

表示论基础

回顾群作用: G 为群, Ω 为集合.

映射: $G \times \Omega \longrightarrow \Omega$ 满足: 1) $1 \cdot v = v \quad \forall v \in \Omega$ (酉性)
 $(g, v) \xrightarrow{v} gv \quad 2) (g_1 g_2) \cdot v = g_1(g_2 \cdot v)$

到: $\Omega \longrightarrow \Omega$ 为双射 且 $\varphi: G \longrightarrow S(\Omega) = \{\Omega \rightarrow \Omega \text{ 双射}\}$ 为群同态.
 $v \xrightarrow{v} gv \quad g \xrightarrow{v} \varphi(g)$

反之设 $\varphi: G \longrightarrow S(\Omega)$ 为群同态. 则 $G \times \Omega \longrightarrow \Omega$ 为一个群作用.
 $(g, v) \xrightarrow{v} \varphi(g)(v)$

φ 称为 G 到 Ω 的一个表示.

例: $f \in F[X] \setminus F$, $\text{Gal}(f)$ 在 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 上作用诱导 $\text{Gal}(f)$ 到 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 的一个表示.

假设 $\Omega = V$ 为 F -向量空间

$G \times V \longrightarrow V$ 满足: $g \cdot (u+v) = g \cdot u + g \cdot v, \quad g(\lambda u) = \lambda g \cdot u$
 $(g, v) \xrightarrow{v} g \cdot v \quad 1 \cdot u = u, \quad (g_1 g_2) \cdot u = g_1(g_2 \cdot u)$

则有: $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$ 为群同态, 称 φ 为 G 到 V 的一个线性表示

$GL(V) := \{V \text{ 上的可逆线性算子}\} \subset S(V)$.

例: 1) $G = GL(V)$, $\varphi = \text{id}_G$ 称为标准表示.

2) $G = SO(2)$, $\Delta(f) := \frac{\partial^2(f)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f)}{\partial y^2}$

$V_m = \left\{ \sum_{i=0}^m c_i x^i y^{m-i} \mid c_i \in \mathbb{R} \right\}$ 为 $m+1$ 维 $\mathbb{R}$ -向量空间

$H_m = \{f \in V_m \mid \Delta(f) = 0\}$

$\forall g = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2), \quad f \in V_m, \quad g \cdot f := f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$

为 $SO(2)$ 在 V_m 上的一个作用.

事实上, $\forall f \in H_m, \quad g \cdot f \in H_m, \quad \therefore SO(2)$ 作用在 H_m 上.

从而诱导 $SO(2)$ 在 H_m 上的一个线性表示.

定义: 设 G 为群, 任意同态 $\varphi: G \longrightarrow GL(V)$ 称为 G 到 V 的一个线性表示.

V 称为表示空间 (或 G -空间, G -模), 线性表示用 (φ, V) 表示 (或简记为 φ)

当 $\ker \pi = \{1\}$ 称表示是忠实的, 当 $\pi(G) = \{1\}$ 称表示是平凡的

$\dim_F V$ 称为表示的维数, 当 $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 时分别称 π 为 G 的有理表示, 实表示和复表示.

设 V 为 n 维欧氏特征空间, (π, V) 为 G 的线性表示, 若 $\pi(G) \subseteq U(n)$ 则称 (π, V) 为酉表示.

设 $\dim_F V = n$, $\{v_i\}$ 为一组基, 则该基下 $V \cong F^n$, $GL(V)$ 可用 $GL_n(F)$ 来表示

$\pi_g := \pi(g)$ 在该基下的矩阵表示 即 $\pi(g)(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_n) \pi_g$, $\pi_g \in GL_n(F)$

$\pi: G \rightarrow GL(V)$ 群同态 $\Leftrightarrow \pi: G \rightarrow GL_n(F)$ 为群同态
 $g \mapsto \pi(g)$ $g \mapsto \pi_g$

线性代数: 一个算子作用于 V

表示论: 有群结构的算子集作用于 V .

定义 2: 设 (π, V) 为 G 的线性表示, 子空间 $U \subset V$ 称为 G 不变的 (或稳定的)

若 $\forall g \in G, u \in U, gu \in U$. 显然零子空间与 V 均是 G 不变的.

称为平凡的 G -不变子空间.

例: $F = \mathbb{C}$, $\dim_F V \geq 2$, $G = \langle \varphi \rangle$, $\varphi \in GL(V)$.

