有限群的不可约表示

本节G均表有限群

正则表示：设$|G|=n$，$\dim_F V=n$，$\{e_g \mid g\in G\}$为V之一组基.

$h\in G$，定义 $\varphi(h): V \longrightarrow V$ 为线性同构
$$e_g \longrightarrow e_{hg}$$

则 $\varphi: G \to GL(V)$，$h \to \varphi(h)$ 为G到V之线性表示，称为正则表示

若 $h\neq 1$，则 $hg\neq g\ \forall g\in G$ ∴ $\chi_\varphi(h)=\operatorname{tr}\varphi(h)=\begin{cases}|G| & h=1\\ 0 & h\neq 1\end{cases}$

例：K/F为有限伽罗瓦扩张，$\{g(u)\mid g\in Gal(K/F)\}$为K/F之正规基

则 $\varphi: Gal(K/F) \longrightarrow GL(K)$
$$h \longrightarrow \varphi(h): V \longrightarrow V,\quad g(u)\longrightarrow hg(u)$$
为Gal(K/F)之正则表示

引理1：设Γ为G上之一个中心函数，(Φ, V)为G之一个不可约复表示，χ_Φ为其特征标.

令 $\Phi_\Gamma := \sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\,\Phi(g)$，则 $\Phi_\Gamma=\lambda E$ 其中 $\lambda=\frac{|G|}{\chi_\Phi(1)}(\chi_\Phi,\Gamma)_G$

证：$\forall h\in G$，$\Phi(h)\Phi_\Gamma\Phi(h^{-1})=\sum_{g\in G}\Phi(h)\overline{\Gamma(g)}\Phi(g)\Phi(h^{-1})$

$=\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\,\Phi(hgh^{-1})=\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(hgh^{-1})}\,\Phi(hgh^{-1})=\sum_{g'\in G}\overline{\Gamma(g')}\,\Phi(g')=\Phi_\Gamma$

∴ Φ_Γ为(Φ,V)之自同态，由Shur引理：$\Phi_\Gamma=\lambda E$

$\lambda\chi_\Phi(1)=\lambda\operatorname{tr}E=\operatorname{tr}\Phi_\Gamma=\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\operatorname{tr}\Phi(g)=\sum_{g\in G}\overline{\Gamma(g)}\chi_\Phi(g)=|G|(\chi_\Phi,\Gamma)_G$

$\Rightarrow \lambda=\frac{|G|}{\chi_\Phi(1)}(\chi_\Phi,\Gamma)_G$ □

引理2：设$\Phi_1,\cdots\Phi_s$为G之所有两两不等价之不可约复表示，则$\chi_{\Phi_1},\cdots\chi_{\Phi_s}$为$X_{\mathbb{C}}(G)$之一组标准正交基.

证：由BA Ⅲ P16 定理2知：$\chi_{\Phi_1},\cdots,\chi_{\Phi_s}$是正交之，下证它们是$X_{\mathbb{C}}(G)$之一组基

设 $\Gamma\in X_{\mathbb{C}}(G)$，令 $\Gamma'=\sum_{i=1}^{s}(\chi_{\Phi_i},\Gamma)_G\,\chi_{\Phi_i}-\Gamma$.

则 $(\chi_{\Phi_i},\Gamma')_G=0\quad\forall\ 1\le i\le s$. 下证 $\Gamma'=0$ 从而 Γ 为 $\chi_{\Phi_1},\cdots,\chi_{\Phi_s}$ 之线性组合

$\therefore\ \{\chi_{\Phi_1},\cdots,\chi_{\Phi_s}\}$ 为 $X_{\mathbb{C}}(G)$ 之基.

设 φ 为 G 之一个复正则表示. 由 Maschke 定理：$\varphi=\bigoplus_{i=1}^{s}m_i\Phi^{(i)}$，其中 $\Phi^{(i)}\cong\Phi_i$.

考虑 $\Phi_{\Gamma'}^{(i)}=\sum_{h\in G}\overline{\Gamma'(h)}\,\Phi^{(i)}(h)$，$i=1,\cdots,s$.

