

1. 简历

1) 个人简介

- 支丽红 1969 年生于江苏省太仓市。
- 现任职：中国科学院数学与系统科学研究院，研究员。
- 研究方向：基于符号-数值混合计算的误差可控算法研究。

2) 大学开始受教育经历

- 1987—1991 北京大学数学系，获学士学位。
- 1991—1996 中科院系统科学研究所，获博士学位，导师：吴文俊。

3) 研究工作经历

- 2009—至今 中科院数学与系统科学研究院 研究员
- 2003—2009 中科院数学与系统科学研究院 副研究员
- 1996—2003 中科院数学与系统科学研究院 助理研究员

4) 学术刊物编委

- 2007 年—至今 编委: Journal of Symbolic Computation(SCI), Elsevier
- 2007 年—至今编委: Mathematics in Computer Science, Springer
- 2009 年—2017 编委: ACM Communications in Computer Algebra, ACM
- 2014 年—至今 编委, 副主编: 系统科学与数学
- 2011, 2014 年 符号数值混合计算特辑编委: Theoretical Computer Science, Elsevier
- 2016 年—至今 编委: SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry, SIAM.
- 中国数学会理事会会员

5) 国际会议任职

- International Workshop on Symbolic-Numeric Computation (SNC):
Steering Committee Member: 2005—2014
General Chair: 2014
Program Committee Chair: 2005, 2011
Program Committee Member: 2009

- International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC):
Steering Committee Member: 2011—2014 (Chair)
Program Committee Member: 2006, 2008, 2010, 2013, 2016, 2019
General Chair: 2020
- Program Committee Member: International Conference on Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences, 2007, 2011, 2013
- Program Committee Member: Asian Symposium on Computer Mathematics, 2003, 2005, 2012
- Program Committee Member: The Third International Conference on Certified Programs and Proofs, 2013
- Organizing Committee Member: Applied Algebraic Geometry, 2014
- Organizing Committee Member: SIAM / MSRI Workshop on Hybrid Methodologies for Symbolic-Numeric Computation, 2010
- Organizing Committee Member: Fields Institute Workshop on Hybrid Methodologies for Symbolic-Numeric Computation, 2011
- Organizing Committee Member: NIMS Workshop on Optimization and Algebraic Geometry, 2014.

6) 研究项目

- 国家自然科学基金面上项目 (12071467): 非线性解析系统孤立奇异根的隔离和近似重根的精化, 2021-2024, 负责人, 正在进行。
- 国家重点研发计划“量子调控与量子信息”专项“量子程序设计理论、方法与工具”项目“量子程序测试、分析与验证”课题 (2018YFA0306702) 2018-2023, 负责人, 正在进行。
- 国家重点研发计划“高性能计“专项”E级计算机关键技术验证系统”项目“面向 E 量级系统的并行算法与应用支撑技术”课题 (2016YFB0200504) 2016-2018, 参加者, 已完成。
- 国家自然科学基金面上项目 (11571350): 凸代数几何中的若干问题研究,

2016-2019, 负责人, 已完成。

- 国家自然科学基金重大研究计划可信软件基础研究重点支持项目 (91118001): 基于符号-数值混合计算的误差可控算法及其应用, 2012-2015, 负责人, 已完成。
- 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2011CB302400): 数学机械化方法及其在数字化设计制造中的应用, 2011-2015, 子课题: 基于混合计算的误差可控算法, 负责人, 已完成。
- 国家自然科学基金中法合作交流项目(60911130369): 代数系统的准确、可信计算, 2010-2013, 负责人, 已完成。
- 中法联合实验室LIAMA可信计算项目: Exact/Certified Computation with Algebraic Systems, 2010-2014, 负责人, 正在进行。
- 国家自然科学基金群体项目(60821002/F02): 数学机械化方法及其在信息科学中的应用, 2009-2015, 主要成员, 正在进行。
- 国家自然科学基金面上项目(10871194): 符号和数值混合方法求解多项式方程组 2009-2011, 负责人, 已完成。
- 国家自然科学基金面上项目青年基金(10401035): 符号和数值混合计算, 2005-2007, 负责人, 已完成。
- 国家重点基础研究发展计划 973(2004CB318000): 数学机械化方法及其在信息科学中的应用, 2004-2009, 主要成员, 已完成。
- 国家重点基础研究发展计划 973(G1998030600): 数学机械化与自动推理平台, 1999-2003, 主要成员, 已完成。
- 国家自然科学基金中美合作交流项目(10581220470): NSF(USA)/NNSF(China): USA-China Research and Educational Partnership in Symbolic Computation, 2005, 已完成。

2. 主要学术成绩、创新点及其科学意义

符号和数值混合计算是国际上计算机代数领域的核心内容之一,也是近十几年来发展最为迅速的一个研究方向。它是符号计算和数值计算的一种综合。著名计算机科学家Donald E. Knuth的名著《The Art of Computer Programming》的第二卷Seminumerical Algorithms中提出的半数算法即是将数值计算和符

