特征标理论

设(Φ, V)为群G的有限维复表示

定义: $\chi_\Phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$

$\quad\quad g \longrightarrow \mathrm{tr}\,\Phi(g) = \mathrm{tr}\,\Phi_g$ 　　称为Φ的特征标.

· 设(Ψ, W)为G的另一有限维表示且 $\Phi \cong \Psi$ i.e. $\Psi(g) = \sigma\Phi(g)\sigma^{-1}, \forall g \in G$

其中$\sigma: V \to W$为同构. 则 $\mathrm{tr}\,\Psi(g) = \mathrm{tr}\,\sigma\Phi(g)\sigma^{-1} = \mathrm{tr}\,\Phi(g)$.

∴ 等价的线性表示有相同的特征标.

· 设 $\Phi_g = (\varphi_{ij}(g))$ 为$\Phi(g)$某组基下的矩阵表示. 则 $\mathrm{tr}\,\Phi(g) = \mathrm{tr}\,\Phi_g = \sum_i \varphi_{ii}(g)$.

命题: 设χ_Φ为G的复表示(Φ, V)的特征标 则

1) $\chi_\Phi(1) = \dim_{\mathbb{C}} V$.

2) $\chi_\Phi(hgh^{-1}) = \chi_\Phi(g) \quad \forall g, h \in G$ 即χ_Φ在G的共轭类上取值相同.

3) 若$g \in G$为有限阶元, 则 $\chi_\Phi(g^{-1}) = \overline{\chi_\Phi(g)}$.

4) 若 $\Phi = \Phi' + \Phi''$ 则 $\chi_\Phi = \chi_{\Phi'} + \chi_{\Phi''}$.

证: 1) $\chi_\Phi(1) = \mathrm{tr}\,E = \dim_{\mathbb{C}} V$

2) $\chi_\Phi(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}\,\Phi(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}\,\Phi(h)\Phi(g)\Phi(h^{-1}) = \mathrm{tr}\,\Phi(g) = \chi_\Phi(g)$

3) 设 $g^m = 1$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$为$\Phi(g)$的特征值. 则 $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k$为$\Phi(g^k)$的特征值.

∴ $\lambda_i^m = 1 \quad \forall 1 \le i \le n \Rightarrow |\lambda_i| = 1 \Rightarrow \lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i} \quad \forall 1 \le i \le n$

∴ $\chi_\Phi(g^{-1}) = \mathrm{tr}\,\Phi(g^{-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} = \sum_{i=1}^n \overline{\lambda_i} = \overline{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \overline{\mathrm{tr}\,\Phi(g)} = \overline{\chi_\Phi(g)}$.

4) 取V的一组基 s.t. $\forall g \in G$

$$\Phi_g = \begin{pmatrix} \Phi_g' & 0 \\ 0 & \Phi_g'' \end{pmatrix}$$ 其中 Φ_g' (Φ_g'') 为 $\Phi'(g)$ $(\Phi''(g))$ 在该基下的矩阵表示.

∴ $\chi_\Phi(g) = \mathrm{tr}\,\Phi(g) = \mathrm{tr}\,\Phi_g = \mathrm{tr}\,\Phi_g' + \mathrm{tr}\,\Phi_g'' = \chi_{\Phi'}(g) + \chi_{\Phi''}(g)$ □

例：$G=SU(2)$，$\Phi=id$.

$\forall g\in G$，$\exists h\in G$ s.t. $b_\alpha:=hgh^{-1}=\begin{pmatrix} e^{\frac{\alpha\sqrt{-1}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\alpha\sqrt{-1}}{2}}\end{pmatrix}$ $\alpha\in[0,2\pi)$

$\therefore \chi_\Phi(g)=2\cos\frac{\alpha}{2}$

考虑：$\Psi: G\longrightarrow SO(3)$.

$b_\alpha \longrightarrow B_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 此时 $\chi_\Psi(g)=1+2\cos\alpha$.

