Date

§4: 商群与同态

$H \subseteq G$ 为子群.

$G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

何时 $g_1g_2H = g_1Hg_2H \quad \forall g_1, g_2 \in G$?

$$g_1Hg_2H = g_1g_2H \Rightarrow g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2\bar{h}$$

$$\{g_1h_1g_2h_2 \mid h_1, h_2 \in H\} \Rightarrow g_2^{-1}h_1g_2 = \bar{h}h_2$$

$$\Rightarrow g_2^{-1}h_1g_2 \in H \quad \forall h_1 \in H$$

$\Rightarrow g_2^{-1}Hg_2 \subseteq H$.

$\because g_2$ 任意 $\therefore \quad g^{-1}Hg = H \quad \forall g \in G$.

即 $H \lhd G$.

反之.

$$H \lhd G \Rightarrow g_1Hg_2H = g_1g_2g_2^{-1}Hg_2H$$

$$= g_1g_2H \cdot H = g_1g_2H.$$

定理1: 设 $H \lhd G$ 则在乘法运算 $g_1H \cdot g_2H = g_1g_2H$ 下 G/H 成为一个群 且 H 是单位元, $g^{-1}H$ 为 gH 的逆元.

证: 1) $(g_1Hg_2H)g_3H = g_1g_2Hg_3H = g_1g_2g_3H$
$= g_1H(g_2g_3H) = g_1H(g_2Hg_3H)$

2) 单位元.

$$gHH = gH = g\cdot g^{-1}Hg = Hg = H\cdot Hg.$$

3) 逆元.

$$gHg^{-1}H = H = g^{-1}HgH.$$

当 $H \triangleleft G$ 时 称 G/H 为 G 关于 H 的商群.

注: $(gH)^{-1} = \{(gh)^{-1} \mid h\in H\}$

$$= \{h^{-1}g^{-1} \mid h\in H\} = Hg^{-1} = g^{-1}H$$

对于运算为 + 的交换群. G/H 常称为 G 模 H 的商群.

特别. $G=\mathbb{Z}$, $H=n\mathbb{Z}$. $G/H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 称为 $\mathbb{Z}$ 模 n 的商群.

2. 群同态.

①　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　2018.9.16

2. 同态定理.

$G, \bar{G}$ 为群

定义: 映射 $\varphi: G \to \bar{G}$ 称为群同态 如果 $\forall g_1, g_2 \in G$, $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$

进一步 如果 $\exists$ 群同态 $\varphi^{-1}: \bar{G} \to G$ 满足 $\varphi\varphi^{-1} = id_{\bar{G}}$, $\varphi^{-1}\varphi = id_G$

则称 φ 是同构. 此时称 G 与 $\bar{G}$ 是同构的. 记作 $G \cong \bar{G}$.

注: 1) φ 为同态~~射~~ $\Rightarrow \varphi(1) = 1$.

2) φ 为同构 $\Leftrightarrow$ φ 为同态 + 双射.

引理: 设 $\varphi: G \to \bar{G}$ 为同态. $H \le G$ 为子群, $\bar{H} \le \bar{G}$ 为子群 则

1) $\varphi(H)$ 为 $\bar{G}$ 的子群

2) $\varphi^{-1}(\bar{H}) := \{ g \in G \mid \varphi(g) \in \bar{H} \}$ 为 G 的子群

证: 练习.

定理2: (同态基本定理) 设 $\varphi: G \to \bar{G}$ 为同态, $K = \mathrm{Ker}\,\varphi$. 则

$K \lhd G$ 且 $G/K \cong \mathrm{Img}\,\varphi$. 反之 若 $K \lhd G$ 则 $\exists$ 群 $\bar{G}$ 及满同态

$\pi: G \to \bar{G}$ s.t. $\mathrm{Ker}\,\pi = K$. (~~该同态称为自然同态~~)

证: • $K \lhd G$

由引理, $K = \varphi^{-1}(1)$ 为 G 的子群. $\forall g \in G$ $a \in K$

$$\varphi(gag^{-1}) = \varphi(g)\varphi(a)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow gag^{-1} \in K \Rightarrow gKg^{-1} \subseteq K$$

$\because g$ 任意 $\therefore gKg^{-1} = K$ i.e. $K \lhd G$.

