4.3

2018年11月1日 18:09

§4.3 模

例：· 向量空间：P为域，V为交换群

$$P\times V \longrightarrow V$$
$$(r, a) \longrightarrow ra$$

满足 1) $r(a+b)=ra+rb$
2) $(r+s)a=ra+sa$
3) $r(sa)=(rs)a$
4) $1\cdot a=a$

定义：设R为含幺环，集合V称为(左)R-模 如果其满足

1) $(V,+)$为交换群
2) ∃映射：$R\times V\longrightarrow V$ s.t. $\forall\, u,v\in V,\ r,s\in R$
$(r,u)\longrightarrow ru$

$$r(u+v)=ru+rv$$
$$(r+s)u=ru+sv$$
$$r(su)=(rs)u$$
$$1\cdot u=u$$

类似地，定义右R-模

· V为R-模，$\tilde V\subseteq V$称为子模 如果 $\tilde V$为$(V,+)$的子群且$\forall r\in R$. $a\in\tilde V$有$ra\in\tilde V$.

U，V为R-模，映射$\varphi: U\longrightarrow V$称为R-模同态 如果

$\forall\, u,v\in U,\ r\in R$ 有 $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$
$\varphi(ru)=r\varphi(u)$

$$\ker\varphi := \{u\in U \mid \varphi(u)=0\}$$

R-模同构：∃ R-模同态 $\psi: V\longrightarrow U$ s.t $\varphi\circ\psi=id_V,\ \psi\circ\varphi=id_U$.

⟺ φ为R-模同态且φ为双射

此时记 $U\cong V$.

性质：若$\tilde V\subseteq V$为子模，则$\varphi^{-1}(\tilde V)=\{u\in U \mid \varphi(u)\in\tilde V\}$为U的子模，$\mathrm{Im}\varphi$为V的子模

U为R-模 $V\subseteq U$为子模. $(U/V,+)$为交换群

定义：$R\times U/V \longrightarrow U/V$ $a'\in U$ s.t $a-a'\in V$
$(r,\ a+V)\longrightarrow ra+V$ $\Rightarrow r(a-a')\in V\Rightarrow ra-ra'\in V$
$\Rightarrow ra+V=ra'+V$
⟹ 映射是良定义的.

练习：验 U/V是R-模.

例：· 交换群是$\mathbb{Z}$-模

· A为交换群，$\mathrm{End}(A)=\{\varphi: A\to A \text{ 群同态}\}$ 构成环

$$\mathrm{End}(A)\times A\longrightarrow A$$
$$(\varphi,\ a)\longrightarrow\varphi(a)$$

A为End(A)-模.

· P为域，V为有限维P-向量空间，$\mathcal{A}$：$V\longrightarrow V$为线性变换.

$$P[x]\times V \longrightarrow V$$
$$(f, v) \longrightarrow f\cdot v = a_0 v + a_1 \mathcal{A} v + \cdots + a_n \mathcal{A}^n v.$$

V为$P[x]$-模，记作$V_{\mathcal{A}}$. 子模为$\mathcal{A}$-不变子空间.

· $I \subseteq R$为左理想 $\quad R\times I \longrightarrow I$, $(r, a) \longrightarrow ra$ $\quad I$成为R-模.

特别地，R本身为R-模，记作${}_RR$.

W为${}_RR$的子模 $\Leftrightarrow$ W为R的左理想.

(W为$(R,+)$的子群且$\forall r\in R, w\in W$, $rw\in W$).

设$I\subseteq R$为左理想, I为R-模 $\Rightarrow$ R/I 商模

$$\pi: R \longrightarrow R/I, \quad a \longrightarrow a+I$$

满足: $\pi(ra) = ra+I = r(a+I) = r\pi(a)$

$\Rightarrow \pi$为R-模同态.

(当I为双边理想时 $r(a+I) = (r+I)(a+I) = \pi(r)\pi(a)$. $\Rightarrow \pi$为环同态)

R-模的运算 $V, V_1, V_2, \cdots$ 为R-模

$\{V_\alpha \mid \alpha\in I\}$为$V$的子模构成的集合. 则

· $\bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha$ 为R-模

· $V_1+V_2 := \{u+v \mid u\in V_1,\ v\in V_2\}$ 为R-模.

