多变元 q- 超几何项的乘法分解 [1]

陈绍示 † 冯如勇 ‡ 付国锋 ‡ 康劲 ‡

(† Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh 27695)

(‡ 中国科学院数学与系统科学研究院, 数学机械化重点实验室, 北京 100190)

摘要 本文将 Ore-Sato 定理的 q- 模拟由非混合情形推广到混合情形，证明了可驯条件下，混合 q- 超几何项可以分解为有理函数与 q- 阶乘项的乘积.

关键词 q- 超几何项， q- 阶乘项，乘法分解，结构定理

MR(2000) 主题分类号

§1 引 言

超几何项在组合数学与特殊函数理论中起着重要的作用. 20 世纪 30 年代， Ore 在文献 [11] 中给出了两个变元的相容有理函数的结构刻画. 随后， Sato 在 60 年代刻画了多个变元情形 (文献 [12]). 根据他们的结果，即 Ore–Sato 定理，我们得到多变元超几何项的乘法分解. 即每一个超几何项可以写成一个有理函数和一些阶乘项的乘积. 但是他们的工作当时并不为人所熟知，后来侯庆虎 [9, 10] 以及 Abramov 和 Petkovšek [2] 分别在 2001 年和 2002 年又重新发现并证明了该结论. Ore–Sato 定理的一个重要应用是证明 Zeilberger 算法的终止性. 例如 Abramov 在 [1] 中导出的 Zeilberger 算法的终止条件就依赖于 Ore–Sato 定理.

q- 超几何项是超几何项的 q- 模拟. Gel'fand, Graev 和 Retakh 在文献 [8] 中描述了 q-差分情形下的 Ore–Sato 定理，但并未给出具体证明. 陈永川，侯庆虎，穆彦平在文献 [7] 中利用 Ore–Sato 定理的 q- 模拟导出了 q- 差分情形下的 Zeilberger 算法终止性条件.

在 q- 差分情形中，如果 q- 平移算子只是关于同一基底作平移，我们称之为非混合情形. 如果 q- 平移算子可以对不同基底作平移，则称之为混合情形. Gel'fand 等人给出的 q-模拟是非混合情形的 q- 模拟.

本文研究混合情形下 Ore–Sato 定理的 q- 模拟，内容安排如下：第二节将严格地构造一个 q- 差分域，它是 q- 超几何项的基域；第三节介绍 q- 超几何项及其相容条件的定义，并引入可驯的概念；第四节引入了平移群及其在有理函数上的作用；第五节介绍群环、余圈和余边缘等概念；第六节证明了可驯的混合情形下，任一 q- 超几何项可以分解为有理函数和 q-阶乘项乘积的形式，并刻画了 q- 阶乘项的结构，这是本文的主要贡献.

在本文中， $R^{\times}$ 表示环 R 中非零元素组成的集合.

[1] **该工作得到美国国家自然科学基金** (No. CCF-1017217), **国家自然科学基金青年基金** (No.10901156) **和国家自然科学基金青年基金** (No.60821002/F02) **资助**

§2 q- 差分域

令 C 是特征为零的代数闭域， $q_1,\ldots,q_n \in C^\times$ 不是单位根， $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 是 C 上的恒等映射. 考虑如下的偏差分方程组:

$$\tau_1\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\tau_n\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

由于该方程组的系数矩阵关于乘法是交换的，从而满足文献 [4] 中所列出的矩阵相容条件，由文献 [4] 中定理 1 可知，在 C 的某一 Picard–Vessiot 环 R 中存在上述方程组的非零解，记为 $(q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n})^T$, 其中 $y_1,\ldots,y_n$ 是 k 上代数无关的 n 个未定元. 再由文献 [4] 中的定理 2 可得如下结论:

1. $C \subset R$;
2. τ_i 可扩展为 $R \to R$ 的单同态，且 $\tau_i\,(q_i^{y_i}) = q_i^{y_i+1}$, 其中 $1 \le i \le n$;
3. 设 $r \in R$, 对于 $i = 1,\ldots,n$ 等式 $\tau_i(r) = r$ 都成立当且仅当 $r \in C$;
4. $q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}$ 在 R 中可逆.

引理 2.1 $q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}$ *在 C 上代数无关.*

证明: 假设 $q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}$ 在 C 上代数相关，即它们满足某一个系数在 C 上的非零多项式. 不妨假设出现单项式最少的多项式为

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} a_{i_1 i_2\ldots i_n} q_1^{i_1 y_1}\ldots q_n^{i_n y_n} = 0, \tag{1}$$

其中 $a_{i_1\ldots i_n} \in C^\times$. 由于 $q_i^{y_i}$ 在扩环中是可逆的，上述方程的左边至少有两项.

不妨假设 (1) 左边出现的 $q_1^{y_1}$ 的次数不全相同，那么上述方程可改写为:

$$\sum_{j=0}^{\ell} b_j(q_2^{y_2},\ldots,q_n^{y_n})\, q_1^{jy_1} = 0, \tag{2}$$

其中 $\ell > 0$, $b_j \in C[q_2^{y_2}, \ldots, q_n^{y_n}]$, 且 $b_\ell \neq 0$. 将算子 τ_1 作用在 (2) 上可得

$$\sum_{j=0}^{\ell} q_1^j \, b_j(q_2^{y_2}, \ldots, q_n^{y_n}) \, q_1^{jy_1} = 0, \tag{3}$$

那么方程 (2) 乘以 q_1^ℓ 与方程 (3) 的差为：

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} \left(q_1^\ell - q_1^j\right) \, b_j(q_2^{y_2}, \ldots, q_n^{y_n}) \, q_1^{jy_1} = 0. \tag{4}$$

因为 q_1 不是单位根, 所以, 对于 $j = 0, \ldots, \ell - 1$, $q_1^\ell \neq q_1^j$. 从而 (4) 的左边系数不全为零, 即：$q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}$ 满足项数更少的方程，这与 (1) 的项数最少矛盾．由此推出 $q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}$ 在 C 上代数无关. □

由上述引理可知, $C\,(q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n})$ 是一个良定义的有理函数域,记为 F．对于 $i = 1, \ldots, n$, τ_i 为 F 上的自同构，它将 $q_i^{y_i}$ 映为 $q_i^{y_i+1}$ 并且保持其余的 $q_j^{y_j}$ 不变，我们称 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ 为 F 上的 *q- 平移算子*, $(F, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ 构成一个 q- 差分域.

