄，在一同讨论课题的过程中，他们给予了我极大的帮助，鼓舞了我的信心，给单调的科研生活带来了很多乐趣。感谢李子明老师、杨志红师姐、侯美晨同学、杜昊同学以及实验室全体老师和同学们的热情帮助和支持，大家在一起的日子快乐而充实！

作者简介

姓名：姜文嵘　　性别：女　　出生日期：1991.12.26

2014.9 – 现在　　　　中国科学院数学与系统科学研究院攻读硕士研究生
2010.9 – 2014.7　　　　吉林大学数学学院本科生

【攻读硕士学位期间发表的论文】

[1] Hao Z, Jiang W, Li N, Zhi L. Computing Simple Multiple Zeros of Polynomial Systems[J]. arXiv preprint arXiv:1703.03981, 2017.

【学术经历】

[1] 2014 年国际符号数值计算研讨会（SNC2014），中国上海，2014 年 8 月

[2] 日本-亚洲青少年科技交流项目（樱华科技计划），日本新泻，2015 年 9 月-2015 年 10 月