$T\subseteq V$为子集: $\langle T\rangle :=$ 由T生成的子模

$$= \bigcap_{T\subseteq \tilde V,\ \tilde V \text{为子模}} \tilde V = \left\{ \sum_{\alpha\in T} r_\alpha \alpha \;\middle|\; r_\alpha\in R,\ \text{仅有限个} r_\alpha \neq 0 \right\}.$$

V称为循环模 若$\exists v\in V$ s.t. $V=\langle v\rangle = R\cdot v$.

V称为有限生成的(或有限型) 若$\exists v_1,\cdots,v_s\in V$ s.t. $V = Rv_1+\cdots+Rv_s$. $s\geq 0$.

$v\in V$. $\varphi: {}_RR \longrightarrow Rv$, $r \longrightarrow r\cdot v$ 为R-模同态. $\left(Rv \cong {}_RR/\operatorname{Ker}\varphi \right)$

$\operatorname{Ann}_R(v) := \operatorname{Ker}\varphi = \{r\in R \mid r\cdot v = 0\}$ 称为v的零化子(或挠率)

$\operatorname{Ann}_R(v)$为R的左理想: $r_1v_1 = r_2v_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (r_1-r_2)v = 0 \\ s\cdot r_1 v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r_1-r_2 \in \operatorname{Ann}(v) \\ sr_1 \in \end{matrix}$

$v\in V$称为周期的 若$\operatorname{Ann}_R(v)\neq\{0\}$.

V称为周期的. 若$\operatorname{Ann}_R(v)\neq\{0\}$, $\forall v\in V$.

$$\operatorname{Ann}_R(V) := \{r\in R \mid rv = 0\ \forall v\in V\} = \bigcap_{v\in V}\operatorname{Ann}_R(v).$$

若 $\mathrm{Ann}_R(V)=\{0\}$ 则称 V 是忠实模.

$\mathrm{End}(V)=\{\varphi: V\longrightarrow V$ 群同态$\}$.

$\Phi: R\longrightarrow \mathrm{End}(V)$

$a\longrightarrow \Phi(a)\quad \left(\begin{array}{l}\Phi(a): V\longrightarrow V\\ \qquad\quad v\longrightarrow a\cdot v\end{array}\right)$

$\mathrm{Ann}_R(V)=\{0\}\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\Phi=\{0\}$

$\left(\begin{array}{l}a\in\ker\Phi\Rightarrow a\cdot v=0\ \forall v\in V\\ \Rightarrow a\in \mathrm{Ann}_R(V)\Rightarrow a=0\end{array}\right)$

$x\in R$. $V(x):=\{a\in V\mid x\cdot a=0\}$

设 R 为交换环. 则 $V(x)+V(y)\subseteq V(xy)$

$$\mathrm{Tor}(V):=\{a\in V\mid \exists\, 0\neq x\in R,\ s.t\ x\cdot a=0\}=\sum_{x\in R\setminus\{0\}}V(x)$$

$\mathrm{Tor}(V)$ 为 V 的子模, 称为挠子模.

$\mathrm{Tor}(V)=V$ 则 V 是周期的, $\mathrm{Tor}(V)=\{0\}$ 则 V 称为无挠模.

例: 1) 有限交换群作为 $\mathbb{Z}$-模是周期的

2) V_A 作 $P[x]$-模是周期的. 挠率为 A 的极小多项式生成的理想.

命题1: $\mathrm{Ann}_R(V)$ 为 R 的双边理想. 定义 $R/\mathrm{Ann}(V)\times V\longrightarrow V$ 则 V 为忠实的 $R/\mathrm{Ann}(V)$-模.

