

2018.9.20

Date

I 为集合, $G_\alpha, \alpha \in I$ 为群.

$$\text{直积: } G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \quad (a_\alpha)_{\alpha \in I} (b_\alpha)_{\alpha \in I} = (a_\alpha b_\alpha)_{\alpha \in I}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $G \qquad \qquad G$

直和 (常用于交换群), 记作 $\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha$

$$\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha = \left\{ (a_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \mid \text{仅有有限个 } a_\alpha \neq 0_\alpha \right\}$$

$$\text{例: } \mathbb{Q}[x] \cong \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Q}x^i$$

$$\mathbb{Q}[[x]] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \mid c_i \in \mathbb{Q} \right\} \cong \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Q}x^i$$

注: 1) 直和为直积的子群

2) 当 $|I| < +\infty$ 时, 直和与直积相等.

$G = \langle S \rangle$ F 自由群 A 为基.

$\pi: F \twoheadrightarrow G$ 满同态

$\pi|_A: A \xrightarrow{\text{双射}} S$ 双射.

$$R \subseteq F \text{ s.t. } \langle R \rangle_{\text{nor}} = \text{Ker } \pi$$

则称 G 为由 S 与 $r(s)=1, r \in R$ 所确定的群

记作 $G = \langle S \mid r(s)=1, r \in R \rangle$.

$$\text{例: } D_n \cong \langle a, b \mid a^n=1, b^2=1, abab=1 \rangle$$

$$\text{令 } g_1=ab, g_2=b \text{ 则 } D_n \cong \langle g_1, g_2 \mid g_1^2=1, g_2^2=1, (g_1 g_2)^n=1 \rangle$$

$$D_\infty \cong \langle a, b \mid a^2=1, b^2=1 \rangle \quad g_1=b, g_2=ab^{-1}$$

$$\cong \langle g_1, g_2 \mid g_1^2=1, g_2 g_1 g_2 g_1=1 \rangle$$

$$2) Q_8 = \langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = 1, abab^{-1} = 1 \rangle \text{ 则}$$

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \cong Q_8.$$

第二章 群的结构

§1. 可解群与单群

$$G \text{ 为群 } x, y \in G \quad (x, y) = xyx^{-1}y^{-1} \quad x \text{ 与 } y \text{ 换位子}$$

$$\text{换位子群: } G' = \langle \{ (x, y) \mid \forall x, y \in G \} \rangle.$$

$$G' \trianglelefteq G, \quad G/G' \text{ 是交换群. } \varphi: G \rightarrow \bar{G} \text{ 为满同态, 则 } \varphi(G') = \bar{G}'.$$

$$\text{对于 } i=1, 2, \dots \quad \text{记 } G^{(i)} = (G^{(i-1)})', \text{ 其中 } G^{(0)} = G.$$

称为第 i 个换位子群

$$\text{则: } G \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright \dots$$

称为导出列

$$\text{定义: } G \text{ 称为可解的, 如果 } \exists m \geq 0 \text{ s.t. } G^{(m)} = \{1\}.$$

(此时最小的 m 称为 G 的可解步长)

例. 1) 交换群是可解的, 其步长为 1.

$$2) S_4' = A_4, \quad A_4' = V_4, \quad V_4' = \{1\}.$$

S_4 的步长为 3, A_4 为 2.

$$3) T = \left\{ A \in GL_n(F) \mid a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \right\}.$$

$$T' = \left\{ (a_{ij}) \in T \mid a_{ii} = 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n \right\}.$$

$$T^{(2)} = \left\{ (a_{ij}) \in T' \mid a_{i, i+1} = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

$$T^{(n+1)} = \{I_n\}.$$

4) $n \geq 5$. $A_n' = A_n$ A_n 不是可解群.

$K, H \leq G$ 为子群 记 $(K, H) := \langle \{ (a, h) \mid \forall a \in K, h \in H \} \rangle$
 $aha^{-1}h^{-1}$

若 $K \triangleleft G, H \triangleleft G$ 则 $(K, H) \triangleleft G$. (易验证)

记 $G_1 = G, G_2 = G', G_{i+1} = (G_i, G) \quad i=2, 3, \dots$

则 $G = G_1 \triangleright G_2 \triangleright G_3 \triangleright \dots$ 称为中心列.

定义: 群 G 称为幂零的. 如果 $\exists m > 0$ s.t. $G_m = \{1\}$.

例: T' 为幂零群.

引理: 设 G 为可解群. 则

1) $H \leq G$ 为子群 则 H 可解.

2) $\varphi: G \rightarrow \bar{G}$ 为群同态, 则 $\text{Im } \varphi$ 可解.

证: 1) 易知: $H^{(i)} \leq G^{(i)} \quad i=1, 2, \dots$

$\therefore G$ 可解 $\Rightarrow H$ 可解.

2) 令 $H = \text{Im } \varphi$. 则 $\varphi: G \rightarrow H$ 为满同态.

