2018年10月8日 13:27

例：$G=SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

$p=2$. $SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$

$S_3=\{1,(12),(13),(23),(123),(132)\}$

断言：$SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong S_3$

群的表现(presentation)：G为群

$\exists$自由群F及满同态$\pi:F\to G$

这样的$\pi:F\to G$称为G的一个自由表现

$\ker\pi$称为该表现的关系集

令$R\subseteq F$ s.t. $\langle R\rangle_{nor}=\ker\varphi$. 则称$R$为$\pi$的定义关系集

设X为F的基. 则$S=\pi(X)$为G的生成元集

此时称G是由生成元S及定义关系式$r(S)=1$, $r\in R$所确定的群. 记作$G=\langle S\mid r(S)=1,\forall r\in R\rangle$

当$|S|<+\infty$且$|R|<+\infty$时称G是有限定义的

(或有限表现)

例：1) $G=F$为自由群 则$R=\varnothing$

$\therefore$ 自由群是没有定义关系的群

2) $G=S_3$

令$a=(123)$, $b=(12)$. 则$G=\langle a,b\rangle$且$a^3=1$ $b^2=1$ $(ab)^2=1$

断言：$G=\langle a,b\mid a^3=1\ b^2=1\ abab=1\rangle$

证：令 $F=\langle x,y\rangle$ 秩为2的自由群

$$\begin{aligned}\pi: F &\longrightarrow G\\ x &\longrightarrow a\\ y &\longrightarrow b\end{aligned}$$ 满同态.

记 $H=\langle x^3, y^2, xyxy\rangle_{nor}$ 则 $H \lhd \ker\pi$.

考察 $|F/H|$

$$xyxyH=H \Rightarrow yxH=x^{-1}Hy^{-1}H=x^2HyH=x^2yH$$
$$(x^3H=H,\ y^2H=H)$$

$\therefore \forall f\in F.\quad fH=x^iy^jH$ 其中 $0\le i\le 2\quad 0\le j\le 1$

$\therefore\quad |F/H|=6$

$\because\quad F/\ker\pi \cong G\quad \therefore |F/\ker\pi|=|G|=6$

$\therefore\quad H=\ker\pi$ i.e 生成元 $a.b$ 及定义关系式 $a^3=1, b^2=1$

$abab=1$ 确定了 G.

即 $G=\langle a, b \mid a^3=1, b^2=1\ abab=1\rangle$

3) $G=SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

令 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. 则 $A^3=1.\ B^2=1.\quad ABAB=1.$

与2)完全类似可证：$SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})=\langle A.B \mid A^3=1.\ B^2=1, ABAB=1\rangle$.

$\therefore\quad SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong S_3$

$G=SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\qquad \{\pm1\}\lhd SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

$PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}):=SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/\{\pm1\}.\qquad \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}):=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\cup\{\infty\}.$

$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}\in PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$

$$A: \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$
$$x \longmapsto \frac{a_1 x + a_2}{a_3 x + a_4}$$

$PSL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{ \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$上的变换群$\}$.