设 $c \in F$. 如果 $\tau_i(c) = c$ 对于所有满足 $1 \leq i \leq n$ 的 i 都成立，那么我们称 c 为 *常数*. 下面我们确定 F 中的常数.

如果 $f = cq_1^{i_1 y_1} \cdots q_n^{i_n y_n}$, 其中 $c \in C$ 且 $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, 则称 f 为单项式．进一步，如果 $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$, 则称它为 Laurent 单项式.

引理 2.2 *设 $f \in C\,[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}]$. 如果 $\tau_1^{\ell_1} \cdots \tau_n^{\ell_n}(f) = c\,f$, 其中 $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathbb{Z}$, $c \in C$, 那么对于 f 中出现的任意单项式 A 都有， $\tau_1^{\ell_1} \cdots \tau_n^{\ell_n}(A) = c\,A$.*

证明： 设 $f = A_1 + A_2 + \ldots + A_s$, 其中 $A_1, \ldots, A_s$ 是 f 中出现的彼此不同的单项式．根据 τ_i 的定义， $\tau_1^{\ell_1} \cdots \tau_n^{\ell_n}(A_i) = c_i\,A_i$, 其中 $c_i \in C$, $i = 1, \ldots, s$.

因为 $\tau_1^{\ell_1} \cdots \tau_n^{\ell_n}(f) = c\,f$, 所以

$$(c - c_1)A_1 + (c - c_2)A_2 + \ldots + (c - c_s)A_s = 0.$$

从而对于 $i = 1, \ldots, s$, 有 $c = c_i$, 即： $\tau_1^{\ell_1} \cdots \tau_n^{\ell_n}(A_i) = c\,A_i$. □

下面引理说明非零有理函数的所有 q- 差商都是常数等价于它是 Laurent 单项式.

引理 2.3 *设 $f \in F^\times$. 则 $\tau_i(f)/f \in C$ 对于 $i = 1, \ldots, n$ 都成立当且仅当 f 是 Laurent 单项式.*

证明： (充分性) 如果 f 是 Laurent 单项式，设 $f = cq_1^{i_1 y_1} \cdots q_n^{i_n y_n}$, 其中 $c \in C$, $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}$, 直接计算可得 $\tau_i(f)/f \in C$.

(必要性) 假设 $\tau_i(f)/f \in C$ 对于 $i = 1, \ldots, n$ 都成立.

首先我们考虑 f 是 $C\,[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}]$ 中多项式的情形．如果 f 不是单项式，不妨设 f 中出现如下两个不同的单项式：

$$A = q_1^{iy_1} A', \quad 和 \quad B = q_1^{jy_1} B',$$

其中 $i>0$, $i\neq j$, A',B' 不为零且不含有变元 $q_1^{y_1}$. 由于存在 $c\in C$ 使得 $\tau_1(f)=cf$, 则由引理 2.2 可知, $\tau_1(A)=cA$, $\tau_1(B)=cB$. 另一方面，我们有 $\tau_1(A)=q_1^iA$, $\tau_1(B)=q_1^jB$. 因此, $q_1^i=q_1^j$. 从而 q_1 是单位根，这与前面关于 q_1 的假设矛盾. 因此 f 是单项式.

下面考虑有理函数情形. 设 $f=P/Q$, 其中 $P,Q\in C\left[q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}\right]$ 并且互素. 由 $\tau_i(f)/f\in C$, 可知存在 $c_i\in C$ 使得 $\tau_i(P)Q=c_i\tau_i(Q)P$. 所以, $P\mid\tau_i(P)$ 且 $Q\mid\tau_i(Q)$. 又因为 τ_i 不会改变多项式的次数，所以 $\tau_i(P)/P$ 和 $\tau_i(Q)/Q$ 都在 C 中. 由多项式情形可知, P 和 Q 均为单项式. 从而, f 是 Laurent 单项式. □

引理 2.4 设 $f\in F^{\times}$. 如果对于某个 $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\tau_i(f)/f\in C$, 那么存在 $m_i\in\mathbb{Z}$ 使得 $\tau_i(f)/f=q_i^{m_i}$.

证明: 只需把 f 看成关于 $q_i^{y_i}$ 的一元有理函数, 由上述引理可知, f 是关于 $q_i^{y_i}$ 的 Laurent 单项式, 其系数所在的域为

$$C\left(q_1^{y_1},\ldots,q_{i-1}^{y_{i-1}},q_{i+1}^{y_{i+1}},\ldots,q_n^{y_n}\right).$$

于是, $\tau_i(f)/f$ 一定是 q_i 的某个幂次. □

基于引理 2.3, 可以证明所有的常数都包含在 C 中.

命题 2.5 F 中的元素是常数当且仅当它在 C 中.

证明: 显然, C 中的所有元素均为常数. 现在假设 f 是 F 中的常数. 那么 $\tau_i(f)=f$ 对所有满足 $1\leq i\leq n$ 的 i 成立. 由引理 2.3 可知

$$f=cq_1^{i_1y_1}\cdots q_n^{i_ny_n},$$

对某个 $c\in C$ 和某组 $i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{Z}$ 成立. 如果 $i_1\neq 0$, 那么 $\tau_1(f)=q_1^{i_1}f$. 所以 $q^{i_1}=1$, 与 q 不是单位根矛盾. 即 $i_1=0$. 同理，我们可以证明 $i_2=\cdots=i_n=0$. 所以 $f=c$. □

§3 q- 超几何项及其相容条件

环 E 称为 F 的 *q- 差分环扩张*, 如果满足下列条件:

1. $F\subset E$;
2. F 中的 q- 平移算子 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 可以扩展为 E 上的单同态;
3. 扩展后的单同态两两交换.

定义 3.1 令 H 为 E 中的可逆元，如果存在 $f_1,\ldots,f_n\in F$ 使得

$$\frac{\tau_1(H)}{H}=f_1,\ldots,\frac{\tau_n(H)}{H}=f_n.$$

则称 H 为 F 上的一个 q- 超几何项, 有理函数 f_i 称为 H 关于 τ_i 的 q- 差商. 进一步，如果 $q_1=q_2=\cdots=q_n$, 我们称该 q- 超几何项是非混合的，否则称为混合的.

下面，我们给出一组有理函数关于 q- 平移算子 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 的相容性定义.

定义 3.2 令 $f_1,\ldots,f_n$ 为非零的有理函数. 如果

$$\frac{\tau_i(f_j)}{f_j}=\frac{\tau_j(f_i)}{f_i} \tag{5}$$

对于所有满足 $1\leq i<j\leq n$ 的 i,j 都成立，则称它们为 相容 的.

