系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
31(5) (2011, 5), 620–628

微分、差分域中的 Wronskian 行列式*

李应弘 冯如勇

(中国科学院数学机械化重点实验室， 北京 100190)

摘要 众所周知，给定微分或差分域上一组元素，它们在常数域上线性相关当且仅当它们所对应的 Wronskian 行列式或者 Casoratian 行列式为零. 文章将这个结果推广到具有微分导子和差分导子的微分差分域；同时基于 Okugawa 的工作，还将结果推广到特征非 0 的微分差分域.

关键词 微分差分域， Wronskian 行列式，微分导子，差分导子，迭代微分导子.

MR(2000) 主题分类号 68W30

1 引 言

经典的 Wronskian 行列式可以用于判定给定的常微分域 (只含有一个微分导子) 中的有限个元素是否在其常数域上线性相关. 这一结果被 E. R. Kolchin 推广到了偏微分域 (含有多个可交换的微分导子) 上 [1], 参见定理 5. Wronskian 行列式在微分代数以及几何定理自动推理中有很多的应用. 在微分代数中， Wronskian 行列式除了被用于判定一组线性常微分方程的解是否线性无关外，还被用于构造线性常微分方程使得它的基本解组是给定的函数 [2]. 在 [3] 中，经典的 Wronskian 行列式在将几何定理的几何语言描述转变成代数语言描述中起到重要的作用. 在 [4] 中， Kolchin 的结果被大大地简化并且被用于曲面中的几何定理自动证明. 在差分代数中，与 Wronskian 行列式相对应的是 Carosatian 行列式，它在差分代数中所起到的作用与 Wronskian 行列式在微分代数中的作用类似 [5]. 在 [6] 中，作者将 Wronskian(Casoratian) 行列式推广到 Δ- 环上，并给出判定有限个超指数向量是否在常数域上线性相关的判别方法。前面都是在特征为 0 的域上考虑，当所考虑域的特征大于 0 时，情况会有些不同. 此时，如果依旧考虑通常的微分导子，则常数域会变得相当复杂，参见例子 2. 在 [7] 中， Schmidt 引进了迭代微分导子从而使得其常数域与通常微分导子的常数域保持一致. 在 [8] 中， Okugawa 将 Schmidt 的结果推广到了多个迭代微分导子的情形. 特征非 0 域上的 Wronskian 行列式可以用于计算代数曲线，具体参见 [9].

在本文中，我们首先介绍 Kolchin 的关于特征为 0 的偏微分域上的 Wronskian 行列式的结果，然后在特征为 0 的差分域上给出类似的结果. 接着，进一步将结果推广到微分差分域上. 最后，借鉴 Okugawa 的结果，我们将结果推广到特征非 0 的迭代微分差分域上.

* 受国家自然科学基金委青年基金 (10901156) 以及创新群体 (NSFC60821002/F02) 资助课题.
收稿日期：2010-10-29.

2　特征为 0 的微分差分域上的 Wronskian 行列式

在本节中，我们将考虑特征为 0 的微分差分域上的 Wronskian 行列式．我们先从下面的定义开始．

定义 1 设 K 为域，一个映射 $\delta: K \mapsto K$，如果满足对于所有的 $a, b \in K$，$\delta(a+b)=\delta(a)+\delta(b)$ 和 $\delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b)$，则称 δ 是一个 微分导子．我们称 K 上的自同构为 差分导子．微分差分域 是指一个域，在其上定义有限个微分导子和差分导子．当微分差分域中只有微分导子时，称该域为微分域；当它只有差分导子时，称其为差分域．设 K 为一微分差分域，$\varDelta$ 与 $\varSigma$ 分别为其微分导子与差分导子的集合，则 $\{c \in K | \forall\ \delta \in \varDelta, \forall\ \sigma \in \varSigma,\ \delta(c)=0$ 并且 $\sigma(c)=c\}$ 为 K 的一个子域，称为 常数域．