由引理，$\Phi_{\Gamma'}^{(i)}=\lambda_iE_i$ 其中 $\lambda_i=\frac{|G|}{\chi_{\Phi^{(i)}}(1)}(\chi_{\Phi^{(i)}},\Gamma')_G=\frac{|G|}{\chi_{\Phi^{(i)}}(1)}(\chi_{\Phi_i},\Gamma')_G=0$.

$\therefore\ \Phi_{\Gamma'}^{(i)}=0\quad i=1,\cdots,s$.

从而 $\varphi_{\Gamma'}=\sum_{h\in G}\overline{\Gamma'(h)}\varphi(h)=\sum_{h\in G}\overline{\Gamma'(h)}\bigoplus_{i=1}^{s}m_i\Phi^{(i)}(h)=\bigoplus_{i=1}^{s}m_i\Phi_{\Gamma'}^{(i)}=0$

$\therefore\ \varphi_{\Gamma'}=0$.

令 $\{e_h\mid h\in G\}$ 为 φ 之表示空间 V 之一组基. 则 $0=\varphi_{\Gamma'}e_1=\sum_{h\in G}\overline{\Gamma'(h)}\varphi(h)e_1$

$$=\sum_{h\in G}\overline{\Gamma'(h)}\,e_h$$

$\therefore\ \Gamma'(h)=0\quad\forall\ h\in G$ 即 $\Gamma'=0$. $\square$

定理1：G 之两两不等价之不可约复表示之个数等于 G 之共轭类之个数.

证：G 之共轭类之个数 $=X_{\mathbb{C}}(G)$ 之维数. 由引理2知定理成立.

例：S_3 有3个共轭类. 其代表元分别为 1，(12)，(123)

它有3个两两不等价之不可约酉表示：$\Phi^{(1)}$，$\Phi^{(2)}$，$\Phi^{(3)}$

注意到：$|S_3|=6=1+1+2^2$ 而 $1,1,2$ 分别为 $\Phi^{(1)},\Phi^{(2)},\Phi^{(3)}$ 之表示空间之维数.

(φ,V) 为 G 之复正则表示. $\{e_g\mid g\in G\}$ 为 V 之基. $\varphi(h):V\longrightarrow V$

$$e_g\longrightarrow e_{hg}.$$

设 (Φ,W) 为 G 之任意复不可约表示 则

Φ 在 φ 之不可约分解中之重数 $=(\chi_\Phi,\chi_\varphi)_G=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\varphi(g)\overline{\chi_\Phi(g)}$

$$=\frac{1}{|G|}|G|\cdot\chi_\Phi(1)=\chi_\Phi(1)=\dim_{\mathbb{C}}W$$

结论：G 的任意不可约复表示 (Φ, V) 均出现在正则表示 ρ 的不可约分解中且出现重数为 $\dim_{\mathbb{C}} V$.

设 G 的所有两两不等价的不可约复表示为 $(\Phi_1, V_1), \cdots, (\Phi_r, V_r)$，记 $n_i = \dim_{\mathbb{C}} V_i$

则 $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} n_i \Phi_i \Rightarrow \chi_\rho = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_{\Phi_i}$

$$\Rightarrow |G| = \chi_\rho(1) = \sum_{i=1}^{r} n_i \chi_{\Phi_i}(1) = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$$

定理2：设 $(\Phi_1, V_1), \cdots, (\Phi_r, V_r)$ 为 G 的所有两两不等价的不可约复表示，ρ 为 G 的正则表示

记 $n_i = \dim_{\mathbb{C}} V_i$. 则 $\rho \cong \bigoplus_{i=1}^{r} n_i \Phi_i$ 且 $|G| = \sum_{i=1}^{r} n_i^2$.

特征标表：

G	1	g_2	$\cdots$	g_r
χ_{Φ_1}	n_1	$\chi_{\Phi_1}(g_2)$		$\chi_{\Phi_1}(g_r)$
χ_{Φ_2}	n_2	$\chi_{\Phi_2}(g_2)$		$\chi_{\Phi_2}(g_r)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
χ_{Φ_r}	n_r	$\chi_{\Phi_r}(g_2)$		$\chi_{\Phi_r}(g_r)$

其中 $\{g_1 = 1, g_2, \cdots, g_r\}$ 为 G 的 r 个共轭类的代表元

即 $G = \bigsqcup_{i=1}^{r} \{h g_i h^{-1} \mid h \in G\}$.