对于 F 上的 q- 超几何项 H 而言，由于 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 的复合运算两两交换，因此可验证 H 的 q- 差商是相容的. 另一方面，给定一组相容的有理函数 $f_1,\ldots,f_n$, 由文献 [4] 中定理 2 可知, 存在 F 的某一扩环 E, 使得 E 包含一个 q- 超几何项, 其 q- 差商分别为 $f_1,\ldots,f_n$.

在本文中，我们将要证明任给 q- 超几何项，可以分解为有理函数和 q- 阶乘项的乘积. 其中， q- 阶乘项是指一类特殊的 q- 超几何项，它的 q- 差商为若干个 q- 整线性多项式的乘积. 文献 [7, 8] 已经刻画了该结论的非混合情形. 本文的贡献是将非混合情形的结论推广至混合情形.

为了刻画混合情形的 q- 超几何项的乘法分解, 我们需要对 $q_1,\ldots,q_n$ 再加以限制. 设 $S=\{S_1,\ldots,S_k\}$ 为 $\{1,\ldots,n\}$ 的一个分拆，并且 S_ℓ 对于 $\ell=1,\ldots,k$ 都满足： $i,j\in S_\ell$ 当且仅当 $q_i=q_j$, 我们称该分拆为 $q_1,\ldots,q_n$ 的 下标分拆. 如果 $i\in S_\ell$, 令 $p_\ell=q_i$, 称 p_ℓ 为 S_ℓ 的 代表元. 显然，所有的代表元即为 $q_1,\ldots,q_n$ 中所有不相同的元素.

定义 3.3 对于代表元 $p_1,\ldots,p_k$ 的幂乘而言，如果

$$\prod_{\ell=1}^{k}p_l^{m_\ell}=1\Leftrightarrow m_1=\cdots=m_k=0.$$

则称此时的 $q_1,\ldots,q_n$ 是 可驯 的.

显然， $q_1,\ldots,q_n$ 是可驯的意味着它们都不是单位根. 进一步，如果 $q_1,\ldots,q_n$ 是可驯的，则称 q- 差分域 F 为 可驯 的，否则称 F 为 非可驯 的.

下文中，我们总假设 F 是可驯的.

§4 q- 平移群及其作用

设 $\Xi=\{\tau_1^{\ell_1}\ldots\tau_n^{\ell_n}|\,\ell_1,\ldots,\ell_n\in\mathbb{Z}\}$ 是 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 在复合运算下生成的群. 因为 q- 平移算子可交换，所以 Ξ 是阿贝尔群. 在不会出现混淆的情况下，将 Ξ 的单位元记为 1. 进一步有如下结论成立.

引理 4.1 群 Ξ 是由 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 生成的自由群.

证明： 设 $\tau=\tau_1^{\ell_1}\cdots\tau_n^{\ell_n}$ 为 Ξ 中元素. 如果 $\tau=1$, 那么

$$\tau\left(q_i^{y_i}\right)=q_i^{\ell_i+y_i}=q_i^{y_i}.$$

从而，$q_i^{\ell_i}=1$. 由于 q_i 不是单位根，所以 $\ell_i=0$. 从而，单位元 1 在群 Ξ 中的表示是唯一的，所以 Ξ 是自由群. □

由有限生成阿贝尔群结构定理可知，Ξ 的任意子群都是有限生成的自由阿贝尔群.

设 $f\in F, \tau\in\Xi$. 我们将 $\tau(f)$ 记作 f^τ. 容易验证 $(\cdot)^\tau$ 诱导出 Ξ 在 F 上的一个群作用. 对于 $F^\times$ 中元素 f, 定义集合

$$\Xi_f=\{\tau\in\Xi \mid f^\tau/f\in C\}.$$

可以验证 Ξ_f 是 Ξ 的子群，我们称 Ξ_f 为 f 的迷向子群.

利用迷向子群，可以将引理 2.3 重述为

引理 4.2 迷向子群 Ξ_f 等于 Ξ 当且仅当 f 是一个 *Laurent* 单项式.

给定多项式 $h\in C\left[q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}\right]$, 下面引理刻画 Ξ_h 中的元素.

引理 4.3 令 $S=\{S_1,\ldots,S_k\}$ 为 $q_1,\ldots,q_n$ 的下标分析，并且 $h\in C\left[q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}\right]$ 不是单项式. 设

$$A=aq_1^{i_1y_1}\cdots q_n^{i_ny_n}\quad,\quad B=bq_1^{j_1y_1}\cdots q_n^{j_ny_n}$$

为 h 中出现的任意两个单项式，其中 $a,b\in C^\times$, 且 $\tau=\tau_1^{\ell_1}\cdots\tau_n^{\ell_n}$. 那么 $\tau\in\Xi_h$ 当且仅当对每一个 $t\in\{1,\ldots,k\}$ 都有

$$\sum_{s\in S_t}\ell_s(i_s-j_s)=0.$$

证明： 由 τ 的定义可知

$$\frac{A^\tau}{A}=q_1^{\ell_1i_1}\cdots q_n^{\ell_ni_n}\quad 和\quad \frac{B^\tau}{B}=q_1^{\ell_1j_1}\cdots q_n^{\ell_nj_n}.$$

由此可知，$\frac{h^\tau}{h}\in C$ 当且仅当对于 h 中出现的任意两个单项式 A,B 有 $\frac{A^\tau}{A}=\frac{B^\tau}{B}$, 即

$$q_1^{\ell_1(i_1-j_1)}\ldots q_n^{\ell_n(i_n-j_n)}=1.$$

由于 F 是可驯的，上面的式子等价于对所有的 $t\in\{1,\ldots,k\}$ 有

$$p_t^{\sum_{s\in S_t}\ell_s(i_s-j_s)}=1,$$

其中 p_t 是 S_t 的代表元. 由于 p_t 不是单位根，它又等价于，$\sum_{s\in S_t}\ell_s(i_s-j_s)=0$ 对所有的 $t\in\{1,\ldots,k\}$ 成立. □

下面的定理是这一节的主要结果.

定理 4.4 如果 $h\in C\left[q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}\right]$ 不是单项式，那么商群 Ξ/Ξ_h 是有限生成自由阿贝尔群.