$(\bar r,\ v)\longrightarrow rv$

证: $\forall r_1,r_2\in \mathrm{Ann}_R(V)$, $s_1,s_2\in R$

$r_1v=r_2v=0\quad\forall v\in V\Rightarrow (r_1-r_2)v=0$

$(s_1r_1s_2)v=s_1r_1(s_2v)=0\quad \forall v\in V$

$\Rightarrow r_1-r_2\in \mathrm{Ann}_R(V)\Rightarrow \mathrm{Ann}_R(V)$ 为双边理想.

$s_1r_1s_2\in$

· 良定义. $r_1+\mathrm{Ann}_R(V)=r_2+\mathrm{Ann}_R(V)\Rightarrow r_1-r_2\in \mathrm{Ann}_R(V)\Rightarrow (r_1-r_2)v=0\ \forall v\in V$

$\Rightarrow r_1v=r_2v\quad\forall v\in V$.

利用 V 为 R-模 可验证 V 为 $R/\mathrm{Ann}_R(V)$-模.

$\bar r\in \mathrm{Ann}_{R/\mathrm{Ann}_R(V)}(V)\Rightarrow \bar r\cdot v=0\quad\forall v\in V\Rightarrow rv=0\ \forall v\in V\Rightarrow r\in \mathrm{Ann}_R(V)$

$\Rightarrow \bar r=0\Rightarrow \mathrm{Ann}_{R/\mathrm{Ann}_R(V)}(V)=\{0\}$

U,V 为 R-模. $\mathrm{Hom}_R(U,V):=\{\varphi: U\longrightarrow V$ 为 R-模同态$\}$

$\forall f,g\in \mathrm{Hom}_R(U,V)$ 定义 $(f+g)(a)=f(a)+g(a)\quad\forall a\in U$

则 $(\mathrm{Hom}_R(U,V),+)$ 构成交换群

定义: $R\times \mathrm{Hom}_R(U,V)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(U,V)$

$(r,\ f)\longrightarrow r\cdot f\quad \left(\begin{array}{l}rf: U\longrightarrow V\\ \qquad a\longrightarrow rf(a)\end{array}\right)$

$r(f+g)(a)=rf(a)+rg(a)=(rf)(a)+(rg)(a)$

$\Rightarrow r(f+g)=rf+rg$

可验证: $\mathrm{Hom}_R(U,V)$ 为 R-模

(当 $U=V$ 时 $\mathrm{End}_R(U):=\mathrm{Hom}_R(U,U)$ 成为环

注意到 U,V 交换群 即 $\mathbb{Z}$-模, 则群同态 即 $\mathbb{Z}$-模同态)

注意到 V 为交换群 即 $\mathbb{Z}$-模. 故其群同态即为 $\mathbb{Z}$-模同态
$\therefore$ $End(V) = End_{\mathbb{Z}}(V)$ 通常 $End_R(V) \subseteq End_{\mathbb{Z}}(V)$)

$End_R(V)$ 称为 R 在 V 上的中心化子

R-模 V 称为不可约的 (或单的) 如果 1) $V \neq \{0\}$.

2) $\{0\}$ 与 V 是 V 的所有子模

(当 R 不含幺元时还要求 3) $R\cdot V \neq \{0\}$)

非 0 模 V 是不可约的 $\iff$ $V = R\cdot v$ $\forall$ $0 \neq v \in V$.

命题 2: (Schur 引理) 设 V, W 为不可约 R-模. 若 $\sigma: V \to W$ 为非 0 同态 则 σ 为同构. 特别地: $End_R(V)$ 为除环.

$V_1, \cdots V_n$ 为 R-模 $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$

定义 $+$: $(u_1, \cdots u_n) + (v_1, \cdots v_n) = (u_1+v_1, \cdots u_n+v_n)$

$(V, +)$ 构成交换群

$$R \times V \longrightarrow V$$
$$(r, (v_1, \cdots v_n)) \longrightarrow (rv_1, \cdots rv_n)$$

V 成为 R-模.

称为 $V_1, \cdots V_n$ 的 (外) 直和.

