Date 2018. 8. 31

§2. 群

定义：集合G称为~~称~~群，若其上存在二元运算 $\cdot$ $G\times G\to G$，

满足：1) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

2) $\exists\ 1\in G$ s.t. $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$

3) $\forall\ x\in G$. s.t. $x^{-1}\in G$ s.t $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = 1$.

方便起见，$x\cdot y$ 记作 xy.

注：a) 只满足 1)，G称为半群

b) 只满足 1) & 2) 则称为幺半群.

c) 单位元1是唯一的：

若 $1'$ 为单位元 $\Rightarrow 1' = 1\cdot 1' = 1$

d) 逆元 x^{-1} 是唯一的：

$\bar{x}$ 为 x 的逆元 $\Rightarrow \bar{x} = \bar{x}\cdot 1 = \bar{x}\cdot(x\cdot x^{-1})$

$= (\bar{x}\cdot x)\, x^{-1}$

$= 1\cdot x^{-1} = x^{-1}$.

同态：~~$f: G\to G'$ 映射~~ G, G' 为群

映射 $f: G\to G'$ 称为同态，若 $f(xy) = f(x)f(y)$

$\forall\ x, y\in G$.

同构：同态 + 双射.

注：$f(1) = 1'$；$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

$f(1) = f(1\cdot 1) = f(1)f(1) \Rightarrow f(1) = 1'$

子群：$H \subset G$ 称为子群，若

1) $1 \in H$，2) $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H$

3) $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$.

$H \subsetneq G$ 的子群称为真子群.

记 $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n个}$ $\underset{n \geq 0}{~~特别~~}$，特别的 $x^0 = 1$.

$x^{-n} := \underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n个}$

$S \subset G$ 用 $\langle S \rangle$ 表示由 S 生成的子群.

$\Updownarrow$

G 中包含 S 的最小子群

$\Updownarrow$

$$\bigcap_{\substack{S \subset H \subset G \\ 子群}} H$$

$\Updownarrow$

$$\langle S \rangle = \left\{ x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1, \cdots x_m \in S \\ k_i \in \mathbb{Z}. \end{array} \right\}.$$

$\langle \phi \rangle := \{1\}$.

G 称为交换群（或阿贝尔群），若 $xy = yx \quad \forall x, y \in G$.

对此时，常用 $+$ 表示群运算

$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n个}$ $~~-nx = x~~$

Date

循环群：若 $\exists\, g\in G$ s.t $G=\langle g\rangle$.

显然，循环群是交换群.

$g\in G$. g的阶 记作 $\mathrm{ord}(g)$.

1) 若 $\forall\, n>0$. $g^n\neq 1$. 则 $\mathrm{ord}(g)=+\infty$.

2) 否则 $\mathrm{ord}(g)=\min\{n>0 \mid g^n=1\}$.

群 G的阶 记作 $|G|:=G$中元素的个数.

由 [BA I, §4.2. 定理2] 有 $\mathrm{ord}(g)=|\langle g\rangle|$.

陪集分解：

设 H为G的子群，$g\in G$.

$gH:=\{gh \mid h\in H\}$ 称为G关于H的一个左陪集.

$Hg:=\{hg \mid h\in H\}$ - - - - - 右陪集.

g称为gH（或Hg）的一个代表元.

定理1：$\forall\, g_1, g_2\in G$，$g_1H=g_2H$ 或 $g_1H\cap g_2H=\phi$.

证：设 $g_1H\cap g_2H\neq\phi$. i.e $\exists\, h_1, h_2\in H$ s.t.

$g_1h_1=g_2h_2 \Rightarrow g_1=g_2h_2\cdot h_1^{-1}\in g_2\cdot H$ ~~$H=g_2H$~~.

$\Rightarrow g_1H\subseteq g_2H\cdot H=g_2H$

同理，$g_2H\subseteq g_1H$. 用而 $g_1H=g_2H$ □.