证明： 首先，由 Ξ 是一个有限生成的阿贝尔群可知，Ξ/Ξ_h 是一个有限生成的阿贝尔群. 下面还需证明 Ξ/Ξ_h 是自由的. 根据有限生成阿贝尔群的结构定理，只需证明 Ξ/Ξ_h 是无扭的. 假设 $\tau\in\Xi$ 使得 $\tau\Xi_h$ 是 Ξ/Ξ_h 中一个非平凡的扭元，那么存在一个非零整数 d 使得 $\tau^d\in\Xi_h$.

设 $\tau=\tau_1^{\ell_1}\cdots\tau_n^{\ell_n}$ 且 $A=aq_1^{i_1y_1}\cdots q_n^{i_ny_n}$, $B=bq_1^{j_1y_1}\cdots q_n^{j_ny_n}$ 是 h 中出现的任意两个不同的单项式. 由引理 4.3 可知,

$$\sum_{s\in S_t} d\ell_s(i_s-j_s)=0,\quad t\in\{1,\ldots,k\}.$$

因为 d 不为 0, 所以

$$\sum_{s\in S_t} \ell_s(i_s-j_s)=0,\quad t\in\{1,\ldots,k\}.$$

由引理 4.3, $\tau\in\Xi_h$, 从而有 $\tau\Xi_h=\Xi_h$, 矛盾. □

今后，当给定多项式 h, 我们将 Ξ 中元素 τ 在 Ξ/Ξ_h 中的象记作 $\bar{\tau}$.

推论 4.5 设 $h\in C\left[q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}\right]$ 不是单项式. 假设 $\bar{\sigma}_1,\ldots,\bar{\sigma}_r$ 构成自由群 Ξ/Ξ_h 的一组基, $\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_m\in\Xi$ 构成 Ξ_h 的一组基. 那么 $m=n$ 且 $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ 是 Ξ 的一组基.

证明： 对于任意 $\sigma\in\Xi$, 存在 $i_1,\ldots,i_r\in\mathbb{Z}$ 使得 $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_1^{i_1}\cdots\bar{\sigma}_r^{i_r}$. 因此，存在 $\tau\in\Xi_h$ 使得 $\sigma=\sigma_1^{i_1}\cdots\sigma_\ell^{i_\ell}\tau$. 所以 σ 可由 $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ 表示. 下面证明 $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ 是无关的. 假设

$$\sigma_1^{j_1}\cdots\sigma_r^{j_r}\sigma_{r+1}^{j_{r+1}}\cdots\sigma_m^{j_m}=1,$$

于是有 $\bar{\sigma}_1^{j_1}\cdots\bar{\sigma}_r^{j_r}=1$. 从而， $j_1=j_2=\ldots=j_r=0$, 进一步还有， $j_{r+1}=\ldots=j_m=0$. 又因为 $\tau_1,\ldots,\tau_n$ 也是构成 Ξ 的一组基，所以 $m=n$. □

上面推论说明了 Ξ/Ξ_h 同构于中由 $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ 生成 Ξ 的某个子群. 固定这组基. 设 $\tau\in\Xi$, 则存在唯一的一组整数 $d_1,\ldots,d_r$ 使得 $\bar{\tau}=\bar{\sigma}_1^{d_1}\cdots\bar{\sigma}_r^{d_r}$. 定义 $\bar{\tau}$ 在 F 中元素 f 的作用为

$$f^{\bar{\tau}}=f^{\left(\sigma_1^{d_1}\cdots\sigma_r^{d_r}\right)}. \tag{6}$$

于是得到 Ξ/Ξ_h 在 F 上的一个群作用. 我们称该作用是由 $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ 诱导的. 由 Ξ_h 的定义可知,

$$h^{\tau}/h^{\bar{\tau}}\in C. \tag{7}$$

由定理 4.4 知，如果 $h\in C\left[q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}\right]$ 不是单项式，则商群 Ξ/Ξ_h 同构于 $\mathbb{Z}^m$, 其中 m 为某个正整数. 我们称 m 为 h 的 *秩*, 称 $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ 为 *与 h 相关的一组基*. 为了定义的完整性，我们将非零单项式的秩定义为零，因为此时 Ξ/Ξ_h 是平凡的.

§5 群环、余圈和余边缘

为了刻画关于群作用的相容条件，我们介绍与 q- 平移群 Ξ 相关的几个概念：群环、余圈以及余边缘.

下面描述群 Ξ 在 $F^\times$ 上的作用如何诱导群环 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 在 $F^\times$ 上的作用. 如果 $\theta_1,\ldots,\theta_n$ 是自由阿贝尔群 Ξ 的一组基，那么 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 可以看作 $\mathbb{Z}$ 上关于 $\theta_1,\ldots,\theta_n$ 的 Laurent 多项式环. 设 $\xi=m_1\sigma_1+\cdots+m_t\sigma_t$, 其中 $m_i\in\mathbb{Z}$, $\sigma_i\in\Xi$, 那么 Ξ 在 $F^\times$ 中元素 f 上的作用定义为：

$$f^{\xi}=\left(f^{\sigma_1}\right)^{m_1}\cdots\left(f^{\sigma_t}\right)^{m_t}. \tag{8}$$

进一步，定义

$$\Gamma_f = \left\{ \xi \in \mathbb{Z}[\Xi] \mid f^{\xi} \in C \right\}.$$

容易验证 Γ_f 是群环 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 的理想.

设 $h \in C\left[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}\right]$ 且不是单项式. 由定理 4.4 可知， Ξ/Ξ_h 是自由群. 从而 $\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 可看作 $\mathbb{Z}$ 上的 Laurent 多项式环. Ξ 到商群 Ξ/Ξ_h 的自然投射诱导 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 到 $\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 环同态 π_h, 易知 π_h 是满射. 给定多项式 h, Laurent 多项式环 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 中元素 ξ 在环同态 π 的作用下的像记为 $\bar{\xi}$. 固定与 h 相关的 Ξ/Ξ_h 的一组基. 那么这组基诱导商群 Ξ/Ξ_h 在 F 上的作用 (详见 (6) 中定义的作用). 按照 (8) 中定义，商群 Ξ/Ξ_h 的作用诱导 Laurent 多项式环 $\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 在 $F^{\times}$ 上的作用. 具体的作用如下所述. 设 $\bar{\xi} = m_1\bar{\sigma}_1 + \cdots + m_t\bar{\sigma}_t \in \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 以及 $f \in F^{\times}$. 定义

$$f^{\bar{\xi}} = \left(f^{\bar{\sigma}_1}\right)^{m_1} \cdots \left(f^{\bar{\sigma}_t}\right)^{m_t}. \tag{9}$$

由 (7), (8) 以及 (9) 可知

$$\text{对于所有的 } \xi \in \mathbb{Z}[\Xi] \text{ 都有，} \quad h^{\xi}/h^{\bar{\xi}} \in C. \tag{10}$$

下面的命题说明，如果 h 是不可约多项式，那么 $\mathbb{Z}[\Xi]/\Gamma_h \simeq \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$.