$\mathbb{C}^G:=\{G\to\mathbb{C}$ 之映射$\}$

$\chi_1,\chi_2\in\mathbb{C}^G$，$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$ 定义 $(\alpha_1\chi_1+\alpha_2\chi_2)(g):=\alpha_1\chi_1(g)+\alpha_2\chi_2(g)$.

则 $\mathbb{C}^G$ 成为 $\mathbb{C}$-向量空间.

$f\in\mathbb{C}^G$ 称为中心函数，如果 $f(hgh^{-1})=f(g)$ $\forall g,h\in G$.

记 $X_{\mathbb{C}}(G):=\{f\in\mathbb{C}^G \mid f$ 为中心函数$\}$ 为 $\mathbb{C}^G$ 之子空间.

当 G 只有有限个共轭类 比如 $K_1,\cdots K_r$ 时 $X_{\mathbb{C}}(G)$ 为有限维

事实上：令 $\Gamma_i=\begin{cases}1 & g\in K_i\\ 0 & g\notin K_i\end{cases}$ $\forall 1\le i\le r$

则 $\Gamma_i\in X_{\mathbb{C}}(G)$ 且 $X_{\mathbb{C}}(G)=\mathbb{C}\Gamma_1+\cdots+\mathbb{C}\Gamma_r$.

特别地 若 $|G|<+\infty$ 则 $\dim_{\mathbb{C}}X_{\mathbb{C}}(G)<+\infty$.

设(Φ,V)为G之有限维复表示 χ_Φ为特征标 则$\chi_\Phi\in X_{\mathbb{C}}(G)$.

设$|G|<+\infty$，在$\mathbb{C}^G$上定义内积如下：

$$(f_1,f_2)_G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f_1(g)\overline{f_2(g)}\quad, f_1,f_2\in\mathbb{C}^G$$

易验证 $(f_1,f_2)_G$ 为非退化之Hermite型.

问题：$(\chi_\Phi,\chi_\Psi)_G=?$

定理1 (Shur) 设(Φ,V)与(Ψ,W)为G之两个不可约复表示，$\sigma:V\to W$为同态，

i.e σ为线性且 $\Psi(g)\sigma=\sigma\Phi(g)$. $\forall g\in G$. 则

1) 若$\Phi\not\cong\Psi$ 有$\sigma=0$、2) 若$V=W$，$\Phi=\Psi$ 则$\sigma=\lambda E$.

证：设 $\sigma\neq 0$. 令 $V_0=\ker\sigma$, $W_0=\mathrm{Im}\,\sigma$. 则 $(\Phi|_{V_0}, V_0)$, $(\Psi|_{W_0}, W_0)$

为 (Φ,V) 与 (Ψ,W) 之子表示. ∵ (Φ,V) 不可约且 $V_0\neq V$. ∴ $V_0=\{0\}$.

∵ (Ψ,W) 不可约且 $W_0\neq\{0\}$. ∴ $W_0=W$.

1) 若 $\sigma\neq 0$ 则 σ 为同构 ∴ $\Phi\cong\Psi$.

2) ∵ $\mathbb{C}$ 为代数闭域 ∴ σ 存在特征值 λ. 令 $\sigma_0=\sigma-\lambda E$

则 $\Phi(g)\sigma_0=\Phi(g)(\sigma-\lambda E)=\Phi(g)\sigma-\lambda\Phi(g)=(\sigma-\lambda E)\Phi(g)$

且 $\ker\sigma_0\neq\{0\}$.

∴ $(\Phi|_{\ker\sigma_0}, \ker\sigma_0)$ 为 (Φ,V) 之子表示 $\Rightarrow \ker\sigma_0=V$

即 $\sigma_0=0$ ∴ $\sigma=\lambda E$ □

推论：设 (Φ,V), (Ψ,W) 是有限群 G 的两个不可约有限维复表示.

$\sigma: V\longrightarrow W$ 为任一线性映射. 令 $\tilde{\sigma}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Psi(g)\sigma\Phi(g^{-1})$

则 1) 若 $\Phi\ncong\Psi$ 则 $\tilde{\sigma}=0$. 2) 若 $V=W$, $\Phi=\Psi$ 则 $\tilde{\sigma}=\lambda E$, 其中 $\lambda=\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\dim_{\mathbb{C}}V}$.