$\pi: G \rightarrow GL(V)$ 为 G 到 V 的线性表示
 $g \mapsto g$

$\because \mathbb{C}$ 代数闭 $\therefore \varphi$ 存在特征值 λ , 令 v_1 为 φ 对应于 λ 的一个特征向量

则 $V_1 = \mathbb{C}v_1$ 为 G 不变空间

线性表示的构造: (π, V) 为 G 的线性表示.

1) 子表示: 设 $U \subset V$ 为 G 不变的 则 $\forall g \in G, \pi(g)|_U \in GL(U)$

$\therefore \pi^U: G \rightarrow GL(U)$ 为 G 到 U 的一个表示 称为 (π, V) 的子表示
 $g \mapsto \pi(g)|_U$

2) (外直和): $(\pi_1, V_1), (\pi_2, V_2), \dots, (\pi_n, V_n)$ 为 G 的线性表示.

令 $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ 为直和. $\forall g \in G$,

定义 $\pi(g): V \rightarrow V$

则 $\pi(g) \in GL(V)$

$(v_1, \dots, v_n) \mapsto (\pi_1(g)(v_1), \dots, \pi_n(g)(v_n))$

从而 $\pi: G \rightarrow GL(V)$ 为 G 到 V 的表示. 称为 (π, V) 的直和.

记为 $\pi = (\pi_1, V_1) \oplus \dots \oplus (\pi_n, V_n)$ (或简记为 $\pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_n$)

(内直和: 设 $(\pi_1, V_1), \dots, (\pi_n, V_n)$ 为 (π, V) 的子表示且 $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$

则称 (π, V) 为 $(\pi_1, V_1), \dots, (\pi_n, V_n)$ 的内直和.

同样记为 $\pi = (\pi_1, V_1) \oplus \dots \oplus (\pi_n, V_n)$.

3) 同态: $(\pi, V), (\psi, W)$ 为 G 的两个表示, 线性映射 $\sigma: V \rightarrow W$ 称为 π 到 ψ 的同态.

若 $\forall g \in G$ 有: $\sigma \cdot \pi(g) = \psi(g) \cdot \sigma$ i.e

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi(g)} & V \\ \sigma \downarrow & \cong & \downarrow \psi(g) \\ V & \xrightarrow{\pi(g)} & V \end{array}$$

当 σ 为同构时, 则称 (π, V) 与 (ψ, W) 是等价 (或同构), 记为 $\pi \cong \psi$.

4) 商表示, 表示的张量积, ...

注: 设 (π, V) 为 G 的线性表示. $\sigma: V \rightarrow W$ 为线性同构.

$$\forall \rho \in GL(V), \text{ 有 } \sigma \cdot \rho \cdot \sigma^{-1} \in GL(W) \therefore \pi^\sigma: G \rightarrow GL(W)$$

$$g \mapsto \sigma \pi(g) \sigma^{-1}$$

为 G 到 W 的线性表示, 且 (π, V) 与 (π^σ, W) 是等价 (或同构) $(\sigma \pi(g) = \pi^\sigma(g) \sigma)$

$\therefore \pi \cong \psi \iff \pi^\sigma \cong \psi$ 此时 π^σ 与 ψ 有相同表示空间.

2) 设 $\sigma: V \rightarrow W$ 为 (π, V) 到 (ψ, W) 的一个同态, 记 $V_0 = \ker \sigma, W_0 = \operatorname{Im} \sigma$.

$$\forall v \in V_0, g \in G, \sigma \pi(g)v = \psi(g)\sigma v = 0 \Rightarrow \pi(g)v \in V_0$$

$\therefore (\pi|_{V_0}, V_0)$ 为 (π, V) 的子表示

$$\forall g \in G, w \in W_0, \text{ 则 } w = \sigma(v), v \in V. \psi(g)w = \psi(g)\sigma(v) = \sigma \pi(g)v \in W_0$$

$\therefore (\psi|_{W_0}, W_0)$ 为 (ψ, W) 的子表示.

矩阵形式: 令 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 为 V 的一组基. π_g 表示 $\pi(g)$ 在该基下的表示矩阵.