命题 5.1 *设 h 是 $C\left[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}\right]$ 中的多项式以及 π 是 Ξ 到 Ξ/Ξ_h 的自然投射诱导的 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 到 $\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 的环同态. 如果 h 不可约，那么 $\ker(\pi) = \Gamma_h$.*

证明： 如果 $h = q_i^{y_i}$, 那么 $\Xi = \Xi_h$. 从而 $\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h] = \mathbb{Z}$. 注意到在此情形下， $\tau_1 - 1, \ldots, \tau_n - 1$ 是 Γ_h 的一组生成元. 所以命题成立.

设 h 不是单项式. 如果 $\xi \in \ker(\pi)$, 那么 $h^{\bar{\xi}} = 1$. 由 (10) 可知， $h^{\xi} \in C$, 从而 $\xi \in \Gamma_h$. 另一方向，如果 $\xi \in \Gamma_h$, 那么 $h^{\xi} \in C$. 由 (10) 可知， $h^{\bar{\xi}} \in C$. 下面证明 $\bar{\xi} = 0$.

如果 $\bar{\xi} \neq 0$, 那么存在非零整数 $m_1, \ldots, m_t$ 和 Ξ/Ξ_h 中两两不同的元素 $\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_t$ 使得 $\bar{\xi} = m_1\bar{\sigma}_1 + \cdots + m_t\bar{\sigma}_t$. 因此，

$$\left(h^{\bar{\sigma}_1}\right)^{m_1} \cdots \left(h^{\bar{\sigma}_t}\right)^{m_t} \in C.$$

因为 $h^{\bar{\sigma}_i}$ 不可约，所以 $h^{\bar{\sigma}} \in C$ 意味着存在整数 i, j, 其中 $1 \leq i < j \leq t$, 使得 $h^{\bar{\sigma}_i}/h^{\bar{\sigma}_j} \in C$, 即， $h^{\bar{\sigma}_i\bar{\sigma}_j^{-1}}/h \in C$. 由 (7) 可知， $h^{\sigma_i\sigma_j^{-1}}/h \in C$. 再根据 Ξ_h 的定义，则有 $\sigma_i\sigma_j^{-1} \in \Xi_h$. 从而 $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_j$, 矛盾. □

设 h 是 $C\left[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}\right]$ 中的多项式. 如果映射 $\phi : \Xi \longrightarrow \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 对于所有 $\sigma, \tau \in \Xi$ 满足

$$\phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma) + \bar{\sigma}\phi(\tau),$$

则称映射 ϕ 为 余圈 *(cocycle)*. 进一步，如果存在公共的 $\bar{\omega} \in \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 使得

$$\text{对于所有的 } \sigma \in \Xi \text{ 都有} \quad \phi(\sigma) = (1 - \bar{\sigma})\bar{\omega},$$

则称映射 ϕ 为 余边缘 *(coboundary)*. 容易验证余边缘一定是余圈. 反之未必成立. 下面证明，当 Ξ/Ξ_h 不是循环群时，反方向也成立.

定理 5.2 设 $h \in C[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}]$. 若 h 的秩大于 1, 则由 Ξ 到 $\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 的余圈一定是余边缘.

证明： 设 $\phi : \Xi \to \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 是余圈. 那么对于所有的 $\sigma, \tau \in \Xi$ 有,

$$\phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma) + \bar{\sigma}\phi(\tau) = \phi(\tau) + \bar{\tau}\phi(\sigma).$$

从而,

$$(1-\bar{\sigma})\phi(\tau) = (1-\bar{\tau})\phi(\sigma). \tag{11}$$

设 $\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_r$ 是自由阿贝尔群 Ξ/Ξ_h 的一组基. 那么 $\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 可看作 $\mathbb{Z}$ 上关于 $\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_r$ 的 Laurent 多项式环. 因为 h 的秩大于 1, 所以 $r > 1$. 则有

$$(1-\bar{\sigma}_1)\phi(\sigma_2) = (1-\bar{\sigma}_2)\phi(\sigma_1).$$

又因为 $1-\bar{\sigma}_1$ 和 $1-\bar{\sigma_2}$ 不可约且互素，所以存在 $\bar{\omega} \in \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 使得

$$\phi(\sigma_1) = (1-\bar{\sigma_1})\bar{\omega}.$$

由 (11) 可知，对于任意的 $\sigma \in \Xi$ 有,

$$(1-\bar{\sigma}_1)\phi(\sigma) = (1-\bar{\sigma})\phi(\sigma_1) = (1-\bar{\sigma})(1-\bar{\sigma}_1)\bar{\omega}.$$

因为 $\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 是整环，所以

$$\phi(\sigma) = (1-\bar{\sigma})\bar{\omega}.$$

从而，映射 ϕ 是余边缘. □

§6 q- 超几何项的结构

设 g, h 是 $C[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}]$ 中的两个不可约多项式. 如果存在 $\tau \in \Xi$ 使得 $g^\tau/h \in C$, 则称 g 等价于 h, 记为： $g \sim h$. 容易验证 $\sim$ 是等价关系. 进而，如果 $g \sim h$, 则迷向子群 Ξ_g 与 Ξ_h 相同.

如果非零多项式 h 整除非零有理函数 f 的分子或者分母，则称 h 是 f 的 *因子*.