V 为 R-模, $V_1, \cdots V_n$ 为 V 的子模 若 $V = \sum_{i=1}^n V_i$ 且
$V_i \cap (\sum_{j \neq i} V_j) = \{0\}$ 则称 V 为 $V_1, \cdots V_n$ 的 (内) 直和.

记作 $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$.

$\{v_1, \cdots v_n\} \subseteq V$ 称为 R-线性无关的 如果
$\sum_{i=1}^n r_i v_i = 0, r_i \in R \Rightarrow r_1 = \cdots = r_n = 0$

自由模: R-模 V 称为自由的, 如果 $\exists$ $B \subseteq V$ s.t. 对 $\forall$ R-模 W 及 $\forall$ 映射
$f: B \longrightarrow W$, $\exists!$ R-模同态 $\varphi: V \longrightarrow W$ 满足 $\varphi(b) = f(b)$ $\forall b \in B$.

称 B 为 V 的基, (B 自由的生成 V.)

$V = \{0\}$ 为自由模 ϕ 为 V 的基.

命题 3: 下述断言等价:

1) $\{v_1, \cdots v_n\}$ 自由地生成 V;
2) $\{v_1, \cdots v_n\}$ R-线性无关且 $V = \langle v_1, \cdots v_n \rangle$.
3) $\forall$ $v \in V$, v 唯一写成 $v = \sum_{i=1}^n r_i v_i, r_i \in R$ 的形式.
4) $V = Rv_1 \oplus \cdots \oplus Rv_n$ 且 $Ann_R(v_i) = \{0\}$ $\forall$ $1 \leq i \leq n$.
5) $V \cong \underbrace{{}_RR \oplus \cdots \oplus {}_RR}_{n}$

命题3中之n称为V之秩. 当R为非交换环时秩不唯一.

例: R为非交换环. $R[X]$为R-模 $S=\mathrm{End}_R(R[X])$

$\forall n,m>0$, S^n为自由S-模且 $S^n\cong S^m$.

$I\subseteq R$为理想 V为R-模

$IV:=\langle\{xv \mid x\in I, v\in V\}\rangle$ 为V之子模

V/IV 为商模,

定义: $R/I \times V/IV \longrightarrow V/IV$

$(r+I,\ v+IV) \longrightarrow rv+IV$

良定义: $r+I=r'+I$

$$v+IV=v'+IV \Rightarrow v-v'\in IV \Rightarrow \begin{array}{l} r(v-v')\in IV \\ r'(v-v')\in IV\end{array}$$

$$\Rightarrow rv-r'v'-rv'+r'v\in IV$$

$$\Rightarrow rv-r'v'-(r-r')v'+r'(v-v')\in IV$$

$$\Rightarrow rv-r'v'\in IV \Rightarrow rv+IV=r'v'+IV$$

易验证 V/IV 为 R/I-模.

设V为自由R-模, $B\subseteq V$为基. 则 $\sum_{i=1}^{l} x_i \underset{\underset{B}{\Uparrow}}{b_i}\in IV \Longleftrightarrow \forall 1\le i\le l,\ x_i\in I$.

命题4: 设R为含幺交换环, V为有限域自由R-模. 则V之秩唯一.

证: 事实: R中存在极大理想. 令I为R之极大理想.

则R/I为域. $\therefore V/IV$为R/I-向量空间.

1) 设$V=\langle v_1,\cdots v_n\rangle$. 则$\{v_1+IV,\cdots v_n+IV\}$为$V/IV$之生成元集

$\therefore V/IV$为有限维之R/I-向量空间.

2) 设$B\subseteq V$为基. 记$\bar{x}=x+I$, $x\in R$, $\bar{b}=b+IV$, $b\in B$.

设$\exists\, l>0$, $x_1,\cdots x_l\in R$, $b_1,\cdots b_l\in B$ s.t. $\sum_{i=1}^{l}\bar{x}_i\bar{b}_i=0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{l}(x_i+I)(b_i+IV)=IV \Rightarrow \sum_{i=1}^{l}x_ib_i\in IV \Rightarrow \forall 1\le i\le l,\ x_i\in I$$

$$\Rightarrow \forall 1\le i\le l,\ \bar{x}_i=0.$$

综合1)与2), 有$B\subseteq V$为基. 则$\{\bar{b}\mid b\in B\}$为R/I-向量空间V/IV之基.