1) 设 $\{v_1, \dots, v_s\}$ 为 G 不变子空间 U 的一组基. 则 $\forall g \in G$

$$\pi_g = \begin{pmatrix} \pi'_g & \widetilde{\pi}_g \\ 0 & \pi''_g \end{pmatrix} \text{ 其中 } \pi'_g \in GL_s(F), \pi''_g \in GL_{n-s}(F)$$

$$\bar{\pi}_g = \begin{pmatrix} \pi_g & \pi'_g \\ 0 & \pi''_g \end{pmatrix} \text{ 其中 } \pi_g \in GL_s(F), \pi'_g \in GL_{n-s}(F)$$

此时 π'_g 表示 $\pi|_U(g)$ 在 $\{v_1, \dots, v_s\}$ 下的矩阵表示

若 $\pi_g = 0, \forall g \in G$, 则 $\tilde{V} = \{\sum_{i=1}^n c_i v_i \mid c_i \in F\}$ 为 G 不变的

$$\text{且 } (\pi, V) = \pi^U \oplus \pi^{\tilde{V}}$$

2) 设 (π, V) 与 (ψ, W) 为 G 表示, 且 $\pi \cong \psi$, σ 为同构映射.

设 $\{w_1, \dots, w_n\}$ 为 W 的一组基, $\{v_1, \dots, v_n\}$ 为 V 的基.

C 为 σ 在这两组基下的表示矩阵 i.e.

$$\sigma((v_1, \dots, v_n)) = (w_1, \dots, w_n) C$$

$\forall g \in G$.

$$\sigma \cdot \pi(g)(v_1, \dots, v_n) = \sigma((v_1, \dots, v_n)) \pi_g = (w_1, \dots, w_n) C \pi_g$$

$$\stackrel{||}{=} \psi(g) \sigma((v_1, \dots, v_n)) = \psi(g)((w_1, \dots, w_n) C) = (w_1, \dots, w_n) \psi_g C$$

$$\Rightarrow \psi_g = C \pi_g C^{-1}$$

π^U 与 $\pi^{\tilde{V}}$ 为 (π, V) 的两个子表示, 称为平凡子表示.

定义 3.1) (π, V) 称为不可约的, 若它没有非平凡子表示 ($\Leftrightarrow V$ 没有非平凡的 G 不变子空间)

(π, V) 是可约的 $\Leftrightarrow \exists V' \subset V$ s.t. 在这组基下, $\forall g \in G$

$$\bar{\pi}_g = \begin{pmatrix} \pi'_g & \tilde{\pi}'_g \\ 0 & \pi''_g \end{pmatrix} \quad \pi'_g \in GL_s(F), \pi''_g \in GL_{n-s}(F) \\ 0 < s < n$$

2) (π, V) 称为不可分的, 若它不是两个非平凡子表示的直和.

(V 称为不可分的 G -空间)

(π, V) 是可分的 $\Leftrightarrow \exists V' \subset V$ s.t. $\forall g \in G$

$$\bar{\pi}_g = \begin{pmatrix} \pi'_g & 0 \\ 0 & \pi''_g \end{pmatrix}$$

3) (π, V) 是完全可约的, 若它是一些不可约子表示的直和.

(V 称为完全可约的 G -空间)

注: 不可约 $\Rightarrow$ 不可分

⇒ 完全可约.

例: 1) 设 $\dim_F V = 1$, 则 $GL(V)$ 是交换群

∴ (π, V) 与 (ψ, V) 为两个等价表示 $\Leftrightarrow \pi = \psi$

2) 设 $G = \langle g \rangle$ 为循环群

i) (π, V) 为 G 之复表示, 若 $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$ 则 (π, V) 是可约的.

设 v_1 为 $\pi(g)$ 之某个特征向量, $V_1 = \mathbb{C}v_1$ 则 $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = 1$ 且 V_1 是 G 不变的.

∴ $(\pi|_{V_1}, V_1)$ 为 (π, V) 之子表示.

ii) G 有忠实 $\mathbb{C}$ -维复表示

$$a) G = (\mathbb{Z}, +), \quad \begin{array}{ccc} \pi: G & \longrightarrow & U(\mathbb{C}) \\ k & \longrightarrow & \lambda^k \end{array} \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

则 π 是忠实的 $\Leftrightarrow \ker \pi = \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ 不是单位根

b) $G = \langle g \rangle, |\langle g \rangle| = n, \quad \zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ n 次本原根. 对于 $m = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\pi^{(m)}: G \longrightarrow \langle \zeta \rangle \\ k \longrightarrow \zeta^{mk} \quad \text{为 } G \text{ 之 } \mathbb{C} \text{-维复表示.}$$

$\pi^{(m)}$ 是忠实的 $\Leftrightarrow \ker \pi^{(m)} = \{0\} \Leftrightarrow \gcd(m, n) = 1$

∴ G 恰如有 $\phi(n)$ 个忠实 $\mathbb{C}$ -维复表示.