例 1 令 $K=\mathbb{Q}(x)$ 并定义 $\delta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 以及同构 $\sigma(x)=x+1$，则 K 成为一个微分差分域．再令 $F=\mathbb{Q}(t,x)$ 并定义 $\delta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 以及同构 $\sigma(x)=x+1$，则 F 也成为一个微分差分域．注意到前者中微分导子和差分导子不可交换，而在后者中两导子可交换．在这两种情形，它们的常数域均为 $\mathbb{Q}$．

在下文中，我们将总是假定所有的导子，无论微分还是差分，两两均可交换．

2.1　微分域上的 Wronskian 行列

设 F 是一个微分域，$\varDelta$ 是其导子组成的集合．设 $\varTheta$ 是由 $\varDelta$ 中的元素生成的含幺自由交换半群．$\varTheta$ 中任意元素都可以唯一地表示为乘积 $\prod\limits_{\delta \in \varDelta} \delta^{e(\delta)}$ 的形式，这里 $e(\delta) \in \mathbb{N}$．我们称 $\varTheta$ 中的元素为 F 上的 微分算子．

定义 2 设 $\theta=\prod\limits_{\delta \in \varDelta} \delta^{e(\delta)} \in \varTheta$，这里 $e(\delta)$ 为非负整数，则称 $\sum\limits_{\delta \in \varDelta} e(\delta)$ 为 $\varTheta$ 的 阶．

注 1　我们将用 $\varTheta(s)$ 表示 $\varTheta$ 中阶小于或者等于 s 的元素组成的集合．

有了这些基本定义以后，现在给出 Kolchin 的结果 [1]．该结果推广了经典的 Wronskian 行列式．

定理 1 设 K 是一个微分域，记 $\varDelta$ 为其上的微分导子集．记 $\varTheta$ 为由 $\varDelta$ 中的元素生成的含幺自由交换半群，并记 $\mathcal{C}$ 为 K 的常数域．设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in F$．那么，如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关，则 $\forall\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \in \varTheta$，$\det((\theta_i x_j)_{1 \le i,j \le n})=0$．反之，如果 $\det((\theta_i x_j)_{1 \le i,j \le n})=0$ 对于 $\forall\ \theta_i \in \varTheta(i-1)$ 均成立，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关．

2.2　差分域上的 Carosatian 行列式

下面的结果在单个差分导子的情形见 [5]．我们这里对于多个差分导子给出一个证明．由于差分导子为 K 上的自同构，所以关于阶数的定义会有所不同．

定义 3 设 K 是一个差分域，记 $\varSigma=\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu\}$ 为其上的差分导子集．记 $\varTheta$ 为由 $\varSigma$ 中的元素生成的自由交换半群．设 $\theta \in \varTheta$，则存在最小的非负整数 $e_1, e_2, \cdots, e_\nu$ 使得 $\theta=\sigma_1^{e_1}, \sigma_2^{e_2}, \cdots, \sigma_\nu^{e_\nu}$．我们称 $\sum\limits_i e_i$ 为 θ 的 阶数．同样我们用 $\varTheta(s)$ 表示 $\varTheta$ 中阶数小于或者等于 s 的元素的集合．对于下文中微分差分域以及迭代微分差分域的情形，阶数的定义类似．在下文中，我们将不再重复．

定理 2 设 K 是一个差分域，记 $\varSigma$ 为其上的差分导子集．记 $\varTheta$ 为由 $\varSigma$ 中的元素生成的自由交换半群，并记 $\mathcal{C}$ 为 K 的常数域．设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$．那么，如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关，则对于 $\forall\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \in \varTheta$，$\det((\theta_i x_j)_{1 \le i,j \le n})=0$；反之，如果 $\det((\theta_i x_j)_{1 \le i,j \le n})=0$ 对

于 $\forall\ \theta_i \in \Theta(i-1)$ 均成立，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关.