R/I向量空间V/IV基之数目唯一 $\Rightarrow V$之秩是唯一的. □

注: 自由R-模之生成元集中不一定含基. 例: $p\mathbb{Z}+q\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$, p,q为互异素数.

但 $pq-qp=0$ $\therefore \{p,q\}$不是基. 而 $p\mathbb{Z}$, $q\mathbb{Z}$均不等于$\mathbb{Z}$.

定理1: 任意有限型R-模是有限型自由R-模之同态像.

自由模之子模是否是自由的?

定理1：任意有限型 R-模是有限型自由 R-模的同态像。

自由模的子模是否是自由的？

答：否。例：设 $R=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，$U=(2+6\mathbb{Z})R$，$V=(3+6\mathbb{Z})R$

则 $R=U\oplus V$，但 U，V 都不是自由 R-模（$\because |R|=6$ 而 $|U|=3$，$|V|=2$）

定理2：设 R 为 PID，则秩为 n 的自由 R-模的子模是秩 $\le n$ 的自由 R-模。

证：（归纳法）设 V 为秩为 n 的自由 R-模，$U\subseteq V$ 为子模。

当 $n=1$ 时，$V\cong R$，则 $U\cong J$，J 为 R 的理想。$\because R$ 为 PID $\therefore J=Ru$。

若 $u=0$，则 $U=\{0\}$。

若 $u\neq 0$ 则 $\forall\, 0\neq r\in R$，$ru\neq 0 \Rightarrow Ann_R(u)=\{0\} \Rightarrow J$ 自由且 $\mathrm{rank}J=1$

$\Rightarrow U$ 自由且 $\mathrm{rank}U=1$

设 $V=Rv_1\oplus\cdots\oplus Rv_n$，$\{v_1,\cdots v_n\}$ 为 V 的基。

令 $V'=Rv_2\oplus\cdots\oplus Rv_n$。则 V/V' 自由且 v_1+V' 为 V/V' 的基。

考虑自然同态：
$$\pi: V\longrightarrow V/V' \qquad \ker\varphi = V'$$
$$v\longrightarrow v+V'$$

则 $U\cap V'$ 为 V' 的子模，$\pi(U)$ 为 V/V' 的子模。

由归纳假设，$U\cap V'$ 为自由 R-模且 $\mathrm{rank}(U\cap V')\le n-1$

$\pi(U)$ 为自由 R-模且 $\mathrm{rank}(\pi(U))\le 1$。

若 $\pi(U)=\{0\}$ 则 $U\subseteq V'$ 结论成立。

设 $\pi(U)\neq\{0\}$，令 $u_1\in U$ s.t $\pi(u_1)$ 为 $\pi(U)$ 的基。

令 $\{u_2,\cdots u_m\}$ 为 $U\cap V'$ 的基，$m\le n$。

下证 $\{u_1,\cdots u_m\}$ 为 U 的基。

· $\forall u\in U$，$\pi(u)=r_1\pi(u_1)$，$r_1\in R \Rightarrow u-r_1u_1\in\ker\varphi=V'$

$\Rightarrow u-r_1u_1=r_2u_2+\cdots+r_mu_m$，$r_i\in R$

$\Rightarrow u\in\langle u_1,\cdots u_m\rangle$。

· 设 $r_1u_1+\cdots+r_mu_m=0$，$r_i\in R \Rightarrow \pi(\sum_{i=1}^m r_iu_i)=\pi(r_1u_1)$