一般而言，$gH \neq Hg'$

例：S_3 关于 S_2 的陪集分解：

$$\cancel{S_3 = \{1,(12)\}\cup\{(13),(123)\}\cup\{(23),(132)\}}$$

$$\cancel{S_3 =}$$

$$S_3 = \underset{\{1,(12)\}}{\underset{\parallel}{S_2}} \cup \underset{\{(13),(123)\}}{\underset{\parallel}{(12)S_2}} \cup \underset{\{(23),(132)\}}{\underset{\parallel}{(23)S_2}}$$

$$S_3 = \overset{\parallel}{S_2} \cup \underset{\{(13),(132)\}}{\underset{\parallel}{S_2(13)}} \cup \underset{\{(23),(123)\}}{\underset{\parallel}{S_2(23)}}$$

然而 $\{gH : g\in G\} \xrightarrow{\text{双射}} \{Hg : g\in G\}$

$$gH \longrightarrow Hg^{-1}$$

· 良定：$g_1H=g_2H \Rightarrow g_1^{-1}g_2\in H \Rightarrow H = Hg_1^{-1}g_2$

$$\Leftrightarrow Hg_2^{-1}=Hg_1^{-1}$$

· 单射：$Hg_1^{-1}=Hg_2^{-1} \Rightarrow g_2^{-1}g_1\in H \Rightarrow H = \cancel{H}g_2^{-1}g_1H$

$$\Rightarrow g_2H=g_1H.$$

· 满射是显然

～无交并

$G/H = \{gH \mid g\in G\}$

由定理1：$G = \bigsqcup_i g_iH$

$|G/H|$ 称为 H 在 G 中的指数 记为 $(G:H)$

设 $|G|<+\infty$ 则 $|G| = \sum_i |g_iH|$

Date

映射 $H \to gH$ 是双射 $\Rightarrow |H| = |gH|$.
$h \to gh$

所以 $|G| = (G:H)|H|$ ~~m≥1~~.

定理2（拉格朗日）设 $|G| < +\infty$ 且 H 为其子群. 则 $|H| \mid |G|$.

推论：1) 设 $g \in G$. 则 $\mathrm{ord}(g) \mid |G|$.

2) 若 $|G| = p$ 为素数. 则 G 为循环群.

证：1) 由[BA I, §4.2 定理2]. $\mathrm{ord}(g) = |\langle g\rangle| \mid |G|$.

2) 取 $g \in G \setminus \{1\}$. 则 $1 \leq |\langle g\rangle| \mid |G| = p$.

$\Rightarrow |\langle g\rangle| = |G| \Rightarrow G = \langle g\rangle$.

2. 循环群的结构

定理3. 设 G 是循环群, H 为其子群. 则

1) H 为循环群.

2) 若 $G = (\mathbb{Z}, +)$. 则 $H = (m\mathbb{Z}, +)$. 对于某个 $m \geq 0$.

3) 设 $|G| < +\infty$. $\{G$ 的子群$\} \longrightarrow \{|G|$ 的因子$\}$ 是双射.

$H \longrightarrow |H|$

证：1) 群运算用"+"表示. 设 $G = \langle g\rangle$.

$\forall \bar{g} \in G, \exists k \in \mathbb{Z}$ s.t. $\bar{g} = kg$. $H = \langle 0\rangle$. 显然. 下设 $H \neq \langle 0\rangle$.

若 $kg \in H \Rightarrow -kg \in H$. 定义

$m_H = \min\left\{k \;\middle|\; \begin{array}{l} k \geq 1 \\ kg \in H \end{array}\right\}$.

Date

$\forall h \in H \ \exists d \in \mathbb{Z}$ s.t $h = dg$

令 $d = lm_H + r$ 其中 $0 \le r < m_H$ 则

$(lm_H)g + rg = h \in H \Rightarrow rg \in H \Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow h \in \langle m_H g \rangle$

因而，$H = \langle m_H g \rangle$.

2) …

3). 1-1 是单射.

令 $|G| = lm_H + r$ 其中 $0 \le r < m_H$. 则

$\underset{\overset{\uparrow}{H}}{(lm_H)g} + rg = |G|g = 0 \Rightarrow rg \in H$

$\Rightarrow r = 0$

因而，$m_H \mid |G|$.

$0 = |G|g = \frac{|G|}{m_H} \cdot m_H g \Rightarrow \operatorname{ord}(m_H g) \mid \frac{|G|}{m_H}$

$\Rightarrow |H| \mid \frac{|G|}{m_H}$ i.e $m_H |H| \mid |G|$,

$|H| \cdot m_H \cdot g = \operatorname{ord}(m_H g) \cdot m_H g = 0 \Rightarrow \operatorname{ord}(g) \mid |H| \cdot m_H$

$\Rightarrow |G| \mid m_H |H|$

所以，$|G| = m_H |H|$.