号计算相结合的混合算法。符号计算可以准确地得到问题的完备解，但是在解决实际问题时，因为时间和存储空间限制，很难真正发挥其强大的符号处理功能。另一方面，数值计算可以快速处理很多近似问题，但是一般不能得到全部解，不能确保计算结果的精确度。混合计算取两者之长，补两者之短，因而在计算机视觉、图像处理、机器人、数控等领域有着广泛的应用，可以满足航空航天、金融、石油勘探等领域对计算结果的高精度的需求。本人是国际上最早从事符号和数值混合计算的学者之一，在基本代数计算的混合算法、求解数值多项式方程组的混合算法、有理函数全局最优解的可信验证方面取得了一系列成果，设计和实现了若干误差可控的符号数值混合算法。这些新的混合算法将符号计算的准确性和完备性与数值计算的高效性相结合，解决了一些单独用符号计算或数值计算无法解决的问题。

2.1. 数值和符号混合方法求解数值非线性方程组

非线性方程求解是符号计算的主要研究内容之一。求解方法包括：Groebner基方法、Ritt-吴特征列方法、结式方法、柱形分解法等。Maple、Mathematica等符号计算软件包含了这些算法，它们在科学研究与高新技术研究中有广泛应用。求解方程的符号计算方法虽然完整，但具有NP难的复杂度，对于大型问题不能在较短的时间内给出解答。符号-数值混合计算求解非线性方程组的核心思想是用数值计算提高计算速度，用符号计算保证解在一定程度上的完整性，从而得到高速且误差可控的方程求解算法。

a) 基于几何对合形式的符号和数值方法求解零维多项式系统

我与西安大略大学教授Greg Reid合作，将偏微分方程系统对合的理论和方法推广到了复数域上求解一般的近似多项式系统，并且给出了零维的多项式系统对合的判定准则（即线性化过程终止的判定准则）。对于一些奇异的近似多项式问题，如超定方程求解，带重根的多项式方程求解等，通过符号延拓（线性化过程）和数值消元相结合，构造了商空间的一组正交多项式基，用特征值方法可以数值稳定地求解方程的所有孤立解。相关文章发表于符号计算方面最权威的杂志 *Journal of Symbolic Computation*, 2009, 得到48次引用(google scholar)。特别地，该文得到了多项式全局优化领域国际专家的高度评价。在J.

Lasserre (法国国家科学研究中心), M. Laurent (荷兰国家数学和计算机科学实验室), P. Rostalski (瑞士联邦科技研究所) 的论文中, 称我们的算法为“*Zhi-Reid*算法”。并将他们基于Moment矩阵和半正定规划的求解方法和Zhi-Reid算法的联系作了详细的分析, 得出结论, 如果我们的对合条件满足, 那么在有限步内, 他们基于Moment矩阵的判定准则也将满足。因此, 将Moment矩阵方法和延拓和投影相结合, 可以得到更高效的多项式方程组的所有实解。为解决实际应用问题提供了非常可靠和有效的方法。

b) 多项式方程组孤立重根的计算、精化和验证

奇异多项式系统孤立重根的计算是数值计算和符号计算两个领域专家共同关注的困难问题。德国洪堡大学数学研究所主任Andreas Griewank 在1985年的SIAM Review的文章中阐述了重根计算的难点, 并回顾了数值计算领域中针对重根计算改进的牛顿迭代方法。这些改进的牛顿迭代方法只适用于简单的重根的计算, 即在奇异根处, 只有一阶微分泛函条件成立, 且一般只有超线性收敛性。

与学生吴晓丽合作, 对于(近似)多项式系统孤立重根的计算, 首次提出了应用符号延拓和数值消元方法求解对合形式, 计算重零点所对应的准素分支和对偶空间的一组基。不仅可以得到奇异零点的重数, 还可以得到重根所满足的微分条件。对于近似重根, 通过计算近似根所满足的微分条件的个数和阶数, 将牛顿迭代推广到相应的局部商环上来提高重根的精度。在理论上首次证明了广义牛顿算法的二次收敛性。文章发表于Journal of Symbolic Computation, 2012。审稿专家指出: “This is an *interesting* paper which brings together several different ways of computing the multiplicity of an isolated zero and refining the calculation. The methods are *new*, and the experiments are *interesting*”。

与学生李楠提出了一种快速计算非线性系统(多项式或解析系统)在孤立重根处的局部对偶空间基底的新算法。新算法适用于最普遍的宽度为1的重根, 即系统在重根处的Jacobian矩阵的列亏为1的情形。新算法的自由度只是变量的个数减1, 且矩阵大小与重根的重数无关, 所以在存储空间和计算速度上都大大优于之前的算法。文章发表于Journal of Symbolic Computation, 2012。审稿意