$g \in G$, $C_G(g) := \{h \in G \mid hg = gh\}$, $g^G := \{hgh^{-1} \mid h \in G\}$.

则 $|G| = |C_G(g)||g^G|$.

沿用上面记号 $\Phi_1, \cdots, \Phi_r$, $g_1 = 1, \cdots, g_r$

$1 \leq k, l \leq r$,
$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\chi_{\Phi_k}(g_j)}{\sqrt{|C_G(g_j)|}} \overline{\frac{\chi_{\Phi_l}(g_j)}{\sqrt{|C_G(g_j)|}}} = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{r} \frac{|G|}{|C_G(g_j)|} \chi_{\Phi_k}(g_j) \overline{\chi_{\Phi_l}(g_j)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{r} |g_j^G| \chi_{\Phi_k}(g_j) \overline{\chi_{\Phi_l}(g_j)} = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^{r} \sum_{g \in g_j^G} \chi_{\Phi_k}(g) \overline{\chi_{\Phi_l}(g)}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\Phi_k}(g) \overline{\chi_{\Phi_l}(g)} = (\chi_{\Phi_k}, \chi_{\Phi_l})_G$$

令 $M = \left(\frac{\chi_{\Phi_i}(g_j)}{\sqrt{|C_G(g_j)|}} \right)$ 则 $M \, {}^t\overline{M} = E \Rightarrow {}^t\overline{M} \cdot M = E$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_{\Phi_i}(g_k)}{\sqrt{|C_G(g_k)|}} \overline{\frac{\chi_{\Phi_i}(g_l)}{\sqrt{|C_G(g_l)|}}} = \delta_{k,l}$$

$\therefore \sum_{i=1}^{r} \chi_{\Phi_i}(g) \overline{\chi_{\Phi_i}(h)} = \begin{cases} |C_G(g)|, & g 与 h 共轭 \\ \cdots \end{cases}$ （第二正交关系）

□　　g与h不共轭.

定理3：设G为有限群 则

1) G为交换群 $\Leftrightarrow$ G之每个不可约复表示都是1维的.

2) 若G为交换群 则G之所有两两不等价之不可约复表示之个数为$|G|$.

证：1) ($\Rightarrow$) 见习题3.

($\Leftarrow$) 由定理2知 G之所有两两不等价之不可约复表示之个数为$|G|$.

由定理1知，G之共轭类个数为$|G|$　∴ G为交换群

2) 由1)及定理2知.

注：若(Φ, V)为1维之表示 则 $\chi_\Phi : G \to U(F)$ 为群同态.

定义. 设G为交换群. $\hat{G} := Hom(G, U(\mathbb{C})) = \{G \to U(\mathbb{C})$之群同态$\}$.

定义：$\hat{G} \times \hat{G} \longrightarrow \hat{G}$

$(\chi_1, \chi_2) \longrightarrow \chi_1\chi_2$　$(\chi_1\chi_2(g) = \chi_1(g)\chi_2(g))$

则$(\hat{G}, \cdot)$构成交换群 称为G之特征标群

定理4：设G为有限交换群 则 $G \cong \hat{G}$.

证：由有限交换群之结构：$G = \langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \times \cdots \times \langle g_k \rangle$.

记 $s_i = |\langle g_i \rangle|$ $i=1,\cdots,k$. 设ξ_i为$\mathbb{C}$中s_i次本原根.

$\forall g \in G$, g可唯一写成 $g_1^{t_1} g_2^{t_2} \cdots g_k^{t_k}$之形式 (见BAII P57) 其中 $0 \le t_i \le s_i - 1$, $1 \le i \le k$.

定义：$\chi_g : G \longrightarrow U(\mathbb{C})$

$g_1^{r_1} \cdots g_k^{r_k} \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} \xi_i^{t_i r_i}$　　则 $\chi_g \in \hat{G}$ 且易知：$\chi_{gh} = \chi_g \chi_h$

∴ $\chi : G \longrightarrow \hat{G}$ 为群同态.

$g \longrightarrow \chi_g$

设 $g = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \cdots g_k^{t_k} \in \ker\chi$, 即 $\chi_g(h) = 1$ $\forall h \in G$.