令 $\bar{\varphi}: G/K \to \mathrm{Img}\,\varphi$

$\qquad gK \mapsto \varphi(g)$

良定与单射 $g_1K = g_2K \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in K \Leftrightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Leftrightarrow \bar{\varphi}(g_1K) = \bar{\varphi}(g_2K)$.

②

群同态 ∴ $\overline{\varphi}(g_1K\, g_2K) = \overline{\varphi}(g_1g_2K) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$

$\forall g_1, g_2 \in G$ $\quad = \overline{\varphi}(g_1K)\,\overline{\varphi}(g_2K)$

设 $K \triangleleft G$ 令 $\overline{G} = G/K$ 为 G 关于 K 的商群.

$$\pi: G \longrightarrow G/K$$
$$g \longrightarrow gK$$

可验证 π 为群同态且满足要求

(该同态常称为自然同态)

定理3:(第一同构定理) 设 G 为群 $H, K \subseteq G$ 为子群 且 $K \triangleleft G$ 则

1) $HK = KH$ 为 G 的子群 且 $H \cap K \triangleleft H$.

2) 映射 φ: $H/H\cap K \longrightarrow HK/K$ 为群同构. 从而 $H/H\cap K \cong HK/K$.

$h(H\cap K) \longrightarrow hK$

证: 1) $K \triangleleft G \Rightarrow \forall g \in G,\ gKg^{-1} = K \Rightarrow gK = Kg \quad \forall g \in G$.

$$HK = \bigcup_{h\in H} hK = \bigcup_{h\in H} Kh = KH.$$

· $1 \in HK$

· $\forall h_1, h_2 \in \cancel{H}$, $a_1, a_2 \in K$

$h_1a_1h_2a_2 = h_1h_2\, h_2^{-1}a_1h_2\, a_2 \in HK$

· $(h_1a_1)^{-1} = a_1^{-1}h_1^{-1} = KH = HK$.

∴ HK 为 G 的子群

$\forall h \in H \quad h(H\cap K)h^{-1} = hHh^{-1} \cap hKh^{-1} = H \cap K$

∴ $H \cap K \triangleleft H$.

~~2)㊀ φ 定义良好.~~

~~$h_1(H\cap K) = h_2(H\cap K) \Rightarrow h_1^{-1}h_2 \in H\cap K \Rightarrow h_1^{-1}h_2 \in K$~~

~~$\Rightarrow h_1K = h_2K$.~~

③ 2) $\pi: G \longrightarrow G/K$ 为自然同态. 则
$g \longrightarrow gK$

$$\pi(H) = \{gK \mid g\in H\} = \{gaK \mid g\in H, a\in K\} = HK/K$$

令 $\pi_0 = \pi|_H: H \longrightarrow HK/K$

$$\ker\pi_0 = \{g\in H \mid gK = K\} = \{g\in H \mid g\in K\} = H\cap K.$$

由同态基本定理: $\varphi: H/H\cap K \longrightarrow HK/K$ 是群同构.
$h(H\cap K) \longrightarrow hK$

$K\triangleleft G$. $\overline{G} = G/K$ 为商群.

$\Omega(G,K) = \{H \mid H\le G$ 为子群 且 $K\le H\}$.

$\Omega(\overline{G}) = \{\overline{G}$ 的子群$\}$

定理4 (对应定理) G 为群 $K\triangleleft G$, ~~其中~~ $H\in\Omega(G,K)$ 则.

1) ~~$H\in\Omega(G,K)\Longrightarrow$~~ $\overline{H} = H/K$ ~~为~~ $\in\Omega(\overline{G})$ 且.