见指出：“The algorithm is simple and likely *the most efficient* algorithm possible for the required output, both in time and memory use.” 特别地，新算法与规则化的牛顿迭代相结合，对于宽度为 1 的近似重根，构造出了基于近似重根局部结构的近似根的精化算法，并且证明了新的近似重根的精化算法的二次收敛性。新算法中矩阵规模与系统在重根处的 Jacobian 矩阵一致，是 Newton 法在近似重根处的推广。文章发表于 *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 2012. 与李楠、郝志伟、姜文嵘在多项式系统奇异根的隔离、近似奇异根的精化和验证方面取得了重要的进展。对于简单重根，我们首次给出了局部隔离界的显式表达和零点丛集存在性的可信验证。利用区间验证方法和宽度为 1 的特殊情形下重结构的参数化表示，我们提出了一种计算近似奇异根可信误差界的新算法，其可以验证一个带有微小扰动的多项式系统，在误差界内有一个宽度为 1 的孤立奇异根。对于一般的孤立奇异根，我们提出一种带光滑参数 deflation 技术，并且基于这种技术，我们将验证宽度为 1 的孤立奇异根的算法推广到了一般情形。相关工作发表于 *SIAM Journal of Numerical Analysis*, *Mathematics of Computation*, 并被邀请在美国布朗大学 ICERM 研究中心和第 19 届国际科学计算中的计算机代数会议做大会特邀报告。目前正在与佐治亚理工大学的 Kisun Lee 等合作，将相关结果推广到更一般的奇异根情形。

c) 实根理想的计算

实根理想的计算是实代数几何中的一个基本问题，它在多项式全局最优化领域中有重要应用。与王础，马玥一起提出了一种基于矩量矩阵半正定松弛方法的符号—数值混合算法求理想的实根理想。通过将几何对合理论与半正定矩量矩阵的性质相结合，我们提出了正维情形下半正定松弛方法终止的判定准则。证明了在 Delta-正则坐标系下，判定定理中的条件一定在有限步的半正定松弛内满足，并给出了在实根理想和根理想之间的一个理想的 Groebner 基。我们将算法推广到求半代数簇的实根理想的 Groebner 基（对合基）。文章发表于 *Journal of Symbolic Computation*, 2016. 与 Mohab Safey El Din, 杨志红合作，在复代数簇光滑情形，首次证明了实根理想有一组次数不超过其复代数簇次数的生成元。给出第一个单指数的计算实根理想的概率算法。对于一般的情形，我们采用

有理参数化来表示复代数簇和根理想。给出第一个关于理想的维数是双指数，关于变元的个数是单指数的概率算法计算其实根理想的所有素理想的有理参数化表示。我们的算法可以计算更复杂的理想的实根理想。文章发表于 ISSAC 2018, Journal of Symbolic Computation, 2021.

d) 交互式验证多项式系统根的存在性

与 Jean-Guillaume Dumas, Erich L. Kaltofen, Gilles Villard 合作给出了交互式概率算法验证大规模矩阵的行列式, 算法算术复杂度是 $(\log(N))^{O(1)}$, 这里 N 是矩阵的大小。应用该算法, 我们首次给出了多项式时间的概率算法验证齐次多元多项式系统根的存在性, 计算复杂度是 $(k \log(d))^{O(1)}$, k 是多项式的变量数, d 是多项式的次数。文章发表于 ISSAC 2017.

2.2. 有理函数全局最优值的计算和可信验证

有理函数的全局最优值的计算是NP难问题。与此相关的希尔伯特第十七问题: 任意实系数的非负多元多项式是否能写出有理函数的平方和。Artin在1927年证明了希尔伯特的猜想在实数域上成立。但是Artin的方法是非构造性的。2000年, 法国国家科学研究中心Jean Bernard Lasserre和美国MIT教授Pablo Parrilo各自独立提出了基于多项式时间复杂度的半正定规划算法与多项式平方和来计算多项式的近似全局最优解。

a) 非负有理函数的有理系数平方和表示

与北卡州立大学教授Erich Kaltofen及学生李斌、杨争峰一起, 从有数值误差的半正定规划输出的近似多项式平方和出发, 通过牛顿迭代, 提高精度, 再应用有理数向量重构和投影等运算, 给出有理系数多项式的平方和, 从而给出准确的无数值误差的全局最优解的可信验证。新的方法将德国汉堡大学著名区间计算专家Siegfried Rump在他的个人网页首页上公布的全局最优的挑战性问题: 因子系数界的计算从7提升到18。Siegfried Rump在他的文章中指出我们针对他的Model问题给出的可信下界是目前**最好的**。显示了符号和数值混合计算在可信计

算方面的潜力可能远远超越传统的符号计算或区间计算。文章发表于**Journal of Symbolic Computation, 2011**，得到**37**次引用。与郭峰和Erich Kaltofen 教授合作，研究了Hilbert-Artin 有理表示问题的不可行验证，文章发表于符号和代数计算方面最权威的国际会议**2012年ACM国际符号和代数计算会议 (ISSAC)**

b) 多项式全局最优问题和模理想的多项式平方和

与巴黎六大教授Mohab Safey El Din及学生郭峰一起结合广义临界值和多项式平方和理论，给出一种求解多项式全局最优值的方法，且该方法不要求多项式必须达到最优值，与同类方法比较，该方法计算更为简单，且不需要较强的假设条件。文章发表于**2010年ACM国际符号和代数计算会议**，得到**19**次引用。ISSAC 审稿专家指出：“This paper seems to be *the first ever that proposes a practically* viable method to compute global infima of polynomials in several variables that do not attain their minimum. It is based on *deep theoretical results* from real algebraic geometry. This indicates how *important* this article is.” 我们还将该方法推广到计算多元多项式在多项式等式和不等式定义的限制条件下的最优值。并且证明了在一般坐标系下，多项式在可行域上非负当前仅当在构造的每一个截断代数簇上，可以写成多项式平方和。从而给出了基于半定规划的多项式最优的代数验证，文章发表于**Journal of Symbolic Computation, 2012**。