特别地, $\chi_g(g_i) = \xi_i^{t_i} = 1$ $\forall 1 \le i \le k \Rightarrow t_i = 0$ $\forall 1 \le i \le k$

$\Rightarrow g = 1$. $\Rightarrow \chi$是单同态.

由定理3知：$|G| = |\hat{G}|$ ∴ χ为同构 从而 $G \cong \hat{G}$.　□

$\Rightarrow g=1. \Rightarrow \chi$ 是单射.

由定理3知: $|G|=|\hat{G}|$ ∴ χ 为同构 从而 $G\cong\hat{G}$. □

例: V_{2^n} 2^n阶初等交换群 即 $V_{2^n}=\underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{n}$.

$\forall g\in V_{2^n}$, $g=(g_1,\cdots,g_n)$ $g_i=0$ 或 1

$h\in V_{2^n}$, $\chi_g(h)=(-1)^{\sum_{i=1}^{n} g_i h_i}$

$n=2$时 记 $a=(1,0)$, $b=(0,1)$, $ab=(1,1)$ 则

V_4	1	a	b	ab
χ_1	1	1	1	1
χ_a	1	-1	1	-1
χ_b	1	1	-1	-1
χ_{ab}	1	-1	-1	1

定理5: 设G'为G的换位子群. 则G的一维复表示与G/G'的不可约复表示间存在一一对应.

且G的两两不等价的一维复表示个数为$(G:G')$.

证: 设 $\Phi: G\to GL(V)$ 为G的一个1维复表示.

∵ $GL(V)$交换 ∴ $G'\subseteq\ker\Phi$. ∴ $\bar{\Phi}: G/G'\to GL(V)$ 是良定义的且为群同态

$g+G'\to\Phi(g)$

∴ $\bar{\Phi}$为G/G'到V的1维复表示. 从而为不可约复表.

τ: {G的一维复表示} $\longrightarrow$ {G/G'的不可约复表示} 是良定义的映射.

$(\Phi,V)\longrightarrow(\bar{\Phi},V)$

· τ是单射.

设(Φ_1,V_1)与(Φ_2,V_2)为G的两个1维复表示 且 $(\tau(\Phi_1),V_1)=(\tau(\Phi_2),V_2)$

则 $V_1=V_2$ 且 $\tau(\Phi_1)(g+G')=\tau(\Phi_2)(g+G')$ $\forall g\in G$

∴ $\Phi_1(g)=\bar{\Phi}_1(g+G')=\bar{\Phi}_2(g+G')=\Phi_2(g)$ $\forall g\in G$ $\Rightarrow\Phi_1=\Phi_2$.

· τ是满射.

注意到G/G'为交换群 ∴ 其不可约复表示均是一维的.

设$\Psi: G/G'\to GL(V)$为不可约复表示. 则 $\tilde{\Psi}: G\to G/G'\to GL(V)$ 为G的一维复表示

$g\to g+G'\to\Psi(g+G')$

$\forall g\in G,\ \tau(\tilde{\psi})(g+G')=\tilde{\psi}(g)=\psi(g+G') \Rightarrow \tau(\tilde{\psi})=\psi$.

$\therefore \tau$是满射.

此外由τ的定义知：$\Phi_1\cong\Phi_2 \Leftrightarrow \tau(\Phi_1)\cong\tau(\Phi_2)$.

由定理3有：G/G'的两两不等价的不可约复表示个数为$|G/G'|=(G:G')$

$\therefore$ G的两两不等价的1维复表示个数为$(G:G')$. $\square$

例：1) 设G为作用在$\Omega=\{1,2,\cdots n\}$上的2-可迁置换群.

$\dim_{\mathbb{C}}V=n$, $\{e_1,\cdots e_n\}$为V的基.

$$\begin{aligned}\Phi:\ G&\longrightarrow GL(V)\\ g&\longrightarrow \Phi(g):V\longrightarrow V\\ &\qquad\qquad e_i\longrightarrow e_{g(i)}\end{aligned}$$ 称为置换表示.

记$N(g):=\left|\{i\in\Omega \mid g(i)=i\}\right|$. 则$\chi_\Phi(g)=\operatorname{tr}\Phi(g)=N(g)$.