$\pi^*: \Omega(G,K) \longrightarrow \Omega(\overline{G})$ 为双射.
$H \longrightarrow \overline{H}$

2) $H\triangleleft G \Longleftrightarrow \overline{H}\triangleleft\overline{G}$ 且此时有

$$G/H \cong \overline{G}/\overline{H} = (G/K)/(H/K).$$

证: 1) $\pi: G\longrightarrow G/K = \overline{G}$ 为自然同态. 由引理知: $\overline{H} = \pi(H)$ 为 $\overline{G}$ 的子群.

· π^* 为单射.
设 $\overline{H_1} = \overline{H_2}$ 即 $H_1/K = H_2/K$.

④ $\forall h_1 \in H_1,\ \exists h_2 \in H_2$ s.t. $h_1 K = h_2 K \Rightarrow h_2^{-1} h_1 \in K \subseteq H_2$

$\Rightarrow h_1 \in H_2 \Rightarrow H_1 \subseteq H_2$

同理 $H_2 \subseteq H_1$ $\therefore H_1 = H_2$

· π^* 为满射.

设 $\overline{H} \in \Omega(\overline{G})$ 由引理 $\pi^{-1}(\overline{H})$ 为 G 的子群且 $K \subseteq \pi^{-1}(\overline{H})$.

$\therefore \pi^{-1}(\overline{H}) \in \Omega(G, K)$ 易知: $\pi^*(\pi^{-1}(\overline{H})) = \overline{H}$.

2). ~~$\forall g \in G, h \in H$ 有 $gKhKg^{-1}K = ghg^{-1}K$~~

$\because H \lhd G \Rightarrow$ ~~$gKhKg^{-1}K$~~ $ghg^{-1} \in H \Rightarrow \forall g \in G, h \in H$
$\forall g \in G, \forall h \in H$

$gKhKg^{-1}K = ghg^{-1}K \in \overline{H} = H/K$

$\overline{H} \lhd \overline{G} \Rightarrow \forall g \in G, h \in H,\ \underset{\substack{\parallel \\ ghg^{-1}K}}{gKhKg^{-1}K} \in \overline{H} \Rightarrow ghg^{-1} \in H$
$\forall g \in G, h \in H$

$\Rightarrow H \lhd G$.

设 $H \lhd G$.

$\pi: G \longrightarrow G/K$ $\quad \overline{\pi}: G/K \longrightarrow \overline{G}/\overline{H}$

$\sigma = \overline{\pi} \circ \pi: \underset{g}{G} \longrightarrow \underset{gK\overline{H}}{\overline{G}/\overline{H}}$ 为群同态 且为满同态.

$\ker\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = \overline{H}\} = \{g \in G \mid gK\overline{H} = \overline{H}\}$

$= \{g \in G \mid gK \in \cancel{HK}\ \ldots\}$.

$= \{g \in G \mid g \in H\} = H$.

由同态基本定理: $G/H \cong \overline{G}/\overline{H} = (G/K)\big/(H/K)$

Date

例1：循环群的商群

$G=\langle g\rangle$. 定义 $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow G$ 群同态
$n \longrightarrow ng$

$\ker\varphi = n\mathbb{Z} \quad n\geq 0$

同态定理：$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong G$.

由§1.2定理3，子G的子群 $= \langle dg\rangle \cong d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad n=dm$

由定理4：$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

∴ 循环群的商群为循环群.

例2：S_4 的子群

$V_4=\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \triangleleft S_4$

$S_3=\{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. $\quad V_4\cap S_3=\{e\}$.

由定理3：$H/V_4 \cong S_3/(S_3\cap V_4) \cong S_3$.

∴ $|H|=|V_4||S_3|=24 \Rightarrow H=S_4$.

$\Omega(S_4, V_4)=\{V_4, \langle(12)\rangle V_4, \langle(13)\rangle V_4, \langle(23)\rangle V_4 \quad A_4, S_4\}$.