证：先验证 $\tilde{\sigma}$ 是 (Φ,V) 到 (Ψ,W) 之同态, $\forall h\in G$

$$\Psi(h)\tilde{\sigma}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Psi(h)\Psi(g)\sigma\Phi(g^{-1})\Phi(h^{-1})\Phi(h)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Psi(hg)\sigma\Phi((hg)^{-1})\Phi(h)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}\Psi(g')\sigma\Phi(g'^{-1})\Phi(h)=\tilde{\sigma}\Phi(g)$$

由定理1知 1), 2) 成立. 且当 $V=W$, $\Phi=\Psi$ 时有

$$\dim_{\mathbb{C}}V\cdot\lambda=\mathrm{tr}\,\tilde{\sigma}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,\Phi(g)\sigma\Phi(g^{-1})=\mathrm{tr}\,\sigma$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\dim_{\mathbb{C}}V}.$$

□

矩阵形式：$\{v_i\mid i\in I\}$ 为 V 之基. $\{w_j\mid j\in J\}$ 为 W 之基.

$\Phi(g)$ 之矩阵表示为 $\Phi_g=(\varphi_{ii'}(g))$, $\Psi(g)$ 之矩阵表示 $\Psi_g=(\psi_{jj'}(g))$

$\sigma=(\sigma_{ji'})$, $\tilde{\sigma}=(\tilde{\sigma}_{ji})$.

则 $\tilde{\sigma}_{ji} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i',j'} \psi_{jj'}(g)\,\sigma_{j'i'}\,\varphi_{i'i}(g^{-1})$

1) 当 $\Phi \ncong \Psi$ 时，对 $\forall \sigma=(\sigma_{j'i'})$ 有 $\tilde{\sigma}=(\tilde{\sigma}_{ji})=0$.

特别地，令 $\sigma_{j'i'} = \begin{cases} 0 & (j',i')\neq(j_0,i_0) \\ 1 & (j',i')=(j_0,i_0) \end{cases}$

有 $$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\psi_{jj_0}(g)\,\varphi_{i_0i}(g^{-1}) = 0 \quad \forall\, i,j,i_0,j_0 \qquad (1)$$

2) $V=W$ 且 $\Phi=\Psi$ 时有

$$\mathrm{tr}\,\sigma = \sum_{i'}\sigma_{i'i'} = \sum_{i',j'}\delta_{j'i'}\sigma_{j'i'}$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\dim_{\mathbb{C}}V}E \Rightarrow \tilde{\sigma}_{ji} = \delta_{ji}\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{\dim_{\mathbb{C}}V} = \sum_{i',j'}\frac{\delta_{ji}\delta_{j'i'}\sigma_{j'i'}}{\dim_{\mathbb{C}}V},\ \forall\, i,j$$

$$\therefore\ \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i',j'}\varphi_{jj'}(g)\,\sigma_{j'i'}\,\varphi_{i'i}(g^{-1}) = \sum_{i',j'}\frac{\delta_{ji}\delta_{j'i'}\sigma_{j'i'}}{\dim_{\mathbb{C}}V} \quad \forall\, i,j$$

再次令 $\sigma_{j'i'} = \begin{cases} 0 & (j',i')\neq(j_0,i_0) \\ 1 & (j',i')=(j_0,i_0) \end{cases}$ 则

$$(2) \qquad \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi_{jj_0}(g)\,\varphi_{i_0i}(g^{-1}) = \frac{\delta_{ji}\delta_{j_0i_0}}{\dim_{\mathbb{C}}V} = \begin{cases} \dfrac{\delta_{ji}}{\dim_{\mathbb{C}}V} & j_0=i_0 \\ 0 & j_0\neq i_0. \end{cases}$$