$\therefore \varphi(G^{(i)}) = H^{(i)} \quad \varphi(G^{(i)}) = H^{(i)} \quad i=2, 3, \dots$

$\therefore G$ 可解 $\Rightarrow H$ 可解.

定理1: 设 $K \triangleleft G$. 则 G 可解 $\Leftrightarrow K$ 与 G/K 均可解.

证: 考虑 $\pi: G \rightarrow \bar{G} = G/K$ 自然同态.

($\Rightarrow$) 由引理1知: K 及 $\bar{G} = \pi(G)$ 均可解.

($\Leftarrow$) 设 G 的可解步长为 s , $K \triangleleft G$ 可解步长为 t . 则

$$\pi(G^{(s)}) = \bar{G}^{(s)} = \{1\} \Rightarrow G^{(s)} \subseteq K$$

$$K^{(t)} = \{1\} \Rightarrow G^{(s+t)} = \{1\} \Rightarrow G \text{ 可解.}$$

推论: 设 $K_1 \triangleleft G$, $K_2 \triangleleft G$ 且 K_1, K_2 均可解. 则 $K_1 K_2 \triangleleft G$ 且 $K_1 K_2$ 可解.

$$\text{证: } \forall g \in G, a_1 \in K_1, a_2 \in K_2, g a_1 a_2 g^{-1} = g a_1 g^{-1} g a_2 g^{-1} \in K_1 K_2$$

$$\therefore g K_1 K_2 g^{-1} \subseteq K_1 K_2 \quad \forall g \in G \Rightarrow K_1 K_2 \triangleleft G.$$

$$\text{由第一同构定理: } K_1 K_2 / K_2 \cong K_1 / (K_1 \cap K_2)$$

由定理1, $K_1 / (K_1 \cap K_2)$ 可解. 再由引理, $K_1 K_2 / K_2$ 可解.

$\because K_2$ 可解 $\therefore K_1 K_2$ 可解.

设 $|G| < +\infty$ 且 $H_1, \dots, H_s$ 为 G 的所有可解正规子群.

则 $F(G) := H_1 H_2 \dots H_s$ 为 G 的^{可解}最大正规子群, 称为可解根 (Solvable radical).

注: 引理与推论对于幂零情形成立, 但是定理1不成立.

2. 单群:

定义: 群 G 称为单的, 如果它所有正规子群为 $\{1\}$ 与 G .

引理: 群 G 的任一正规子群 K 是 G 的一些共轭元素类集合的并.

定理2: 设 $n \geq 5$, 则 A_n 是单群.

回顾: $\sigma \in S_n$, $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$

$$\langle \sigma \rangle \times \Omega \rightarrow \Omega$$

$$(\sigma^j, i) \rightarrow \sigma^j(i)$$

$$\Omega = \underbrace{\Omega_1}_{\Omega_1} \cup \dots \cup \underbrace{\Omega_s}_{\Omega_s} \quad \text{轨道分解}$$

设 $m_i = |\Omega_i|$ $i=1, \dots, s$.

$$\text{则 } \sigma = (i_1 \sigma(i_1) \dots \sigma^{m_1-1}(i_1)) (i_2 \sigma(i_2) \dots \sigma^{m_2-1}(i_2)) \dots (i_s \sigma(i_s) \dots \sigma^{m_s-1}(i_s)) \text{ 不相交循环分解}$$

证: 设 $K \trianglelefteq A_n$ 且 $K \neq \{1\}$. $\forall \sigma \in A_n \setminus \{1\}$ 记

$$N(\sigma) = |\{i \in \Omega \mid \sigma(i) = i\}|$$

$$\text{令 } m = \max \{N(\sigma) \mid \sigma \in K \setminus \{1\}\}.$$

设 $\pi \in K$ s.t. $m = N(\pi)$.

我们将证明 $m = n-3$.

$$1) m = n \text{ 或 } n-1 \Rightarrow m = n \Rightarrow \pi = 1 \quad \times$$

$$2) m = n-2 \Rightarrow \pi = (ij) \notin A_n \quad \times$$

$$\therefore m \leq n-3.$$

$$3) m = n-4 \Rightarrow \pi = (ijkl) \text{ 或 } (ij)(kl)$$

$\because (ijkl) \notin A_n \therefore \pi = (ij)(kl)$. 取 $u \in \Omega \setminus \{i, j, k, l\}$

$$\begin{aligned} \text{则 } \tilde{\pi} &\triangleq \pi(iju)\pi^{-1}(iju)^{-1} = \pi(iju)\pi^{-1}(iuj) \\ &= (iju) \in K \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

$$\text{但 } N(\tilde{\pi}) = n-3 \quad \text{矛盾} \quad \times$$

4) $m \leq n-5$. 设 $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_s$ 不相交的循环分解

i) $s=1$. 设 $\pi_1 = (ijkuv\dots)$

$$\begin{aligned}\text{令 } \tilde{\pi} &= \pi_1(jku) \pi_1^{-1}(jku)^{-1} \\ &= \pi_1(jku) \pi_1^{-1}(juk) = (jvk) \in K \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