3. 换位子群

$x, y \in G$

$(x, y) := xyx^{-1}y^{-1}$ x,y换位子

$(x, y) = e \iff xy = yx$

$G' := \langle (x, y) \mid \forall x, y \in G \rangle$ 称为群G的换位子群(导出子群)

注: 1) 换位子的乘积不一定是换位子, 例: 自由群

2) $(x, y)^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = (y, x)$.

$\varphi: G \to \bar{G}$ 为群同态

$$\varphi((x, y)) = \varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}$$
$$= (\varphi(x), \varphi(y)) \in \bar{G}'$$

$\therefore \varphi(G') \subseteq \bar{G}'$

如果 φ 为满同态 $\varphi(G') = \bar{G}'$

设 $K \lhd G$ $\forall g \in G$ $I_g: K \to K$ 群自同构
$\qquad a \mapsto gag^{-1}$

$\therefore \forall g \in G, I_g(K') = K' \Rightarrow K' \lhd G$

特别地: $G' \lhd G$.

例3: $G = S_n$

$\forall \alpha, \beta \in S_n$ $(\alpha, \beta) \in A_n$ $\therefore S_n' \subseteq A_n$

另外: $(ij)(ik)(ij)^{-1}(ik)^{-1} = (ij)(ik)(ij)(ik) = (ijk) \in A_n$

由(BA I §4.2 习题11) $A_n = \langle \{(ijk) \mid i, j, k 互不相同\} \rangle$.

Date

$\because S_n' = A_n \quad S_n/S_n' = S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$.

定理5：$K \leq G$ 为子群，那么

1) 若 $G' \leq K$ 则 $K \lhd G$.

2) G/G' 为交换群

3) 若 $K \lhd G$ 且 G/K 为交换群 则 $G' \leq K$.

证：1) $\forall g \in G,\ a \in K.\ gag^{-1} = gag^{-1}a^{-1}a$

$= (g,a)a \in K \Rightarrow \forall g \in G,\ gKg^{-1} \subseteq K$

$\Rightarrow K \lhd G$.

2) $\forall x, y \in G$

$xG'yG' = xyG' = yx\,x^{-1}y^{-1}xy\,G'$

$= yx(x^{-1}, y^{-1})G' = yxG'$

$= yG'xG'$

3) $\pi: G \longrightarrow G/K$ 为自然同态 $\quad \ker\pi = K$.

$g \longrightarrow gK$

$\forall x, y \in G,\ \pi((x,y)) = \pi(xyx^{-1}y^{-1}) = \pi(x)\pi(y)\pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1} = 1$

$\Rightarrow \forall x, y \in G,\ (x,y) \in \ker\pi = K$

$\Rightarrow G' \leq K$

注：• $K \lhd G$ 且 G/K 交换 $\Rightarrow |G/K| \leq |G/G'|$.

• G 为交换群 $\Leftrightarrow G' = \{e\}$

Date

设G非交换则 $G/Z(G)$ 不是循环群

证：设 $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle$ 则 $G = \bigcup_i g^i Z(G)$

$\forall\ g_1, g_2 \in G\ \exists\ i_1, i_2 \in \mathbb{Z},\ z_1, z_2 \in Z(G)$ s.t

$g_1 = g^{i_1} z_1 \quad g_2 = g^{i_2} z_2$

$g_1 g_2 = g^{i_1} z_1 g^{i_2} z_2 = g^{i_1+i_2} z_1 z_2 = g^{i_1+i_2} z_2 z_1 = g^{i_2} z_2 g^{i_1} z_1$

$= g_2 g_1$ 矛盾 □

4. 群的积

$G_1, G_2, \cdots G_n$ 为群

令 $G = \prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n := \{(a_1, \cdots, a_n) \mid a_i \in G_i\}$

定义运算 $G \times G \longrightarrow G$

$((a_1, \cdots a_n), (b_1, \cdots b_n)) \longrightarrow (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n)$