c) 凸集上的有理点计算

与Mohab Safey El Din一起给出了基于量词消去法的单指数复杂度新算法来计算任意凸集中的有理点。并将新算法应用于判定一个非负整系数多项式是否存在有理系数的多项式的平方和表示。论文发表于**SIAM Journal on Optimization, 2010**，得到**16**次引用。与学生郭庆东、Mohab Safey El Din一起给出了有理系数线性矩阵不等式是否存在有理解的验证准则和高效算法。新算法使得判定一个有理系数多项式是否存在有理多项式平方和表出的算法复杂度较Mohab Safey El Din与本人在2010年SIAMOPT上给出的算法复杂度有了非常显著改进。并且给出了美国加州大学伯克利分校Bernard Sturmfels 问题反例的第一个计算机验

证。论文得到了ACM国际符号和代数计算会议评审专家的高度评价：“This paper is *excellent*. It contains very *original ideas* how one can decide *efficiently* if a linear matrix inequality with rational coefficients has a rational solution.”获得了2013年度美国计算机协会 (ACM) 国际符号和代数计算会议 (ISSAC) 最佳学生论文奖 (郭庆东)

d) 基于 Gram 矩阵和矩量矩阵的多项式优化和实根求解及验证

与学生马玥一起研究了与多项式平方和密切相关的Gram矩阵恢复问题。提出了新的求解Gram矩阵核范数极小化问题的一阶算法：加速的不动点迭代算法，并给出了算法的收敛性分析。数值实验显示新的算法对于低秩Gram矩阵的近似或精确恢复问题较以往主流算法提速明显，且实现方便，占用内存少，更适合大规模矩阵的处理。文章发表于2011年ACM国际符号和代数计算会议。审稿专家指出：

“This is *significant progress* with an *innovative idea* on a currently widely investigated problem.” 2012年，继续研究了如何将多项式系统实根求解的问题转化为矩量矩阵核范数极小化问题，并利用半正定低秩矩阵恢复加速的不动点迭代算法求解。同时，给出了算法完整的收敛性分析和在Matlab中的实现 (MMCRSolver)。对于较大规模的多项式系统，如果只存在一个或少数几个实根，MMCRSolver 能够快速的将它们求解出来。与此同时，如果多项式系统有无穷多个实根，MMCRSolver仍能求出其中部分孤立实点或是在代数流形上的实点。文章发表于2012年ACM国际符号和代数计算会议。ISSAC审稿专家指出：“The paper gives a *useful, interesting new* method.” 2013年，与杨争峰和诸一骏合作研究了利用矩量矩阵核范数极小化算法，计算和验证多项式系统至少存在一个实根。新的算法可以处理超定和欠定的多项式系统。并且对于奇异的多项式系统，与奇异根的可信验证算法相结合，可以验证邻近系统存在一个奇异实解。论文发表于2013年ACM国际符号和代数计算会议。

e) 非紧致的基本半代数集凸包的半定表示

与王础、郭峰一起研究了非紧致的基本半代数集凸包的半定表示。我们利用齐次化技巧，考虑半代数集在高维空间中生成的锥与此空间中单位球的交集。通过分析生成凸锥的特性，考虑其与单位球相交构成的紧致集合，利用正零点定理

得到凸锥的半定表示,进而利用非齐次化技巧将生成的谱多面体投影还原到原半代数集所在空间,从而得到其半定表示。我们首次给出非紧致的基本半代数集凸包的半定表示存在的充分和必要条件。 文章发表于: *SIAM Journal of Optimization*, 2015。

2.3 基于结构矩阵的基本代数运算混合算法及其应用

符号和数值计算领域的很多问题可以转化为结构矩阵的计算问题:多元多项式的近似因式分解问题与Ruppert矩阵的奇异值分解密切相关;多元多项式的近似最大公因子的计算可以转化为计算最近奇异的广义Sylvester 矩阵的零空间;近似多项式方程组的求解与广义Macaulay矩阵的零空间相对应。这些矩阵都是大型的稀疏线性结构矩阵。通过深入地研究稀疏结构矩阵的数值计算与多项式计算之间的密切关系,本人与合作者提出了基于结构最小二乘法,快速正交分解,奇异值分解等数值算法的符号和数值混合算法,并以此为基础给出了更快更精确地计算近似多项式GCD、近似多项式因式分解、最近奇异多项式等的混合算法。相关文章合计得到近600次引用。近几年,本人继续在该领域取得一些新的进展。

a) 基于结构矩阵的快速近似 GCD 算法及其应用

通过研究Sylvester矩阵的位移结构,利用快速结构矩阵的QR分解,将单变元最大公因子计算的算法的复杂度降低了一个数量级,相关的QRGCD算法已被收入著名商业数学软件MAPLE的SNAP软件包中,可以快速计算次数高达2000次多项式的近似最大公因子。以QRGCD算法为基础,将Sylvester矩阵推广到对应于多元多项式的广义Sylvester矩阵,设计了基于二元多项式近似最大公因子的快速图像盲复原算法,将S. Unnikrishna Pillai等人的已有同类算法的时间复杂度从 $O(n^4)$ 减少为 $O(n^2 \cdot \log(n))$,并且能在几秒内将模糊的像素为1024x1024的图像清晰地恢复出来。相关文章发表于ACM国际符号和代数计算会议,2010。审稿专家指出:“*Excellent and very interesting paper, you have made some significant progress.*”