进一步, $\pi^{(0)}, \dots, \pi^{(n-1)}$ 为 G 之所有两两不等价不可约复表示.

(由 i) 知 G 之不可约复表示只能是一维的 ∴ 只能为某个 $\pi^{(s)}$)

$$\because \pi(g)^n = E. \quad \therefore \exists C \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } \pi(g) = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1} \quad \lambda_i^n = 1.$$

$$\therefore \pi(g^k) = C \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} C^{-1} \quad \therefore G \text{ 之复表示是完全可约的}$$

3) $G = (\mathbb{Z}, +), \quad \forall m > 0.$

$$\text{定义: } \pi: G \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$$

$$k \longrightarrow J_{m,1}^k := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^k$$

∴ $J_{m,1}$ 之极小多项式为 $(x-1)^m$ ∴ (π, V) 为 G 之 m 维不可分复表示.

4) G 表示性质与域 F 密切相关.

$G = \langle g \rangle$, $|\langle g \rangle| = p$ 为素数 $\dim_F V = 2$, v_1, v_2 为 V 的基.

a) $\text{char } F = p$.

$$\text{定义: } \bar{\pi}(g): V \longrightarrow V \\ \begin{aligned} v_1 &\longrightarrow v_1 \\ v_2 &\longrightarrow v_1 + v_2 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \bar{\pi}_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 从而 } \bar{\pi}_{g^k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \leq k \leq p-1.$$

则 $(\bar{\pi}, V)$ 是可约的, 但不是可分的.

b) 令 $p = 3$, $F = \mathbb{R}$. 定义: $\pi(g): V \longrightarrow V$

$$\begin{aligned} v_1 &\longrightarrow -v_1 + v_2 \\ v_2 &\longrightarrow -v_1 \end{aligned}$$

$$\text{即 } \pi_g = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 则 } \pi_g^3 = E.$$

特征多项式为 $X^2 + X + 1$ 无实根. $\therefore (\pi, V)$ 是不可约的.

(否则设 $V_1 = \mathbb{R}v$ 为 G 不变子空间 则 $\pi_g v = \lambda v, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda$ 为 π_g 的特征值)

另一方面 若 $F = \mathbb{C}$ 则 $X^2 + X + 1$ 有两个相异的根 λ_1, λ_2

$$\therefore \exists C \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ s.t. } \pi_g = C \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \end{pmatrix} C^{-1}$$

$\therefore (\pi, V)$ 是可分的.

定理1: 设 G 为有限群, (π, V) 为 G 的复表示 则 (π, V) 等价于一个酉表示.

证: 设 $H(u, v)$ 为 V 上的一个非退化的 Hermite 型.

$$\text{令 } (u|v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H(\pi(g)u, \pi(g)v)$$

$$\text{则 } (v|u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H(\pi(g)v, \pi(g)u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{H(\pi(g)u, \pi(g)v)} = \overline{(u|v)}$$

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 | v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H(\pi(g)(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), \pi(g)v)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\lambda_1 H(\pi(g)u_1, \pi(g)v) + \lambda_2 H(\pi(g)u_2, \pi(g)v))$$

$$= \lambda_1 (u_1 | v) + \lambda_2 (u_2 | v)$$

$$(u|u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H(\pi(g)u, \pi(g)u) \geq 0$$

且若 $u \neq 0$ 则 $\bar{\pi}(g)u \neq 0 \Rightarrow H(\bar{\pi}(g)u, \bar{\pi}(g)u) > 0 \Rightarrow (u|u) > 0$.