对于 $F^\times$ 中的有理函数 f 而言,存在有限个非平凡且彼此不等价的不可约多项式 $h_1, \ldots, h_m$, 使得

$$f = h_1^{\xi_1} \cdots h_m^{\xi_m}, \tag{12}$$

其中 $\xi_i \in \mathbb{Z}[\Xi] \setminus \Gamma_{h_i}$, $i = 1, \ldots, m$. 我们称 (12) 是 f 的 *q- 平移齐次分解*. 当 (12) 成立时，对于 $i = 1, \ldots, m$, f 有与 h_i 等价的不可约因子. 如果 $f = g_1^{\eta_1} \cdots g_t^{\eta_t}$ 是 f 的另一个 q- 平移齐次分解，那么 $t = m$, 并且经过指标调整得， $h_1 \sim g_1, \ldots, h_m \sim g_m$. 将 g_i 替换为 h_i, 则有

$$f = h_1^{\zeta_1} \cdots h_m^{\zeta_m}.$$

对于 $i = 1, \ldots, m$, $\xi_i - \zeta_i \in \Gamma_{h_i}$. 上述结论可由多项式分解的唯一性验证. 根据命题 5.1, (12) 可改写为

$$f = c\, h_1^{\bar{\xi}_1} \cdots h_m^{\bar{\xi}_m}, \tag{13}$$

其中 $c \in C$, $\bar{\xi}_i = \pi(\xi_i) \in \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_{h_i}]$. 给定 $f, h_1, \ldots, h_m$, 由 $\pi_i(\xi_i) = \pi_i(\zeta_i)$ 可知，表达式 (13) 中的 $\bar{\xi}_i$ 是唯一确定的. 我们称 $\bar{\xi}_i$ 是 f 关于 h_i 的 q- 平移赋值, 记为： $\nu_{h_i}(f)$. 为方便表示，如果非平凡不可约多项式 h 的等价类中没有 f 的因子，则令 $\nu_h(f)$ 等于 0. 进一步可验证映射 $\nu_h : F^\times \to \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 满足如下结论：

(i) 对于所有的 $u, v \in F^\times$, $\nu_h(uv) = \nu_h(u) + \nu_h(v)$;

(ii) 对于所有的 $\tau \in \Xi$ 和 $f \in F^\times$, $\nu_h(f^\tau) = \bar{\tau}\nu_h(f)$, 其中 $\bar{\tau}$ 是 τ 在 Ξ/Ξ_h 中的自然同态象.

设 H 是 F 上的 q- 超几何项，定义映射

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \Xi & \to & F^\times \\ & \sigma & \mapsto & \frac{H^\sigma}{H}. \end{array}$$

因为对于 $i = 1, \ldots, m$ 都有 H^{τ_i}/H 属于 $F^\times$, 所以 H^σ/H 属于 $F^\times$. 从而， ϕ 是良定义.

设 h 是 $C\left[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}\right]$ 中的不可约多项式. 定义映射 $\phi_h = \nu_h \circ \phi$.

任给 $\sigma, \tau \in \Xi$. 由

$$\frac{H^{\sigma\tau}}{H} = \frac{H^\sigma}{H}\left(\frac{H^\tau}{H}\right)^\sigma,$$

以及 ν_h 所满足的两个条件 (i) 和 (ii) 可知

$$\phi_h(\sigma\tau) = \phi_h(\sigma) + \bar{\sigma}\phi_h(\tau).$$

所以， ϕ_h 是余圈.

设 $f_i = H^{\tau_i}/H$, 其中 $i = 1, \ldots, n$. 设 $\nu_h(f_i) = \bar{\xi}_i$ 并且 $\{\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n\}$ 中至少有一个非零元素，换言之， $f_1, \ldots, f_n$ 中有与 h 等价的不可约因子. 进一步，假设 h 的秩大于 1. 由定理 5.2 知，余圈 ϕ_h 是余边缘，即：存在公共的 $\bar{\omega} \in \mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 使得对于 $\sigma \in \Xi$ 都有 $\phi_h(\sigma) = (1 - \bar{\sigma})\bar{\omega}$. 再由映射 ϕ_h 的定义可知，

$$\phi_h(\tau_i) = \nu_h(\frac{H^{\tau_i}}{H}) = \bar{\xi}_i = (1 - \bar{\tau}_i)\bar{\omega}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

令 $r = h^{-\bar{\omega}}$. 那么对于 $i = 1, \ldots, n$ 有， $h^{\bar{\xi}_i} = r^{\bar{\tau}_i}/r$. 令 $G = H/r$. 则

$$\nu_h(\frac{G^{\tau_i}}{G}) = \nu_h(\frac{H^{\tau_i}}{H}) - \nu_h(\frac{r^{\tau_i}}{r}) = \bar{\xi}_i - (1 - \bar{\tau}_i)\bar{\omega} = 0.$$

这样我们就证明了如下引理.

引理 6.1 设 $C\left[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}\right]$ 中不可约多项式 h 的秩大于 1, 那么 q- 超几何项 H 可以分解为

$$H = rG,$$

其中 $r \in F^\times$, G 是 q- 超几何项并且对于 $i = 1, \ldots, n$, $\nu_h(\frac{G^{\tau_i}}{G})$ 等于 0.

定义 6.2 如果 q- 超几何项的 q- 差商不含秩大于 1 的因子，则称该 q- 超几何项为 q- 阶乘项.

将引理 6.1 应用于 H 的 q- 差商的差分其次分解中每个秩大于 1 的不可约因子，得到如下定理.

定理 6.3 *设 H 是 q- 超几何项. 那么存在有理函数 $f \in F^{\times}$ 和 q- 阶乘项 T 使得 $H = fT$.*

下面我们描述 q- 阶乘项的结构. 设 h 是 $C\left[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}\right]^{\times}$ 中的非零多项式. 如果 h 的秩是零, 那么 h 是单项式. 如果 h 的秩的为 1, 那么存在群同构 $\bar{\psi}_h : \Xi/\Xi_h \to \mathbb{Z}$. 结合 Ξ 到 Ξ/Ξ_h 的自然投射，我们得到满射 $\psi_h : \Xi \to \mathbb{Z}$. 进一步，设

$$d_i = \psi_h(\tau_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

易知，所有的 d_i 都是整数. 由 ψ_h 是群同态可知,

$$\psi_h\left(\tau_1^{\ell_1} \cdots \tau_n^{\ell_n}\right) = d_1\ell_1 + \cdots + d_n\ell_n. \tag{14}$$

设 $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$ 是 q_1, …, q_n 的下标分拆.

引理 6.4 *设 h 是 $C\left[q_1^{y_1}, \ldots, q_n^{y_n}\right]$ 中秩为 1 的多项式. 则存在 Laurent 单项式 g, 唯一的整数 $t \in \{1, \ldots, k\}$, 以及单变元多项式 $P \in C[z]$ 使得*

$$h = gP\left(q^{\sum_{s \in S_t} d_s y_s}\right),$$

其中 q 是 S_t 的代表元， $d_s = \psi_h(\tau_s)$.