b) 最近奇异多项式的计算和奇异多项式系统存在性的验证

将著名学者 Narendra Karmarkar等人提出的计算多项式近似GCD的方法推广到最近奇异多项式的计算。通过分析推广的Vandermonde矩阵的结构,给出了具有任意给定重根结构的最近奇异多项式的最简洁的表达式。并且该表达式可以递归高效地计算。相关文章发表于理论计算机权威杂志 *Theoretic Computer Science*, 2013。审稿专家指出:“Recursive formulas involving generalized Vandermonde matrices are *important and useful*.”

与学生李楠,将单变元最近奇异多项式的计算推广到奇异的多元多项式系统的判定。通过研究多项式系统的Jacobian矩阵的奇异性,首次提出了基于区间计算的奇异多项式系统存在性的计算和验证。新算法可以快速判定在给定非线性系统的小邻域内是否存在奇异的多项式系统,并且可以给出奇异根的存在范围。文章发表于 *Theoretic Computer Science*, 2013。

c) 稀疏多项式插值问题

与Erich Kaltofen和郝志伟合作,解决了Erich Kaltofen 和Wenshin Lee在2001年提出的关于多元多项式稀疏插值提前终止的公开问题。给出了过采样何时能够保证稀疏插值的数值稳定性的精确刻画。我们还给出了如何通过随机旋转,增加插值项之间的距离等技巧减少采样点的个数。我们的文章发表在 *Proc. 2016 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, 2016.

2.4 无穷维量子 Strassen 定理

对于两个集合(有限或者可数无限),给定的支撑集和边缘分布,Strassen 在1965年给出了在这两个集合的笛卡尔积上存在对应联合概率分布的充分必要条件。有限维量子Strassen定理已经由周立,应圣钢,俞能昆和应明生提出并给出了证明。我们的主要贡献是将量子Strassen定理推广到无限维情形:对于两个可分希尔伯特空间(至少一个是无限维),给定支撑集和部分迹,给出了在这两个希尔伯特空间的张量积空间中存在对应密度算子的充分必要条件,并且将充要条件的验证转换为求解一系列的半正定优化问题,通过验证这些半正定优化问题的最优解的极限是否为1,可以判断是否存在量子提升。可以推广到量子程序的验证。文章发表于 *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and*

Related Topics, 2020.

支丽红在符号和数值混合计算领域的开拓性工作得到了国际和国内专家的高度重视和认可，多次被国际会议邀请为Plenary Speaker:

- 2007 年: International Workshop on Symbolic-numeric Computation, Canada.
- 2009 年: International conference on Mathematics Mechanization, Beijing, China.
- 2009 年: Dagstuhl Seminar Computer-assisted proofs -tools, methods and applications, Germany.
- 2009 年: Asian Symposium on Computer Mathematics, Japan.
- 2010 年: 14th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Verified Numerical Computation, France.
- 2011 年: SIAM meeting on Applications of Algebraic Geometry, USA.
- 2012 年: RIMS Symposium on Computer Algebra, Japan.
- 2014 年: 13th 中国工业与应用数学年会议。
- 2014 年: Invited Tutorial at International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Japan.
- 2014 年: NIMS Thematic Program on Applied Algebraic Geometry, Korea.
- 2015 年: International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, UK.
- 2017 年: 19th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing, China, 2017.
- 2017 年: Computational Algebraic Geometry, FoCM'17, Spain, 2017.
- 2018 年: Core Computational Methods, ICERM, USA, 2018.