单位元：$(1, \cdots, 1)$

逆元：$(a_1^{-1}, \cdots a_n^{-1})$

G在该运算下构成群 称G为 $G_1, \cdots, G_n$ 的(外)直积

性质：1) $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

2) $A \times B \cong B \times A$

定义1：设 $A \trianglelefteq G,\ B \trianglelefteq G$ 如果 $A \cap B = \{1\}$ 且 $G = AB$ 则称 G为子群A与B的(内)直积

引理：设 $A \trianglelefteq G,\ B \trianglelefteq G$ 且 $A \cap B = \{1\}$ 则 $\forall\ a \in A\ \ b \in B,\ ab = ba$

证：$aba^{-1}b^{-1} \in A \cap B = \{1\} \Rightarrow aba^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow ab = ba$.

定理6：设G为子群A与B的(内)直积 则 $G \cong A \times B$.

证：定义 $\varphi: A\times B \to G$

$(a,b) \mapsto ab$

φ 为同态：$\varphi((a_1,b_1)(a_2,b_2)) = \varphi((a_1a_2, b_1b_2)) = a_1a_2b_1b_2$

$= a_1b_1a_2b_2 = \varphi((a_1,b_1))\varphi((a_2,b_2))$

φ 为单射：$\varphi((a,b)) = ab = 1 \Rightarrow a = b^{-1} \in A\cap B = \{1\}$

$\Rightarrow a=1,\ b=1$

φ 为满射：$G=AB$. □

注：1) 设 $G = A\times B$. 令 $G_1 = A\times\{1\}$, $G_2 = \{1\}\times B$

则 $G_1 \lhd G$, $G_2 \lhd G$, $G_1\cap G_2 = \{1\}$ 且 $G = G_1G_2$

从而 G 是 G_1 与 G_2 的内直积. ($G_1 \cong A$, $G_2 \cong B$).

2) 定义1的推广：设 $G_i \lhd G$, $i=1,\cdots,n$. 如果

$G = G_1\cdots G_n$ 且 $\forall j=1,\cdots,n$. $G_j \cap G_1\cdots\hat{G_j}\cdots G_n = \{1\}$

则称 G 为 $G_1,\cdots G_n$ 的内直积. 此时 $G \cong G_1\times\cdots\times G_n$.

~~反之. 若 $G \cong H_1\times\cdots\times H_n$ 则 对 $i=1,\cdots,n$ $\exists$ $G_i \lhd G$ s.t.~~

~~$G_i \cong H_i$. $G = G_1\cdots G_n$ 且 $G_j \cap G_1\cdots\hat{G_j}\cdots G_n = \{1\}$.~~

反之. 若 $G \cong H_1\times\cdots\times H_n$ 则 $\forall i=1,\cdots,n$. $\exists$ $G_i \lhd G$

s.t. $G_i \cong H_i$. 并且 G 为 $G_1,\cdots G_n$ 的内直积.

定义2：设 $A \lhd G$, $B \leq G$ 为子群 若 $A\cap B = \{1\}$ 且 $G = AB$

则称 G 为子群 A 与 B 的半直积，记作 $G = A\rtimes B$.

(外)半直积：A, B 为群．$\varphi: B \to S(A)$ 为群同态．$b \to \varphi_b$

~~A×B~~ 定义运算：$(A\times B)\times(A\times B) \longrightarrow A\times B$

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \longrightarrow (a_1\varphi_{b_1}(a_2), b_1b_2).$$

验证该运算使 $A\times B$ 构成群 记作 $A\rtimes_\varphi B$

令 $G_1 = A\times\{1\}$．$G_2 = \{1\}\times B$ ~~φ: B → S(A)~~

则 $G_1 \lhd A\rtimes_\varphi B$．$G_1\cap G_2 = \{1\}$ 且 $A\rtimes_\varphi B = G_1G_2$．