证明： 由推论 4.5 可知，存在 Ξ_h 的一组基 $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ 使得 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ 是 Ξ 的一组基，其中 $\psi_h(\sigma_1) = 1$. 对于 $i = 1, \ldots, n$, 设 $\sigma_i = \tau_1^{m_{i1}} \cdots \tau_n^{m_{in}}$. 因为 $\tau_1, \ldots, \tau_n$ 和 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 都是 Ξ 的基，所以矩阵 $M = (m_{ji})_{1 \le j \le n, 1 \le i \le n}$ 是可逆的. 令 $d_i = \psi_h(\tau_i)$. 又因为 $\psi_h(\sigma_1) = 1$, $\psi_h(\sigma_2) = \cdots \psi_h(\sigma_n) = 0$, 所以由 (14) 可知

$$\mathbf{u}M = (1, 0, \ldots, 0), \quad \text{其中 } \mathbf{u} = (d_1, d_2, \ldots, d_n). \tag{15}$$

设 N 是删除 M 第一列后所得矩阵. 我们用 $\ker(N)$ 表示 N 的左核. 由 (15) 可知， $\mathbf{u}$ 是 $\ker(N)$ 中的非零向量，并且

$$\gcd(d_1, \ldots, d_n) = 1. \tag{16}$$

设 $A = aq_1^{i_1 y_1} \cdots q_n^{i_n y_n}$ 是 h 中的某一单项式， $B = bq_1^{j_1 y_1} \cdots q_n^{i_n y_n}$ 是 h 中不等于 A 的另一单项式, 其中 $a, b \in C^{\times}$. 不失一般性, 我们进一步假设 $i_1 \neq j_1$, $1 \in S_1$ 且 $S_1 = \{1, 2, \ldots, \ell\}$. 由引理 4.3 可知， $\mathbf{v} = (i_1 - j_1, \ldots, i_\ell - j_\ell, 0, \ldots, 0)$ 是 $\ker(N)$ 中的非零向量. 因为 M 满秩，所以 N 的秩为 $m-1$. 因此， $\ker(N)$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上向量空间的维数为 1, 这意味着 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性相关. 从而 $d_{\ell+1} = \cdots = d_n = 0$, 并且

$$\mathbf{u} = (d_1, \ldots, d_\ell, 0, \ldots, 0) \tag{17}$$

是 $\ker(N)$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上向量空间的一组基.

设 $E=eq_1^{k_1y_1}\cdots q_n^{k_ny_n}$ 是 h 中出现的的任意单项式，其中 $e\in C^\times$. 那么

$$\mathbf{w}=(i_1-k_1,\ldots,i_n-k_n)$$

属于 $\ker(N)$. 因为 $\mathbf{u}$ 是 $\ker(N)$ 的基，所以存在 $r_E\in\mathbb{Q}$ 使得 $\mathbf{w}=r_E\mathbf{u}$. 事实上，由 (16) 可知， $r_E\in\mathbb{Z}$. 从而

$$k_s=i_s-r_Ed_s,\ s=1,\ldots,\ell,\quad \text{和}\quad k_t=i_t,\ t=\ell+1,\ldots,n. \tag{18}$$

设 q 是 S_1 的代表元. 令

$$D=q^{d_1y_1+\cdots+d_\ell y_\ell},\quad U=q^{i_1y_1+\cdots+i_\ell y_\ell}\quad \text{和}\quad V=q_{\ell+1}^{i_{\ell+1}y_{\ell+1}}\cdots q_n^{i_ny_n}.$$

则 $E=eUD^{-r_E}V$. 因为 U 和 V 不依赖于 E, 所以 h/UV 是 C 上关于 D 的单变元 Laurent 多项式 L. 从而存在整数 ℓ 和单变元多项式 $P\in C[z]$ 使得 $L=D^\ell P(D)$. 所以 $h=(UVD^\ell)P(D)$. 令 $g=UVD^\ell$, 引理成立. □

需要注意的是上述定理中的 h 未必是不可约多项式. 下面定义 q- 整线性多项式.

定义 6.5 对于多项式 $g\in C\left[q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}\right]$ 而言，如果存在整数 $t\in\{1,\ldots,k\}$, 两个整线性多项式 $\sum_{s\in S_t}i_sy_s$ 和 $\sum_{s\in S_t}j_sy_s$, 其中 $i_s,j_s\in\mathbb{Z}$, 以及单变元多项式 $P\in C[z]$ 使得

$$g=q^{\sum_{s\in S_t}i_sy_s}P\left(q^{\sum_{s\in S_t}j_sy_s}\right),$$

其中 q 是 S_t 的代表元，我们称 g 是 q- 整线性的.

定理 6.6 如果 G 是 q- 阶乘项. 那么 G 的所有 q- 差商的不可约因子都是 q- 整线性的.

证明： 设 h 是 G 的任意一个 q- 差商的不可约因子. 由定义 6.2 可知， h 的秩是 0 或者 1. 如果 h 的秩为 0, 那么存在 $c\in C^\times$ 和 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 使得 $h=cq_i^{y_i}$. 如果 h 的秩为 1, 那么，由引理 6.4 可知，存在 $t\in\{1,\ldots,k\}$ 使得

$$h=MP\left(q^{\sum_{s\in S_t}j_sy_s}\right),$$

其中 M 是 $q_1^{y_1},\ldots,q_n^{y_n}$ 的 Laurent 单项式， $P\in C[z]$, q 是 S_t 的代表元，以及 $j_s\in\mathbb{Z}$. 因为 h 不可约，所以 M 只是关于 $\{q_j^{y_j}:j\in S_t\}$ 的 Laurent 单项式. 从而， h 是 q- 整线性的. □

定义 6.7 设 $f\in F$. 如果存在 $t\in\{1,\ldots,k\}$ 使得 $f\in C\left(q_i^{y_i}:i\in S_t\right)$, 我们称 f 只与 S_t 相关.

设 G 是 q- 阶乘项，由 q- 整线性的定义以及定理 6.6 可知，

$$f_i=\frac{G^{\tau_i}}{G}=f_{i1}\,f_{i2}\ldots f_{ik}, \tag{19}$$

其中 $i=1,\ldots,n$, 并且对于 $j=1,\ldots,k$, f_{ij} 只与 S_j 相关. 进一步，我们有如下结论.

命题 6.8 设 G 是 q- 阶乘项， $f_i = \frac{G^{\tau_i}}{G}$, 其中 $i = 1, \ldots, n$. 如果 $i \in S_t$, 那么 f_i 只与 S_t 相关.