Papers in Journals and Books

- **Shmuel Friedland, Jingtong Ge, Lihong Zhi**
Quantum Strassen Theorem
Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related, 2020.
- **Zhiwei Hao and Wenrong Jiang and Nan Li and Lihong Zhi**
On Isolation of Simple Multiple Zeros and Clusters of Zeros of Polynomial Systems
Mathematics of Computation, **89(322)**:879-909, **2020**.
- **Mohab Safey El Din, Zhihong Yang, Lihong Zhi**
Computing Real Radicals and S-radicals of Polynomial Systems
Journal of Symbolic Computation, 2021.
- **Chu Wang, Zhi-Hong Yang, Lihong Zhi**: *Global optimization of polynomials over real algebraic sets*, Journal of Systems Science and Complexity, **32**, pp158-184, **2019**.
- **Mohab Safey El Din, Zhi-Hong Yang, and Lihong Zhi**, *On the complexity of computing real radicals of polynomial*, Proc. 2018 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC), pp.351-358, **2018**.
- **Lihong Zhi**, *Computing Multiple Zeros of Polynomial Systems: Case of Breadth One*, Proc. International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing. Springer, Cham, pp.392-405, **2017**,
- **Jean-Guillaume Dumas, Erich L. Kaltofen, Gilles Villard, and Lihong Zhi**,
Polynomial time interactive proofs for linear algebra with exponential matrix dimensions and scalars given by polynomial time circuits, Proc.ISSAC'17, pp.125-132, **2017**.
- **Zhiwei Hao, Erich Kaltofen and Lihong Zhi**, *Numerical Sparsity Determination and Early Termination*, Proc. ISSAC'16, pp. 247-254, **2016**.
- **Yue Ma and Chu Wang and Lihong Zhi**
A Certificate for Semidefinite Relaxations in Computing Positive-Dimensional Real Radical Ideals
Journal of Symbolic Computation, **72(1)**: 1-20, **2016**..
- **Feng Guo and Chu Wang and Lihong Zhi**
Semidefinite Representations of Non-compact Convex Sets
SIAM Journal on Optimization, **25(1)**: 377-395, **2015**.
- **Nan Li and Lihong Zhi**
Verified Error Bounds for Isolated Singular Solutions of Polynomial Systems
SIAM Journal of Numerical Analysis, **52(4)**: 1623-1640, **2014**
- **Nan Li and Lihong Zhi**
Verified Error Bounds for Isolated Singular Solutions of Polynomial Systems: Case of Breadth One
Theoretical Computer Science, **479**, pp. 150-162, 2013.
- **Zijia Li and Lihong Zhi**
Computing the Nearest Singular Univariate Polynomials with Given Root Multiplicities
Theoretical Computer Science, **479**, pp. 163-173, 2013.

- **Aurelien Greuet, Feng Guo, Mohab Safey El Din and Lihong Zhi**
Global optimization of polynomials restricted to a smooth variety using sums of squares
 Journal of Symbolic Computation, **47**: 503-518, 2012
- **Nan Li and Lihong Zhi**
Computing Isolated Singular Solutions of Polynomial Systems: Case of Breadth One
 SIAM Journal of Numerical Analysis, **50(1)**: 354-372, 2012.
- **Xiaoli Wu and Lihong Zhi**
Approximate Determining singular solutions of polynomial systems via symbolic-numeric reduction to geometric involutive,
 Journal of Symbolic Computation, **47(3)**, pp. 227-238, 2012.
- **Erich Kaltofen, Bin Li, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
Exact certification in global polynomial optimization via sums-of-squares of rational functions with rational coefficients,
 Journal of Symbolic Computation, **47(1)**, pp. 1-15, 2012.
- **Nan Li and Lihong Zhi**
Computing the multiplicity structure of an isolated singular solution: case of breadth one,
 Journal of Symbolic Computation, **47(6)**, pp. 700-710, 2012.
- **Mohab Safey El Din and Lihong Zhi**
Computing rational points in convex semi-algebraic sets and SOS decompositions, SIAM Journal on Optimization, 20(6):2876-2889, 2010.
- **Greg Reid and Lihong Zhi**
Solving Polynomials Systems via Symbolic-numeric Elimination Method.
 Journal of Symbolic Computation, **44**, pp. 280-291, 2009(SCI).
- **Bin Li, Jiawang Nie, and Lihong Zhi**
Approximate GCDs of Polynomials and Sparse SOS Relaxations.
 Theoretical Computer Science, **409(2)** pp. 200-210, 2008.
- **Lihong Zhi**
Symbolic and Numeric Computation (In Chinese)
 System Science and Mathematics (Chinese version), **28(8)**, pp. 1040-1052, 2008.
- **Erich Kaltofen, John P. May, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
Approximate Factorization of Multivariate Polynomials using Singular Value Decomposition. Journal of Symbolic Computation, **43(5)** pp.359-376, 2008.
- **Bingyu Li, Zhuojun Liu, and Lihong Zhi**
A Structured Rank-revealing Method for Sylvester Matrix
 Journal of Computational and Applied Mathematics, **213** pp.212-223, 2008
- **Bingyu Li, Zhuojun Liu, and Lihong Zhi**
A Fast Algorithm for Solving the Sylvester Structured Total Least Squares Problem
 Signal Processing, **87** pp. 2313-2319, 2007.
- **Dongxia Sun and Lihong Zhi**
Structured Low Rank Approximation of a Bezout Matrix
 Mathematics in Computer Science, **2** pp. 427-437, 2007.

- **Bingyu Li, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
Fast Low Rank Approximation of a Sylvester Matrix by Structure Total Least Norm
Journal of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation, **11(3,4)** pp.165-174, 2005.
- **Robert M. Corless, Stephen M. Watt, and Lihong Zhi**
QR Factoring to Compute the GCD of Univariate Approximate Polynomials
IEEE Transactions on Signal Processing, **52(12)** pp.3394-3402, 2004.
- **Lihong Zhi, Matu-Tarow Noda, Hiroshi Kai, and Wenda Wu**
Hybrid Method for Computing the Nearest Singular Polynomials
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **21(2)** pp.149-162, 2004.
- **Lihong Zhi**
Symbolic and Numeric Hybrid Computation (In Chinese)
Lectures on Computer Algebra, Tsinghua Press, pp. 235-272, 2003.
- **Lihong Zhi**
Algebraic Factorization and GCD Computation
Mathematics Mechanization and Applications, Academic Press, pp 325-342, 2000.
- **K. Shiraishi H., Lihong Zhi, and Matu-Tarow Noda**
Implement of Wu's Method in Risa/Asir
Journal of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation, **7(3)**
pp.41-42(abstract), 1999.
- **H. Minaguchi, Lihong Zhi, Hiroshi Kai and Matu-Tarow Noda**
Apply General Inverse of Matrix to Compute Nearest Singular Polynomials
Journal of Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation, **7(3)**
pp.29-30(abstract), 1999.
- **Lihong Zhi and Zhuojun Liu**
The P-irreducibility of Binding Polynomials
An International Journal of Computers & Mathematics with Applications, **38(2)** pp.1-10, 1999.
- **Lihong Zhi and Wenda Wu**
Nearest Singular Polynomials
Journal of Symbolic Computation, **26(6)** pp.667-676, 1998.
- **Lihong Zhi**
An Optimal Method for Algebraic Factoring
Journal of Computer Science and Technology, **12** pp. 1-9, 1997.