$=r_1\pi(u_1)=0$

$\Rightarrow r_1=0$

$\Rightarrow r_2u_2+\cdots+r_mu_m=0$

$\Rightarrow r_i=0 \quad \forall\ 1\le i\le m$。 □

推论：主理想环上有限型模的每个子模都是有限型的。

定理3：R 为 PID，V 为有限生成 R-模，则

1) $V\cong F\oplus R/Ra_1\oplus\cdots\oplus R/Ra_s$

其中 F 为自由 R-模，$\{0\}\subsetneq Ra_s\subsetneq\cdots\subsetneq Ra_1\subsetneq R$。

2) $V \cong F \oplus R/Rp_1^{n_{11}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_1^{n_{1t_1}}$ $\quad n_{11} \le n_{12} \le \cdots \le n_{1t_1}$

$\oplus R/Rp_2^{n_{21}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_2^{n_{2t_2}}$ $\quad \vdots$

$\vdots$

$\oplus R/Rp_s^{n_{s1}} \oplus \cdots \oplus R/Rp_s^{n_{st_s}}$ $\quad n_{s1} \le n_{s2} \le \cdots \le n_{st_s}$

其中 $p_1, \dots, p_s$ 为 R 中的素元.

应用：(环的整扩张)

设 R 为含幺交换环，$S \subseteq R$ 为含幺子环.

$a \in R$ 称为在 S 上整的 如果 $\exists\, n > 0$, $s_0, \dots s_{n-1} \in S$ s.t.

$$a^n + s_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

$$S[a] := \left\{ \sum_{i=0}^{l} s_i a^i \;\middle|\; \begin{array}{l} l > 0 \\ s_i \in S \end{array} \right\}$$ 为 R 的子环.

$$\begin{aligned} S \times R &\longrightarrow R \\ (s, r) &\longrightarrow sr \end{aligned}$$ 则 R 为 S-模. $S[a]$ 为子模.

命题5：下面断言等价：

1) $a \in R$ 在 S 上是整的

2) $S[a]$ 是有限型 S-模.

证：1) $\Rightarrow$ 2) 设 $a^n + s_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \Rightarrow a^n = -\sum_{i=0}^{n-1} s_i a^i$.

$\Rightarrow \forall\, v \in S[a]$, $u = \sum_{i=0}^{n-1} s_i' a^i$, $s_i' \in S$.

$\Rightarrow S[a] = \langle 1, a, \dots, a^{n-1} \rangle$.

2) $\Rightarrow$ 1) 设 $S[a] = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$, 其中 $u_1 = 1$.

则 $a u_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} u_j$, $r_{ij} \in S$. 即

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = (r_{ij}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(aI_n - (r_{ij}))}_{= A} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = 0$$

左乘 A 的伴随矩阵：$$\begin{pmatrix} \det(A) & & \\ & \ddots & \\ & & \det(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = 0$$

$\because u_1 = 1 \quad \therefore \det(A) = \det(aI_n - (r_{ij})) = 0$

$\Rightarrow a$ 在 S 上整的. $\square$

S 在 R 中的整闭包：$S(R) := \{ a \in R \mid a \text{ 在 } S \text{ 上整的} \}$

定理? 设 S 为 PID, $S(R)$ 为 R 的子环 (注：结论对于一般的 S 也成立).

S在R中的整闭包：$S(R) := \{a \in R \mid a$在S上整的$\}$

定理3：设S为PID. $S(R)$为R的子环（注：结论对于一般的S也成立）.

证：$u, v \in S(R)$.　　$S[u,v] := \{\sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m} r_{i,j}u^i v^j \mid r_{i,j} \in S\}$.

$S[u,v] = \langle \{u^i v^j \mid 0 \le i \le l, 0 \le j \le m\} \rangle$为有限型S-模.

$S[u-v]$, $S[uv]$为$S[u,v]$的子模 $\Rightarrow$ $S[u-v]$, $S[uv]$为有限型的

$\Rightarrow u-v, uv \in S(R) \Rightarrow S(R)$为子环.

例：$R = \mathbb{Q}$, $S = \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Q}$

若r在$\mathbb{Z}$上整的 则 $r \in \mathbb{Z}$.

· $\alpha \in \mathbb{C}$, α在$\mathbb{Z}$上整的, 则称α为代数整数.

比如：$\sqrt{-1}$, $\sqrt{2}$, ……　$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$, ……