$\therefore (u|v)$ 为一非退化 Hermitian 型.

$$\begin{aligned} \forall h \in G, \quad (\bar{\pi}(h)u | \bar{\pi}(h)v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H(\bar{\pi}(g)\bar{\pi}(h)u, \bar{\pi}(g)\bar{\pi}(h)v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} H(\bar{\pi}(g')u, \bar{\pi}(g')v) = (u|v) \end{aligned}$$

$\therefore \bar{\pi}(h) \in U(n)$ □

例: S_3 表示

$\bar{\pi}^{(1)} :=$ 平凡表示, $\bar{\pi}^{(2)}: S_3 \rightarrow \{\pm 1\}$
 $\pi \rightarrow \text{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{偶置换} \\ -1 & \text{奇置换} \end{cases}$

$\dim_{\mathbb{C}} V = 3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 为 V 基. $\pi \in S_3$

定义: $\bar{\pi}(\pi): V \rightarrow V$ 有: $\bar{\pi}: S_3 \rightarrow GL_3(\mathbb{C})$ 为同态
 $e_i \rightarrow e_{\pi(i)}$

令 $U := \{c_1 f_1 + c_2 f_2 \mid c_i \in \mathbb{C}\}$, $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$

$$\bar{\pi}((1,2))f_1 = e_2 - e_3 = f_2, \quad \bar{\pi}((1,2))f_2 = e_1 - e_3 = f_1$$

$$\bar{\pi}((1,2,3))f_1 = e_2 - e_1 = f_2 - f_1, \quad \bar{\pi}((1,2,3))f_2 = e_3 - e_1 = -f_1$$

$\therefore \forall \pi \in S_3, \pi = (1,2,3)^i (1,2)^j, i=0,1,2, j=0,1$

$\therefore U$ 为 S_3 不变子空间 $\bar{\pi}|_U: U \rightarrow U$ 为子表示. 其矩阵表示为:

$$1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (1,2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (1,3) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2,3) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, (1,2,3) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (1,3,2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

令 $C = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon^2 \\ -\varepsilon^2 & 1 \end{pmatrix}$ 其中 $\varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 则

$$C \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 在基 $(f_1, f_2) \subset U$ 下 $\bar{\pi}|_U: S_3 \rightarrow U(2)$ 为表示

$$(1,2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1,2,3) \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

定理2 (Maschke) 设 G 为有限群 $\text{char } F \nmid |G|$, (π, V) 为 G 之线性表示.
 则 (π, V) 完全可约.

证: 只需证若 U 为 V 之 G -不变子空间, 则 $\exists$ G -不变补空间 W .

设 U' 为 U 之任一补空间, i.e. $V = U \oplus U'$.

$\phi: V \rightarrow U'$ 为投影算子, i.e. $\phi(v) = u'$ 其中 $v = u + u'$, $u \in U$, $u' \in U'$.

则 $\forall v \in V$, $v - \phi(v) \in U$ 且 $\phi^2(v) = \phi(v)$

令 $\phi_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g) \phi \pi(g^{-1})$. 则 $\forall h \in G$,

$$\begin{aligned} \pi(h) \phi_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(h) \pi(g) \phi \pi(g^{-1}) \pi(h^{-1}) \pi(h) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(hg) \phi \pi((hg)^{-1}) \pi(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \pi(g') \phi \pi(g'^{-1}) \pi(h) \\ &= \phi_G \pi(h) \end{aligned}$$

$\therefore \phi_G: V \rightarrow V$ 为 (π, V) 到 (π, V) 之同态.

令 $W = \phi_G(V)$. 则 $(\pi|_W, W)$ 为 (π, V) 之子表示.

剩下只需证明 $V = U \oplus W$.

$$\forall v \in V, \pi(g^{-1})v - \phi \pi(g^{-1})v \in U \Rightarrow v - \pi(g) \phi \pi(g^{-1})v \in U$$

$$\begin{aligned} \therefore v - \phi_G v &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v - \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi(g) \phi \pi(g^{-1})v \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v - \pi(g) \phi \pi(g^{-1})v) \in U \end{aligned}$$

$$\therefore \forall v \in V, v \in U + W.$$

$$\begin{aligned} \forall u \in U, \phi \pi(g^{-1})u &= 0 \Rightarrow \pi(g) \phi \pi(g^{-1})u = 0 \\ &\Rightarrow \phi_G u = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \forall v \in V, \phi_G(v - \phi_G v) = 0 \Rightarrow \phi_G v = \phi_G^2 v$$

$$\text{设 } v \in U \cap W \text{ 则 } \exists v' \in V \text{ s.t. } v = \phi_G v'$$

$$\therefore v \in U \therefore 0 = \phi_G v = \phi_G^2 v' = \phi_G v' = v$$

$$\therefore U \cap W = \{0\} \therefore V = U \oplus W \quad \square$$