Papers in Refereed Conference Proceedings

- **Mohab Safey El Din, Zhi-Hong Yang, and Lihong Zhi**
On the complexity of computing real radicals of polynomial
In ISSAC'2018 Proc. 2018 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput.
- **Lihong Zhi**
Computing Multiple Zeros of Polynomial Systems: Case of Breadth One
In CASC'2017 . International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing.

- **Dumas, Erich L. Kaltofen, Gilles Villard and Lihong Zhi**
Polynomial Time Interactive Proofs for Linear Algebra with Exponential Matrix Dimensions and Scalars Given by Polynomial Time Circuits
In ISSAC'2017 Proc. 2017 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput.
- **Zhiwei Hao, Erich Kaltofen and Lihong Zhi,** *Numerical Sparsity Determination and Early Termination.*, Proc. 2016 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC), pp. 47-254, 2016.
- **Feng Guo, Mohab Safey El Din, Chu Wang and Lihong Zhi,** *Optimizing a parametric linear function over a non-compact real algebraic variety Algebraic*, Proc. 2015 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC), pp.205-212, 2015.
- **Feng Guo, Chu Wang and Lihong Zhi**
Optimizing a linear function over a noncompact real algebraic variety Algebraic, 2014 International Symposium on Symbolic and Numeric Computation, 2014
- **Qingdong Guo, Mohab Safey El Din and Lihong Zhi**
Computing rational solutions of linear matrix inequalities, ISSAC'13 Proc. 2013 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp 197-204, 2013
- **Zhengfeng Yang, Lihong Zhi and Yijun Zhu**
Verified error bounds for real solutions of positive-dimensional polynomial systems, ISSAC'13 Proc. 2013 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp 371-378, 2013.
- **Yue Ma and Lihong Zhi**
Computing Real Solutions of Polynomial Systems via Low-Rank Moment Matrix Completion, ISSAC'12 Proc. 2012 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp 249-256, 2012.
- **Feng Guo, Erich Kaltofen and Lihong Zhi**
Certificates of Impossibility of Hilbert-Artin Representations of a Given Degree for Definite Polynomials and Functions, ISSAC'12 Proc. 2012 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp.195-202,2012.
- **Yue Ma and Lihong Zhi**
The Minimum-Rank Gram Matrix Completion via Modified Fixed Point Continuation Method, ISSAC'11 Proc. 2011 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 241--248,2011.
- **Zijia Li, Zhengfeng Yang and Lihong Zhi**
Blind Image Deconvolution via Fast Approximate GCD
ISSAC'10 Proc. 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 155-162, 2010.
- **Sharon Hutton, Erich Kaltofen and Lihong Zhi**
Computing the radius of positive semidefiniteness of a multivariate real polynomial via a dual of Seidenberg's method
ISSAC'10 Proc. 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 227-234,2010.
- **Feng Guo, Mohab Safey El Din and Lihong Zhi**
Global Optimization of Polynomials Using Generalized Critical Values and Sums of

Squares

ISSAC'10 Proc. 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 107-114,2010.

- **Erich Kaltofen, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
A Proof of the Monotone Column Permanent (MCP) Conjecture for $n = 4$ via Sums-Of-Squares
Proc. 2009 International Workshop on Symbolic-Numeric Computation, pp. 65-70,2009.
- **Erich Kaltofen, Bin Li, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
Exact Certification of Global Optimality of Approximate Factorizations via Rationalizing Sums-of-squares with Floating Point Scalars.
ISSAC'08 Proc. 2008 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 155-163,2008.
- **Xiaoli Wu and Lihong Zhi**
Computing the Multiplicity Structure from Geometric Involutive Form
ISSAC'08 Proc. 2008 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 325-332,2008.
- **Erich Kaltofen, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
On Probabilistic Analysis of Randomization in Hybrid Symbolic-Numeric Algorithms
Proc. 2007 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 11-17, 2007.
- **Erich Kaltofen, Bin Li, Kartik Sivaramakrishnan, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
Lower Bounds for Approximate Factorizations via Semidefinite Programming(extended abstract)
Proc. 2007 International Workshop on Symbolic-Numeric Computation, pp. 203-204, 2007.
- **Bin Li, Jiawang Nie, and Lihong Zhi**
Approximate GCDs of Polynomials and SOS Relaxation (extended abstract)
Proc. 2007 International Workshop on Symbolic-Numeric Computation, pp. 205-206, 2007.
- **Lihong Zhi**
Numerical Optimization in Hybrid Symbolic-numeric Computation
Proc. 2007 International Workshop on Symbolic-Numeric Computation, pp. 33-35, 2007.
- **Erich Kaltofen and Lihong Zhi**
Hybrid Symbolic-numeric Computation
ISSAC'06 Proc. 2006 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 7, 2006.
- **Erich Kaltofen, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
Approximate Greatest Common Divisors of Several Polynomials with Linearly Constrained Coefficients and Singular Polynomials
ISSAC'06 Proc. 2006 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 169-176, 2006.