定理2：设 (Φ,V), (Ψ,W) 为有限群 G 的有限维不可约复表示 则

$$(\chi_\Psi,\chi_\Phi)_G = \begin{cases} 1 & \Phi\cong\Psi \\ 0 & \Phi\ncong\Psi \end{cases} \qquad \text{(第一正交关系)}$$

证：设 $\Phi_g=(\varphi_{ji}(g))$, $\Psi_g=(\psi_{ji}(g))$ 则 $\chi_\Phi(g)=\sum\varphi_{ii}(g)$ $\chi_\Psi(g)=\sum_i\psi_{ii}(g)$

设 $\Phi\ncong\Psi$. 在(1)中令 $i_0=i$, $j_0=j$ 则

$$0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{i,j}\psi_{jj}(g)\,\varphi_{ii}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Big(\sum_j\psi_{jj}(g)\Big)\Big(\sum_i\varphi_{ii}(g^{-1})\Big)$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\Psi(g)\,\chi_\Phi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\Psi(g)\,\overline{\chi_\Phi(g)} = (\chi_\Psi,\chi_\Phi)_G$$

设 $V=W$，$\Phi=\Psi$ 在(2)中令 $i_0=i$, $j_0=j$. 则

$$1 = \frac{\sum_{i,j}\delta_{ij}}{\dim_{\mathbb{C}}V} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Big(\sum_j\varphi_{jj}(g)\Big)\Big(\sum_i\varphi_{ii}(g^{-1})\Big) = (\chi_\Phi,\chi_\Phi)_G$$

$1=\frac{\ldots}{\dim_{\mathbb{C}}V}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\ldots$

此外若 $\Phi\cong\Psi$ 有 $\chi_\Phi=\chi_\Psi$ ⇒若 $\Phi\cong\Psi$ 则 $(\chi_\Psi,\chi_\Phi)_G=(\chi_\Phi,\chi_\Phi)_G=1$. □

推论：设 (Φ,V) 为 G 之复线性表示，$\Phi=\bigoplus_{i=1}^{k}s_i\Phi_i$，其中 $\Phi_1,\cdots,\Phi_k$ 为两两不等价之不可约子表示，(Ψ,W) 为 G 之不可约复表示，则

1) $(\chi_\Phi,\chi_\Psi)_G=\begin{cases}s_i & \Psi\cong\Phi_i\\ 0 & \Psi\ncong\Phi_i\end{cases}\quad\forall\, 1\le i\le k$

2) 若 $(\tilde{\Phi},W)$ 为 G 之复表示且 $\chi_\Phi=\chi_{\tilde{\Phi}}$，则 $\Phi\cong\tilde{\Phi}$.

证：1) 由命题知：$\chi_\Phi=s_1\chi_{\Phi_1}+\cdots+s_k\chi_{\Phi_k}$.

$$(\chi_\Phi,\chi_\Psi)_G=\sum_{i=1}^{k}s_i(\chi_{\Phi_i},\chi_\Psi)_G=\begin{cases}s_i & \Phi_i\cong\Psi\\ 0 & \Phi_i\ncong\Psi\end{cases}\quad\forall\, 1\le i\le k.$$

2) 由Maschke定理设 $\Psi=m_1\Psi_1\oplus\cdots\oplus m_l\Psi_l$ 其中 $\Psi_1,\cdots,\Psi_l$ 两两不等价.

$\forall\, 1\le i\le k$，由1)有

$$s_i=(\chi_\Phi,\chi_{\Phi_i})_G=(\chi_\Psi,\chi_{\Phi_i})_G=\begin{cases}m_j & \Psi_j\cong\Phi_i\\ 0 & \Psi_j\ncong\Phi_i\end{cases}\quad\forall\, 1\le j\le l.$$

∴ $\exists!\ 1\le j_i\le l$ s.t. $\Psi_{j_i}\cong\Phi_i$ 且 $m_{j_i}=s_i$

同理对于 $\forall\ 1\le j\le l$，$\exists!\ 1\le i_j\le k$ s.t. $\Phi_{i_j}\cong\Psi_j$

∴ $l=k$

适当调整下标可假设 $j_i=i$ 则 $m_i=s_i\quad\forall\, 1\le i\le k$

从而 $\Psi=s_1\Psi_1\oplus\cdots\oplus s_k\Psi_k$ 且 $\Psi_i\cong\Phi_i$ ⇒ $\Psi=\Phi$ □

设 (Φ,V) 为有限群 G 之复线性表示.