证 ($\Rightarrow$) 因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关，所以存在不全为 0 的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathcal{C}$ 使得：$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=0$. 易知对于任意的 $\theta \in \Theta$, 均有 $c_1\theta x_1+c_2\theta x_2+\cdots+c_n\theta x_n=0$. 因而对于 $\forall\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \in \Theta$,

$$\begin{pmatrix} \theta_1 x_1 & \theta_1 x_2 & \cdots & \theta_1 x_n \\ \theta_2 x_1 & \theta_2 x_2 & \cdots & \theta_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_n x_1 & \theta_n x_2 & \cdots & \theta_n x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

从而对于 $\forall\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n \in \Theta, \det\left((\theta_i x_j)_{1\le i,j\le n}\right)=0$.

($\Leftarrow$) 我们将对元素的个数 n 进行归纳. $n=1$ 时结论显然成立. 假设 $n<k$ 时结论成立，下面考虑 $n=k$. 若对于任意的 $\theta_i \in \Theta(i-1)$, 均有 $\det\left((\theta_i x_j)_{1\le i,j\le k-1}\right)=0$, 则由归纳假设 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关，故而结论对于 $n=k$ 时成立. 下面假设存在 $\theta_i' \in \Theta(i-1)(i=1,2,\cdots,k-1)$ 使得 $\det\left((\theta_i' x_j)_{1\le i,j\le k-1}\right) \neq 0$. 由此可知 $k-1$ 个向量 $\gamma_i' = (\theta_i' x_1, \theta_i' x_2, \cdots, \theta_i' x_k)$, $i=1,2,\cdots,k-1$ 在 K 上线性无关. 由假设条件可知，对于任意的 $\theta \in \Theta(k-1)$, 有

$$\begin{vmatrix} \theta_1' x_1 & \theta_1' x_2 & \cdots & \theta_1' x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k-1}' x_1 & \theta_{k-1}' x_2 & \cdots & \theta_{k-1}' x_k \\ \theta x_1 & \theta x_2 & \cdots & \theta x_k \end{vmatrix} = 0.$$

因此存在不全为 0 的 $c_1, c_2, \cdots, c_k \in K$ 使得对于 $i=1,2,\cdots,k-1$ 均有 $c_1\theta_i' x_1+c_2\theta_i' x_2+\cdots+c_k\theta_i' x_k=0$ 并且对于任意的 $\theta \in \Theta(k-1)$, $(\theta x_1, \theta x_2, \cdots, \theta x_k)$ 为 $\gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_{k-1}'$ 的 K 线性组合. 由此可知, 对于任意的 $\theta \in \Theta(k-1)$, $c_1\theta x_1+c_2\theta x_2+\cdots+c_k\theta x_k=0$. 特别地, 当 $i=1$ 时, 我们有 $\theta_1'=1$, 此时我们有 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k=0$, 因此我们只需要证明 $c_i \in \mathcal{C}$ 即可. 由于 $\gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_{k-1}'$ 在 K 上线性无关，所以 $c_k \neq 0$, 故而我们不妨假设 $c_k=1$. 对于任意的 $\sigma \in \Sigma$, 我们有

$$0=\sigma\left(\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \theta_i' x_\ell\right)=\sum_{\ell=1}^{k} \sigma c_\ell \sigma\theta_i' x_\ell,\ i=1,2,\cdots,k-1.$$

由于 $\sigma\theta_i' \in \Theta(k-1)$, 所以 $\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \sigma\theta_i' x_\ell=0, i=1,2,\cdots,k-1$. 因为 σ 为自同构，我们有 $(\sigma\theta_i' x_1, \sigma\theta_i' x_2, \cdots, \sigma\theta_i' x_k), i=1,2,\cdots,k-1$ 在 K 上依旧线性无关. 从而有 $(\sigma c_1, \sigma c_2, \cdots, \sigma c_i, \cdots, 1)=\alpha(c_1, c_2, \cdots, c_i, \cdots, 1), \alpha \in K$. 由此易知，于任意的 $\sigma \in \Sigma$, $\sigma c_i = c_i$. 定理得证.