- **Bingyu Li , Zhuojun Liu, and Lihong Zhi**
Fast Low Rank Approximation of a Sylvester Matrix International Workshop on Symbolic-Numeric Computation SNC 2005 Proceedings, pp. 202-208, 2005
- **Erich Kaltofen, Zhengfeng Yang, and Lihong Zhi**
Structured Low Rank Approximation of a Sylvester Matrix International Workshop on Symbolic-Numeric Computation SNC 2005 Proceedings, pp. 188-201, 2005
- **Lihong Zhi and Greg Reid**
Solving Nonlinear Polynomial System via Symbolic-Numeric Elimination Method Proceedings of International Conference on Polynomial System Solving, pp. 50-53, 2004
- **Greg Reid, Jianliang Tang, Jianping Yu, and Lihong Zhi**
Hybrid method for solving new pose estimation equation system Proceedings of the 2004 International Workshop on Computer and Geometric Algebra with Applications, LNCS 3519, Springer Berlin Heidelberg, pp.46-57, 2005.
- **Shuhong Gao, Erich Kaltofen, John P. May, Zhengfeng Yang, Lihong Zhi**
Approximate factorization of multivariate polynomials via differential equations. ISSAC'04 Proc. 2004 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 167-174, 2004. **ACM SIGSAM's ISSAC 2004 Distinguished Student Author Award** (May and Yang).
- **Joe Bonasia, Francois Lemaire, Greg Reid, Robin Scott, and Lihong Zhi**
Determination of approximate symmetries of differential equations CRM Proceedings and Lecture Notes 39, pp. 233-249, Amer. Math. Soc, 2004.
- **Lihong Zhi**
Displacement Structure in Computing the Approximate GCD of Univariate Polynomials Proceedings of the Asian Symposium on Computer Mathematics, pp. 288-298, World Scientific (Lecture Notes Series on Computing) 2003.
- **Greg Reid, Jianliang Tang, and Lihong Zhi**
A Complete Symbolic-Numeric Linear Method for Camera Pose Determination ISSAC'03 Proc. 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp.215-223, 2003.
- **Lihong Zhi, M.-T Noda, and K. Li**
On the construction of PSE for GCD Computation Proceedings of the Asian Symposium on Computer Mathematics, pp.76-81, World Scientific (Lecture Notes Series on Computing) 2001.
- **Kai Li, Lihong Zhi, and Matu-Tarow Noda**
Solving Approximate GCD of Multivariate Polynomials By Maple/Matlab/C Combination Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics, pp.492-499, Chiangmai, Thailand, 2000.
- **Lihong Zhi and M.-T. Noda**
Approximate GCD of Multivariate Polynomials Proceedings of the Asian Symposium on Computer Mathematics, pp.9-18, Chiangmai, Thailand, 2000.

- **Yuzhen Huang, Hans Stetter , Wenda Wu, and Lihong Zhi**
Pseudofactors of Multivariate Polynomials
ISSAC'00 Proc. 2000 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation,
pp.161-168., United Kingdom, 2000.
- **Lihong Zhi , Y. Notake, H. Kai, and M.-T. Noda**
Hybrid Method for Solving Polynomial Equations
Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics, pp.492-501,
Guangzhou, China, 1999.
- **Lihong Zhi and Wenda Wu**
Nearest Singular Polynomials I
Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics, pp.323-332, Japan,
1998.
- **Dongming Wang and Lihong Zhi**
Algebraic Factorization Applied to Geometric Problems
Proceedings of the Asian Symposium on Computer Mathematics, pp.23-36, China, 1998.
- **Lihong Zhi and Wenda Wu**
A Note on Small Perturbations to Polynomials (abstract)
Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics, Malaysia, 1997.
- **Kai Huang, Ding kang Wang, and Lihong Zhi**
Wu method and its Applications (abstract)
Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics, Malaysia, 1997.
- **Ding kang Wang and Lihong Zhi**
Software Development in MMRC
Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics, Singapore, December
18-21, 1995, pp 234-243.

Proceedings /Collection of Papers

- **Dongming Wang, Lu Yang and Lihong Zhi, etc.** *Symbolic Computation*,
Tsinghua University Press, 2003.
- **Dongming Wang and Lihong Zhi (editors)** *Symbolic-Numeric
Computation*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2006.
- **Dongming Wang and Lihong Zhi (editors)** *Symbolic and Numeric
Computation*, Special issue of Mathematics in Computer Science,
Birkhäuser/Springer, Basel, 2007.