$|H_1| = |H_2| \Rightarrow m_{H_1} = m_{H_2} \Rightarrow H_1 = \langle m_{H_1} g \rangle$

$= \langle m_{H_2} g \rangle = H_2$

22.

(•) 是满射.

设 $d \mid |G|$. 令 $m = \frac{|G|}{d}$. 及 $H = \langle mg \rangle$.

由于 $0 < m \le |G|$. 易知 $m_H = m$.

$$m_H |H| = |G| \Rightarrow m|H| = |G| \Rightarrow |H| = d.$$

- 正规子群

$H \subseteq G$ 为正规子群. 若 H 为子群且 $\forall g \in G$ 有

$$gHg^{-1} = H.$$

§3 群在集合上的作用

例：1) $S_n = \{\{1,2,\cdots,n\}上的置换\}$

$\pi: \{1,2,\cdots,n\} \longrightarrow \{1,2,\cdots,n\}$ 双射.

$i \longrightarrow \pi(i)$

群运算 = 映射的复合.

2) $SO(2) = \{\mathbb{R}^2上的旋转\}$.

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 可逆线性变换

$v \longrightarrow gv$

群运算 = 线性变换的复合.

定义：群 G (从左) 作用于集合 Ω 指 $\varphi: G\times\Omega \longrightarrow \Omega$

$(g, x) \longrightarrow \varphi(g,x)$

($gx := \varphi(g,x)$ 严格来说, $g\circ x$ 或 $g*x$)

满足 a) $1x = x \quad \forall x\in\Omega$

b) $(gh)x = g(hx) \quad \forall g,h\in G, x\in\Omega$,

类似地, 右作用: $\Omega\times G \longrightarrow \Omega$

$(x, g) \longrightarrow xg$

1) $x\cdot 1 = x \ \forall x\in\Omega$, 2) $(xg)h = x(gh)$.

Ω 称为 G-集.

注：群作用一般与 Ω 的结构相容, 例

1) $\Omega = V$ 为向量空间, $g: V \rightarrow V$, $v \rightarrow gv$ 为线性映射.

2) $\Omega = M$ 为拓扑空间 — — — 为连续映射

Date

$S(\Omega) := \{\Omega$上的双射$\}$

$g\in G$. 定义: $\Phi_g: \Omega \to \Omega$ 双射

$x \to gx$

从而: $\Phi: G \longrightarrow S(G)$

$g \longrightarrow \Phi_g$.

Φ为群同态.

($1\cdot x = x \ \forall x\in\Omega \Rightarrow \Phi(1) = id$.

$(gh)x = g(hx) \Rightarrow \Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$.).

$\mathrm{Ker}\Phi$ 称作群作用的核.

若 $\underbrace{\mathrm{Ker}\Phi=\{1\}}$ 则称 G 忠实地作用于Ω.

$g\neq h$, 则$\exists x\in\Omega$ s.t $gx\neq hx$.

注: 群作用的扩展: $k\geq 1$.

$\varphi^k: G\times\Omega^k \longrightarrow \Omega^k$

$(g,(x_1,\cdots x_k)) = (gx_1, \cdots gx_k)$.

$G\times P(\Omega) \longrightarrow P(\Omega)$

$(g, A) \longrightarrow \{ga \mid a\in A\}$.

$P(\Omega) := \{A \mid A\subseteq\Omega\}$.

~~2:轨~~

2：轨道与稳定子群

等价关系：$\forall x, y \in \Omega$，$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$, s.t $y = gx$.

$x = 1 \cdot x \Rightarrow x \sim x$. $x \sim y \Rightarrow \exists g \in G$, s.t $y = gx$

$\Rightarrow x = g^{-1}y \Rightarrow y \sim x$.

$x \sim y, y \sim z \Rightarrow y = g_1 x, z = g_2 y \Rightarrow z = g_2 g_1 x$

$\Rightarrow x \sim z$

等价类称作 G-轨道，记作 $G(x)$ 或 x^G.

含 x 的 G-轨道

$= \{gx \mid g \in G\}$.