由Maschke定理，$\Phi=s_1\Phi_1\oplus\cdots\oplus s_k\Phi_k$，$\Phi_1,\cdots,\Phi_k$ 为两两不等价之不可约子表示 $s_i\ge1$

则 $(\chi_\Phi,\chi_\Phi)_G=(\sum s_i\chi_{\Phi_i},\sum s_i\chi_{\Phi_i})_G=\sum_{i=1}^{k}s_i^2$

∴ 有限群 G 复表示 Φ 之特征标的内积 $(\chi_\Phi,\chi_\Phi)_G$ 为一个整数且

$(\chi_\Phi,\chi_\Phi)_G=1 \iff \Phi$ 是不可约表示.

例：1) S_3 之二维表示 $\Phi^{(3)}: S_3\longrightarrow U(2)$

(12) $\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(123) $\longrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon = \cancel{-1\pm\sqrt{3}}$

6	1	3	2
S_3	1	(12)	(123)
$\chi_{\Phi^{(3)}}$	2	0	-1

$$\therefore (\chi_{\Phi^{(3)}}, \chi_{\Phi^{(3)}})_G = \frac{1}{|S_3|}\sum_{\pi\in S_3} \chi_{\Phi^{(3)}}(\pi)\overline{\chi_{\Phi^{(3)}}(\pi)}$$
$$= \frac{1}{6}(1\cdot 2^2 + 3\cdot 0 + 2\cdot(-1)^2)$$
$$= 1$$

$\therefore$ $\Phi^{(3)}$ 是不可约的.

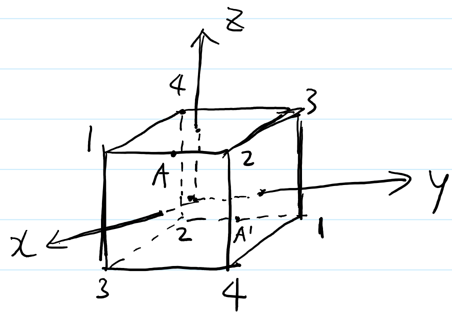
2) $\Phi: S_4 \longrightarrow SO(3)$

(1234) $\longrightarrow$ 绕z轴转 $\frac{\pi}{2}$

(123) $\longrightarrow$ 绕直线44'转 $\frac{2}{3}\pi$

(12) $\longrightarrow$ 绕 AA' 转 π.

(12)(34) $\longrightarrow$ 绕y轴转 π.



$\forall\ g\in SO(3),\ \exists\ h\in SO(3)$ s.t. $g = hB_\theta h^{-1}$ 其中 $B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

θ为绕固定轴旋转角度.

$$\therefore \chi_\Phi((1234)) = \mathrm{tr}\, B_{\frac{\pi}{2}} = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2} = 1$$
$$\chi_\Phi((123)) = \mathrm{tr}\, B_{\frac{2}{3}\pi} = 1 + 2\cos\frac{2}{3}\pi = 0$$
$$\chi_\Phi((12)) = \mathrm{tr}\, B_\pi = 1 + 2\cos\pi = -1$$
$$\chi_\Phi((12)(34)) = \mathrm{tr}\, B_\pi = -1$$

	1	3	6	8	6
	1	(12)(34)	(12)	(123)	(1234)
	3		-1	0	1

$$\therefore (\chi_\Phi, \chi_\Phi)_G = \frac{1}{|S_4|}\sum_{\pi\in S_4}\chi_\Phi(\pi)\overline{\chi_\Phi(\pi)} = \frac{1}{24}(1\cdot 3^2 + 3\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1)^2 + 8\cdot 0 + 6\cdot 1) = 1$$

$\Rightarrow$ Φ 是不可约的.