证明： 由 (19) 知，只要证明对于所有的 $\ell \neq t$, $f_{i\ell} \in C$ 即可.

设 $\ell \neq t$. 假设 j 是 S_ℓ 中任一整数. 由相容条件可知， $\frac{f_i^{\tau_j}}{f_i} = \frac{f_j^{\tau_i}}{f_j}$, 从而

$$\frac{f_{i\ell}^{\tau_j}}{f_{i\ell}} = \frac{f_{jt}^{\tau_i}}{f_{jt}}.$$

因为 $f_{i\ell}$ 只与 S_ℓ 相关，所以 $\frac{f_{i\ell}^{\tau_j}}{f_{i\ell}}$ 只与 S_ℓ 相关. 同理可得， $\frac{f_{jt}^{\tau_i}}{f_{jt}}$ 只与 S_t 相关. 因为 $\ell \neq t$, 所以 S_ℓ 与 S_t 的交集为空集，这意味着 $\frac{f_{i\ell}^{\tau_j}}{f_{i\ell}} \in C$. 由引理 2.4 知，存在整数 $m_i, m_j \in \mathbb{Z}$ 使得

$$q_j^{m_j} = \frac{f_{i\ell}^{\tau_j}}{f_{i\ell}} = \frac{f_{it}^{\tau_i}}{f_{it}} = q_i^{m_i}.$$

因为 $j \notin S_t$, 所以 $m_i = m_j = 0$. 从而变量 $q_j^{y_j}$ 不会出现在 $f_{i\ell}$ 中. 又因为 j 是 S_ℓ 中的任意整数，所以 $f_{i\ell} \in C$. □

由上述命题可得如下定理.

定理 6.9 混合的 q- 阶乘项 G 可以分解为非混合的 q- 阶乘项的乘积.

证明： 设 $f_i = G^{\tau_i}/G$, $i = 1, \ldots, n$, 且 $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$ 为 $q_1, \ldots, q_n$ 的下标分拆. 对 $t \in \{1, \ldots, k\}$, 令

$$\begin{cases} r_{ti} := f_i, & i \in S_t \\ r_{ti} := 1, & i \notin S_t \end{cases}$$

我们断言：对所有 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{r_{ti}^{\tau_j}}{r_{ti}} = \frac{r_{tj}^{\tau_i}}{r_{tj}}. \tag{20}$$

该断言证明如下. 如果 $i, j \notin S_t$, 则 $r_{ti} = r_{tj} = 1$. 于是 (20) 成立. 如果 $i, j \in S_t$, 则由 $f_1, \ldots, f_n$ 相容得 (20) 成立. 如果 $i \in S_t, j \notin S_t$, 由命题 6.8, r_{ti} 只与 S_t 相关，因为 $j \notin S_t$, 所以 $r_{ti}^{\tau_j} = r_{ti}$, 同理， $r_{tj}^{\tau_i} = r_{tj}$, 从而 (20) 成立. 断言成立. 由此推出， $r_{t1}, \ldots, r_{tn}$ 相容.

由文献 [4] 中定理 2 可知，存在 F 上的 q- 超几何项 G_t, 其 q- 差商分别为 $r_{t1}, \ldots, r_{tn}$. 注意到 G_t 是非混合的 q- 阶乘项. 令

$$G' = \prod_{t=1}^{k} G_t.$$

容易验证 G 和 G' 的 q- 差商都相同. 于是 $G = cG'$, 其中 c 是一个常数. □

Gel'fand 等人 [8] 与陈永川等人 [7] 已经刻画了非混合 q- 超几何项的乘法分解，那么根据定理 6.9, 可得混合 q- 超几何项的乘法分解.

参考文献

[1] S. A. Abramov. When does Zeilberger's algorithm succeed? *Adv. in Appl. Math.*, 30(3):424–441, 2003.

[2] S. A. Abramov and M. Petkovšek. On the structure of multivariate hypergeometric terms. *Adv. in Appl. Math.*, 29(3):386–411, 2002.

[3] G. Almkvist and D. Zeilberger. The method of differentiating under the integral sign. *J. Symbolic Comput.*, 10(6):571–591, 1990.

[4] M. Bronstein, Z. Li, and M. Wu. Picard–Vessiot extensions for linear functional systems. In *ISSAC '05: Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 68–75, New York, USA, 2005. ACM.

[5] S. Chen, F. Chyzak, R. Feng, and Z. Li. The existence of telescopers for hyperexponential-hypergeometric functions, 2010. MM-Res. Preprints (2010) No. 29, 239-267.

[6] S. Chen, R. Feng, G. Fu, and Z. Li. On the structure of compatible rational functions. In *ISSAC '11: Proceedings of the 2011 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 91–98, New York, USA, 2011. ACM..

[7] W. Y. C. Chen, Q.-H. Hou, and Y.-P. Mu. Applicability of the q-analogue of Zeilberger's algorithm. *J. Symbolic Comput.*, 39(2):155–170, 2005.

[8] I. Gel'fand, M. Graev, and V. Retakh. General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type. *Uspekhi Mat. Nauk (Russian), English translation in Russia Math Surveys*, 47(4):3–82, 1992.

[9] Q. Hou. Algebraic Method in Combinatorics. PhD thesis, Nankai University, People's Republic of China, 2001.

[10] Q. Hou. k-free recurrences of double hypergeometric terms. *Adv. in Appl. Math.*, 32(3):468-484, 2004.

[11] O. Ore. Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. *J. Math. Pures Appl.*, 9(4):311–326, 1930.

[12] M. Sato. Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)—the English translation of Sato's lecture from Shintani's note. *Nagoya Math. J.*, 120:1–34, 1990. Notes by Takuro Shintani, Translated from the Japanese by Masakazu Muro.

[13] H. S. Wilf and D. Zeilberger. An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities. *Invent. Math.*, 108(3):575–633, 1992.

[14] D. Zeilberger. The method of creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, 11(3):195–204, 1991.

Multiplicative Decompositions of Multivariate q-Hypergeometric Terms

Chen Shaoshi[†] Feng Ruyong[‡] Fu Guofeng[‡] Kang Jin[‡]

([†] *Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh 27695)*
([‡] *Key Laboratory of Mathematics Mechanization, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)*

Abstract In this paper, we prove that a mixed q-hypergeometric term is a product of a rational function and a q-factorial term. This generalizes the q-analogue of the Ore-Sato theorem from unmixed hypergeometric terms to mixed ones.

Key words q-hypergeometric term, q-factorial term, multiplicative decomposition, structure theorem