性质：$G(x_1) = G(x_2)$ 或 $G(x_1) \cap G(x_2) = \phi$.

证：与陪集分解类似.

G 在 Ω 上的作用是可迁的，如果 $\exists x \in \Omega$ s.t $G(x) = \Omega$.

例.1) $H < G$ 为子群.

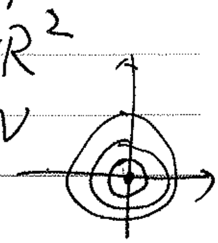
定义 $\varphi: H \times G \longrightarrow G$ （左平移作用）

$(h, g) \longrightarrow hg$

H-轨道：$= \{Hg \mid g \in G\} = \{$右陪集$\}$

2) $SO(2)$ 作用于 $\mathbb{R}^2$：$SO(2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(g, v) \longrightarrow gv$



· $v = 0 \Rightarrow G(v) = v$

· $v \neq 0 \Rightarrow G(v) = \{$过 v 以 O 为圆心的圆$\}$

$x \in G$.

定义：$St(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$. 常表示为 G_x

称作 x 的稳定子群.

例：• $SO(2)$ 作用于 $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^2 \ni x = 0 \Rightarrow St(0) = SO(2)$

$x \neq 0 \Rightarrow St(x) = \{1\}$.

• S_3 作用于 $\{1,2,3\}$.

$St(3) = \{\pi \in S_3 \mid \pi(3) = 3\} = S_2$

不是 S_3 的正规子群.

令 $y = gx$, $g \in G$.

$h \in St(y) \Leftrightarrow hy = y \Leftrightarrow hgx = gx \Leftrightarrow g^{-1}hg = x$

$\Leftrightarrow g^{-1}hg \in St(x)$.

$\therefore St(y) = g\,St(x)\,g^{-1}$ 即 $St(y)$ 与 $St(x)$ 共轭

($H, H' \subseteq G$ 子集 称为共轭的, 如果 $\exists g \in G$ s.t. $H' = gHg^{-1}$)

$= \{g\,St(x) \mid g \in G\}$

性质：$G/St(x) \xleftrightarrow{1:1} G(x)$.

$g\,St(x) \longmapsto gx$

证：

$g_1 St(x) = g_2 St(x) \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 St(x) = St(x)$

$\Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in St(x) \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 x = x \Leftrightarrow g_2 x = g_1 x$

若$|G|<+\infty$ 则

由拉格朗日定理，$|G(x)|\,|\,|G|$.

定理4：设群 G 作用于 Ω，$x_0, x_0' \in \Omega$，$g \in G$ 则

1) $x_0' = g x_0 \Rightarrow St(x_0') = g St(x_0) g^{-1}$

2) 设 $|G| < +\infty$ 且

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_r$$ 为轨道分解

且 $x_i \in \Omega_i$ 对于 $1 \le i \le r$，则

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{r} (G : St(x_i))$$

3：群作用的例子

例1：（共轭作用）取 $\Omega = G$

$$G \times \Omega \longrightarrow \Omega$$
$$(g, h) \longrightarrow g h g^{-1}$$

$\cdot I_g$: $G \longrightarrow G$, $h \longrightarrow g h g^{-1}$ 共轭变换　　$I: G \longrightarrow S(G)$, $g \longrightarrow I_g$

$h \in G$, $G(h) = h^G = \{ g h g^{-1} \mid g \in G \}$ 含 h 的共轭类

$C_G(h) := St(h) = \{ g \in G \mid gh = hg \}$ h 的中心化子

$$\operatorname{Ker} I = \{ g \in G \mid gh = hg \ \forall h \in G \}$$
$$= \{ g \in G \mid I_g(h) = h \ \forall h \in G \}$$
$$= \bigcap_{h \in G} C_G(h)$$

$Z(G) :=$ 群 G 的中心。

Date 2018. 9. $\overset{28}{10}$

设$|G|<+\infty$ 且 $G=\coprod_{i=1}^{r} x_i^G$

设 $x_i^G=\{x_i\}$ $\forall i=1,\cdots,q$. （注：$x_i^G=\{x_i\} \Rightarrow x_i\in Z(G)$
特别地，$1\in Z(G)$ ）.