定理7：设 $G = A\times B$ 且 $A_1 \lhd A$, $B_1\lhd B$ 则 $A_1\times B_1 \lhd G$ 且

$$G/(A_1\times B_1) \cong (A/A_1)\times(B/B_1).$$

例：$S_n = A_n \rtimes \langle(12)\rangle$．

5：生成元与定义关系．

定义：群F是自由的，如果 $\exists\, A\subseteq F$ 满足：对于 $\forall$ 群 G 及 $\forall$ 映射 $f: A\to G$，$\exists!$ 群同态 $\varphi: F\to G$ s.t. $\varphi(a) = f(a)$ $\forall a\in A$．

~~命题：任~~ 此时称A为F的基，$|A|$ 为F的秩．

命题1：任给集合S，存在自由群F及单射 $\sigma: S\to F$ s.t. $\mathrm{Im}\,\sigma$ 为F的基．

命题2，群G为自由群的同态像．

证：设~~S为G~~设 $G = \langle S\rangle$．（S可取为G）．

由命题1：$\exists$ F自由群 及单射$\sigma: F\to G$ s.t $\sigma(S)$为F的基

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "="'] & \underset{\text{基}}{\sigma(S)} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\sigma^{-1}"] & F \arrow[dl, "\exists!\varphi"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

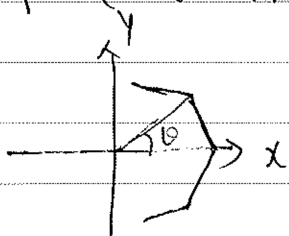
$\because$ $\varphi(\sigma(S)) = S$ $\therefore$ φ为满同态

$$\begin{array}{ccc}
\varphi: F & \xrightarrow{\varphi} & G \quad \text{满同态} \\
\cup\!| & & \cup\!| \\
\text{基 } A & \xrightarrow{1:1} & S \sim \text{生成元集}
\end{array}$$

设 $R\subseteq F$ s.t $\bigcap\limits_{\substack{R\subseteq H\trianglelefteq F \\ \text{正规子群}}} H = \ker\varphi$

称G为由生成元S及关系$\{r(S)=1 \mid r\in R\}$所确定的群. 记作 $G=\langle S \mid r(S)=1, r\in R\rangle$

例. (二面体群) $D_n = \{P_n\text{的对称变换}\}$.



$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \theta = \frac{2\pi}{n}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = 1,\ B^2 = 1 \quad ABAB = 1$$

$$D_n = \{1, A, \dots, A^{n-1}, B, AB, \dots, A^{n-1}B\}.$$

令F_2 ~~为~~ $\langle a, b\rangle$ 为秩等于2的自由群.

$$\varphi: F_2 \longrightarrow D_n$$
$$a \longrightarrow A \qquad K = \ker\varphi$$
$$b \longrightarrow B \qquad 则\ a^n,\ b^2\ (ab)^2 \in K$$

令 $H = \langle a^n, b^2, (ab)^2 \rangle_{nor}$ 生成的正规子群.

$$abab \in H \Rightarrow bab \in a^{n-1}H = a^{n-1}H \Rightarrow ba \in a^{n-1}Hb^{-1}$$
$$a^{n-1}bH = a^{n-1}b^{-1}H$$

$\therefore \forall g \in F_2.\quad gH = a^i b^j H \quad 0 \le i \le n-1,\ 0 \le j \le 1$

$\therefore \left|F_2/H\right| \le 2n \Rightarrow H = \ker\varphi$

$\therefore D_n \cong \langle a, b \mid a^n = 1,\ b^2 = 1\ (ab)^2 = 1 \rangle.$

例2:(四元数群)

$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} = \langle i, j \rangle.$

$$i^4 = 1,\quad j^2 = -1 = i^2,\quad ijij^{-1} = 1$$

$F_2 = \langle a, b \rangle$ 自由群.

$$\varphi: F_2 \longrightarrow \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$
$$a \longrightarrow i$$
$$b \longrightarrow j$$

$\ker\varphi = \langle a, b \mid a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ abab^{-1} = 1 \rangle$