但 $N(\tilde{\pi}) = n-3$ 矛盾.

ii) $s \geq 2$. 且 $\pi_1, \dots, \pi_s$ 中存在对换. 不妨设 $\pi_1 = (ij)$, $\pi_2 = (kl\dots)$

$$\begin{aligned}\text{令 } \tilde{\pi} &= \pi_1(ijk) \pi_1^{-1}(ijk)^{-1} \\ &= (ij)(kl\dots)(ijk)(ij)(kl\dots)^{-1}(ikj) \\ &= (ik)(jl) \in K \setminus \{1\}\end{aligned}$$

$N(\tilde{\pi}) = n-4$ 矛盾

iii) $s \geq 2$ 且 $\pi_1, \dots, \pi_s$ 长度均 ≥ 3 . 设 $\pi_1 = (ijk\dots)$, $\pi_2 = (uvw\dots)$

$$\begin{aligned}\text{令 } \tilde{\pi} &= \pi_1(kuv) \pi_1^{-1}(kuv)^{-1} \\ &= (ijk\dots)(uvw\dots)(kuv)(ijk\dots)^{-1}(uvw\dots)^{-1}(kvu) \\ &= (kw\dots) \in K \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

但 $\forall l \in \{i \in \mathbb{Z} \mid \pi(i) = i\}$ 有 $\tilde{\pi}(l) = l$

且 $\tilde{\pi}(j) = j \quad \therefore N(\tilde{\pi}) \geq m+1$ 矛盾.

综上. $m = n-3$. 即 $\pi = (ijk) \in K$.

由此 $\forall u, v, w \in \mathbb{Z}$ ~~不相等~~ u, v, w 互不相等有 $(uvw) \in K$.

$$((ij)(ku)(ijk)(ij)(ku) = (iju))$$

所有 3-循环生成 A_n . $\therefore K = A_n$.

定理3: $SU(2)$ 是单群.

证: 由第二同构定理, 仅需证若 $K \triangleleft SU(2)$ 且 $\{\pm E\} \subseteq K$ 则

$K = SU(2)$. 设 $g \in K$ 且 $g \neq \pm E$. $\exists h \in SU(2)$ s.t.

$$hgh^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \in K \quad \text{其中 } \varphi \neq 0 \text{ 且 } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

若 $\varphi > \pi$ ~~$\begin{pmatrix} e^{i(\varphi-\pi)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\varphi-\pi)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \in K$~~ 故可设 $\varphi \leq \pi$

~~进一步若 $\varphi > \frac{\pi}{2}$ $\begin{pmatrix} e^{i(\pi-\varphi)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\pi-\varphi)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \in K$~~

~~若 $\varphi > \pi$ 则~~ $\begin{pmatrix} e^{i(\varphi-\pi)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\varphi-\pi)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \in K$

$\therefore$ 可设 $\varphi \leq \pi$.

进一步若 $\varphi > \frac{\pi}{2}$, 则 $\begin{pmatrix} e^{i(\pi-\varphi)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\pi-\varphi)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}^{-1} \in K$

$\therefore$ 可设 $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\forall \tilde{g} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \in K \quad \text{考虑 } (d\varphi, \tilde{g}) = d\varphi \tilde{g} d\varphi^{-1} \tilde{g} \in K$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{2i\varphi} & 2\beta(e^{2i\varphi} - 1) \\ 2\bar{\beta}(1 - e^{-2i\varphi}) & |\alpha|^2 + |\beta|^2 e^{-2i\varphi} \end{pmatrix}$$

$(d\varphi, \tilde{g})$ 的特征方程为: $\lambda^2 + (4|\beta|^2 \sin^2 \varphi - 2)\lambda + 1 = 0$

$\exists \tilde{h} \in SU(2)$ s.t. $\tilde{h}(d\varphi, \tilde{g})\tilde{h}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \bar{\gamma} \end{pmatrix} \in K$.

其中 $\gamma, \bar{\gamma}$ 为方程: $\lambda^2 + (4|\beta|^2 \sin^2 \varphi - 2)\lambda + 1 = 0$ 的根.

Date

$\therefore |\beta|$ 取遍区间 $[0, 1]$. 即 $-2 \leq 4|\beta|^2 \sin^2 \varphi - 2 \leq 4 \sin^2 \varphi - 2$

$\therefore 0 \leq \arg P \leq 2\varphi$.

$\forall \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2) \quad \exists n \text{ s.t. } 0 \leq \frac{\arg P}{n} \leq 2\varphi$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha \bar{\alpha} = 1 \right\} \subseteq K \quad \therefore K = SU(2) \quad \square$

定理4: 设 F 是域且 $|F| > 3$. 则 $PSL_2(F)$ 是单群.