由轨道公式及轨道的性质有：

$$|x_i^G|=(G:C_G(x_i)) \quad \forall i=1,\cdots r$$

$$|G|=|Z(G)|+\sum_{i=q+1}^{r}(G:C_G(x_i)).$$

定理2：设G为有限p-群（即$|G|=p^s$, $s\geq 1$, p为素数）则

$$Z(G)\neq\{1\}.$$

证：显然，$\{1\}\subseteq Z(G)$.

i) $Z(G)=G$. 结论显然成立.

ii) 设$Z(G)\neq G$. 从而 $q<r$.

对于 $\forall i=q+1,\cdots,r$, 有 $(G:C_G(x_i))=p^{n_i}$. 其中 $1\leq n_i<s$.

由 $|G|=|Z(G)|+\sum_{i=q+1}^{r}(G:C_G(x_i))$

$=|Z(G)|+\sum_{i=q+1}^{r}p^{n_i} \Rightarrow p\,\big|\,|Z(G)| \Rightarrow Z(G)\neq\{1\}$

□.

$H\subseteq G$为子群

$$N_G(H):=St(H)=\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\}.$$

称为H的正规~~群~~化子

H为正规子群 $\Leftrightarrow N_G(H)=G$.

例2.（平移作用）. $G\times G\longrightarrow G$.

$(g,h)\longrightarrow gh$.

作用是忠实的.

应用：

$G\hookrightarrow S_n$

其中$n=|G|$

Date

$G/H = \{gH \mid \forall g \in G\}$. 其中 $H \subseteq G$ 为子群

$$G \times G/H \longrightarrow G/H$$
$$(g, xH) \longrightarrow gxH$$

$L^H: G \longrightarrow S(G/H)$ 一般不是单射.

$$\begin{aligned}\ker L^H &= \{g \in G \mid gxH = xH \ \forall x \in G\} \\ &= \{g \in G \mid x^{-1}gx \in H \ \forall x \in G\} \\ &= \{g \in G \mid g \in xHx^{-1} \ \forall x \in G\} \\ &= \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}\end{aligned}$$

L^H 是单射 $\Leftrightarrow \bigcap_{x \in G} xHx^{-1} = \{1\}$

练习:

$$G \times G \to G$$
$$(g, h) \to hg^{-1}$$

验证其为左作用.

例3: (可迁群) $G \subseteq S_n$ 置换群

$$G \times \underbrace{\{1, 2, \cdots, n\}}_{=\Omega} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$$
$$(\sigma, i) \longrightarrow \sigma(i)$$

G 为在 Ω 上 可迁群 若 $\exists\, i \in \Omega$ s.t. $\Omega = G(i)$.

即 $G \times \Omega \to \Omega$ 是可迁的.

~~$G \times \Omega^k \to$~~

令 $\Omega^{[k]} := \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \Omega^k \mid i_1, i_2, \cdots, i_k$ 互不相同$\}$

$$G \times \Omega^{[k]} \longrightarrow \Omega^{[k]}$$
$$(\sigma, (i_1, \cdots, i_k)) \longrightarrow (\sigma(i_1), \cdots, \sigma(i_k))$$ 为群作用

在Ω上 Date

G是k-可迁的. 如果作用 $G\times\Omega^{[k]}\to\Omega^{[k]}$ 在$\Omega^{[k]}$上是可迁的.

例: · S_n是n-可迁的.

$(i_1,\cdots,i_n)\ (j_1,\cdots,j_n)\in\Omega^{[n]}$.

令 $\sigma=\begin{pmatrix} i_1 & i_2, & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2, & \cdots & j_n \end{pmatrix}$. 即可

· A_n是$(n-2)$-可迁的,

$x=(i_1,\cdots,i_{n-2}),\ y=(j_1,\cdots,j_{n-2})\in\Omega^{[n-2]}$.

令 $\sigma_1=\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{n-2} & i_{n-1} & i_n \\ j_1, & \cdots & j_{n-2} & j_{n-1} & j_n \end{pmatrix}$

$\sigma_2=\begin{pmatrix} i_1, & \cdots & i_{n-2} & i_{n-1} & i_n \\ j_1, & \cdots & j_{n-2} & j_n & j_{n-1} \end{pmatrix}$ 则 $\sigma_1(x)=y$

$\sigma_2(x)=y$.