$\therefore \sum\limits_{g\in G}\chi_\Phi(g)\overline{\chi_\Phi(g)}=\sum\limits_{g\in G}N(g)^2=2|G| \Rightarrow (\chi_\Phi,\chi_\Phi)_G=2$.

设$\Phi=\bigoplus\limits_{i=1}^{r}n_i\Phi_i$为不可约分解. 则$(\chi_\Phi,\chi_\Phi)_G=\sum\limits_{i=1}^{r}n_i^2=2$

$\therefore r=2$ 且 $n_1=n_2=1$. 即Φ为两个不可约子表示的直和.

令 $V_0=\mathbb{C}(e_1+\cdots+e_n)$ $V_1=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n-1}c_i(e_i-e_n) \mid c_i\in\mathbb{C}\right\}$.

则V_0,V_1为G-不变的. $\therefore \Phi^{V_0},\Phi^{V_1}$为$\Phi$的两个不可约子表示.

特别地. S_n, $n>2$, A_n, $n>3$ 时为2-可迁. 它们有$n-1$维不可约表示Ψ

且$\chi_\Psi(g)=N(g)-1$.

2) A_4的不可约表示：A_4有4个共轭类 $12=1^2+1^2+1^2+3^2$

12	1	3	4	4
A_4	1	$(12)(34)$	(123)	(132)
χ_{Φ_1}	1	1	1	1
χ_{Φ_2}	1	1	ε	ε^{-1}
χ_{Φ_3}	1	1	ε^{-1}	ε
χ_{Φ_4}	3	-1	0	0

$A_4'=V_4$, $|A_4/V_4|=3 \Rightarrow A_4$有3个一维复表示

另外由特征标知：Φ_4 同构于 $A_4 \longrightarrow SO(3)$ 之表示.

3) S_4 之不可约表示：S_4 有5个共轭类 $\Rightarrow$ 有5个不可约表示.

a) $S_4' = A_4$, $|S_4/A_4| = 2$ $\Rightarrow$ S_4 有两个一维表示

$\Phi^{(1)}: G \longrightarrow \{1\}$ $\quad$ $\Phi^{(2)}: G \longrightarrow \{\pm 1\}$

$\pi \longrightarrow 1$ $\quad$ $\pi \longrightarrow \mathrm{sgn}(\pi)$

b) S_4 有两个3维不可约表示

$\Phi^{(4)}: S_4 \longrightarrow SO(3)$ $\qquad$ $\Phi^{(5)}$ 由1)中所构造.

c) $24 - 2\cdot 3^2 - 2 = 4$ $\Rightarrow$ S_4 有一个2维表示

$V_4 \lhd S_4$ $\qquad$ $S_4/V_4 \cong S_3$ 由 BAⅢ P82 S_3 有2维不可约表示. 由此诱导 S_4 之2维不可约表示. 记为 $\Phi^{(3)}$

24	1	3	6	8	6
S_4	1	(12)(34)	(12)	(123)	(1234)
χ_{Φ_1}	1	1	1	1	1
χ_{Φ_2}	1	1	−1	1	−1
χ_{Φ_3}	2	2	0	−1	0
χ_{Φ_4}	3	−1	−1	0	1
χ_{Φ_5}	3	−1	1	0	−1

4) 四元数群 Q_8 之不可约表示：Q_8 有5个共轭类 $\Rightarrow$ 有5个不可约表示.

$8 = 1+1+1+1+2^2$ $\Rightarrow$ 有4个1维表示, 1个2维表示

$Q_8' = \{\pm 1\}$ $\qquad$ $Q_8/Q_8' \cong V_4$

	1	1	2	2	2
Q_8	1	−1	a	b	ab
χ_{Φ_1}	1	1	1	1	1
χ_{Φ_2}	1	1	−1	1	−1
χ_{Φ_3}	1	1	1	−1	−1
χ_{Φ_4}	1	1	−1	−1	1
χ_{Φ_5}	2	−2	0	0	0

$$(\chi_{\Phi_5}, \chi_{\Phi_5})_{Q_8} = \frac{1}{8}(2^2+2^2+0+0+0) = 1.$$