注意到 $\sigma_1=\begin{pmatrix} j_{n-1} & j_n \\ j_n & j_{n-1} \end{pmatrix}\sigma_2$

从而 $\exists\ \sigma\in A_n$ s.t $\sigma(x)=y$.

· $G\times G/H\to G/H$ 是可迁的.

$(g,\ xH)\to gxH$

若当猜想: 除S_n与A_n外, 不存在$k\geq 6$的k-可迁群.

Date

设G在Ω上是可迁的. $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$

由轨道公式(定理1)有 $\forall\, i=1,2,\cdots,n$. 有

$$n=|\Omega|=|G(i)|=(G:St(i))=\frac{|G|}{|St(i)|}$$

即 $|G|=n|St(i)|\quad \forall\, i=1,2,\cdots n.$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n}|St(i)|=n|St(j)|=|G|.$$

记令 $\Delta=\{(g,i)\in G\times\Omega \mid g(i)=i\}$

$$=\bigcup_{i=1}^{n}\{(g,i)\mid g\in St(i)\}.$$

$$\therefore\ |\Delta|=\sum_{i=1}^{n}|\{(g,i)\mid g\in St(i)\}|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|St(i)|=|G|.$$

$\pi:\ \Delta\longrightarrow G$, $(g,i)\longmapsto g$. 则 $\underset{\in G}{g_1}\neq\underset{\in G}{g_2}\Rightarrow \pi^{-1}(g_1)\cap\pi^{-1}(g_2)=\phi$.

定理3: 设G在Ω上是可迁的. $\forall\, g\in G$. 令 $N(g)$

$$:=|\{i\in\Omega\mid g(i)=i\}|\ \left(=|\pi^{-1}(g)|\right).$$

Date

则. i) $\sum_{g\in G} N(g) = |G|$

ii) 若 G 在 Ω 上是2-可迁的. 则 $\sum_{g\in G} N(g)^2 = 2|G|$

证: i)

$$\sum_{g\in G} N(g) = \sum_{g\in G} |\pi^{-1}(g)| = \left|\bigcup_{g\in G} \pi^{-1}(g)\right|$$

$$= |\Delta| = |G|$$

(注: 若 $g \notin \pi(\Delta)$ 则 $\pi^{-1}(g)=\phi$ 即 $N(g)=0$)

ii) 记 $\Omega_i = \Omega \setminus \{i\}$. 则 $St(i)$ 在 Ω_i 上是可迁的.

($\forall j_1, j_2 \in \Omega_i$ $(i,j_1),(i,j_2) \in \Omega^{[2]}$

G 在 Ω 上2-可迁 $\Rightarrow \exists g\in G$ s.t $g(i)=i$ 且 $g(j_1)=j_2$

$\Rightarrow \exists g \in St(i)$ s.t $g(j_1)=j_2$.)

记 $N_i(g) := |\{j\in\Omega_i \mid g(j)=j\}|$.

则由i) 有 $\forall i=1,2,\cdots n$,

$$\sum_{g\in St(i)} N_i(g) = |St(i)|.$$

注意到 $\forall g\in St(i)$, $N(g) = |\{j\in\Omega \mid g(j)=j\}|$

$= |\{j\in\Omega_i\cup\{i\} \mid g(j)=j\}|$

$= |\{j\in\Omega_i \mid g(j)=j\}\cup\{i\}| = N_i(g)+1$

$$\therefore \sum_{g\in St(i)} N(g) = \sum_{g\in St(i)} (N_i(g)+1) = 2|St(i)|$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{g\in St(i)} N(g) = \sum_{i=1}^{n} 2|St(i)| = 2|G|$$

$$\| $$

$$\sum_{(g,i)\in\Delta} N(g) = \sum_{g\in\pi(\Delta)} |\pi^{-1}(g)|\, N(g)$$

$$= \sum_{g\in\pi(\Delta)} N(g)^2$$

$$= \sum_{g\in G} N(g)^2$$

最后等式成立因为若 $g\notin\pi(\Delta)$ 有 $N(g)=0$. □

4: 齐次空间.

$G\times\Omega\to\Omega$ 为群作用.

若该作用在 Ω 上是可迁的. 则称 Ω 是齐次的.

进一步若该作用还是忠实的, 则称 Ω 是主齐次的.