2.3 微分差分域上的 Wronskian 行列式

前面两节分别讨论了微分域和差分域上的 Wronskian 行列式与元素在常数域上线性相关性之间关系. 下面我们考虑微分差分域的情形. 我们将依然称这些行列式为 Wronskian 行列式.

定理 3 设 K 是一个微分差分域, 记 Δ 为其上的微分导子集，Σ 为其上的差分导子集. 记 Θ 为由 Δ 和 Σ 中的元素生成的自由交换半群, 并记 $\mathcal{C}$ 为 K 的常数域. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in K$. 那么, 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关, 则对于 $\forall\,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\in\Theta$, $\det\left((\theta_i x_j)_{1\le i,j\le n}\right)=0$. 反之，如果 $\det\left((\theta_i x_j)_{1\le i,j\le n}\right)=0$ 对于 $\forall\,\theta_i\in\Theta(i-1)$ 均成立，则 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关.

证 $(\Rightarrow)$ 因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关, 所以存在不全为 0 的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathcal{C}$ 使得

$$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=0.$$

易知对于任意的 $\theta\in\Theta$, 均有 $c_1\theta x_1+c_2\theta x_2+\cdots+c_n\theta x_n=0$. 因而 $\forall\,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\in\Theta$,

$$\begin{pmatrix}\theta_1x_1 & \theta_1x_2 & \cdots & \theta_1x_n\\ \theta_2x_1 & \theta_2x_2 & \cdots & \theta_2x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \theta_nx_1 & \theta_nx_2 & \cdots & \theta_nx_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=0.$$

从而 $\forall\,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\in\Theta$, $\det\left((\theta_i x_j)_{1\le i,j\le n}\right)=0$.

$(\Leftarrow)$ 证明的思路与定理 基本一样, 不同之处在于我们这里需要考虑微分导子. 我们同样对元素的个数 n 进行归纳．$n=1$ 时结论显然成立. 假设 $n<k$ 时结论成立, 下面考虑 $n=k$. 若对于任意的 $\theta_i\in\Theta(i-1)$, 均有 $\det\left((\theta_i x_j)_{1\le i,j\le k-1}\right)=0$, 则由归纳假设 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关，故而结论对于 $n=k$ 时成立．下面假设存在 $\theta_i'\in\Theta(i-1)(i=1,2,\cdots,k-1)$ 使得 $\det\left((\theta_i'x_j)_{1\le i,j\le k-1}\right)\neq 0$. 由此可知 $k-1$ 个向量 $\gamma_i'=(\theta_i'x_1,\theta_i'x_2,\cdots,\theta_i'x_k)$, $i=1,2,\cdots,k-1$ 在 K 上线性无关．由假设条件可知，对于任意的 $\theta\in\Theta(k-1)$, 有

$$\begin{vmatrix}\theta_1'x_1 & \theta_1'x_2 & \cdots & \theta_1'x_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \theta_{k-1}'x_1 & \theta_{k-1}'x_2 & \cdots & \theta_{k-1}'x_k\\ \theta x_1 & \theta x_2 & \cdots & \theta x_k\end{vmatrix}=0.$$

因此存在不全为 0 的 $c_1,c_2,\cdots,c_k\in K$ 使得对于 $i=1,2,\cdots,k-1$ 均有

$$c_1\theta_i'x_1+c_2\theta_i'x_2+\cdots+c_k\theta_i'x_k=0. \tag{1}$$

并且对于任意的 $\theta\in\Theta(k-1)$, $(\theta x_1,\theta x_2,\cdots,\theta x_k)$ 为 $\gamma_1',\gamma_2',\cdots,\gamma_{k-1}'$ 的 K 线性组合．由此可知，对于任意的 $\theta\in\Theta(k-1)$, $c_1\theta x_1+c_2\theta x_2+\cdots+c_k\theta x_k=0$. 特别地，当 $i=1$ 时，我们有 $\theta_1'=1$, 此时我们有 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k=0$. 因此我们只需要证明 $c_i\in\mathcal{C}$ 即可．由于 $\gamma_1',\gamma_2',\cdots,\gamma_{k-1}'$ 在 K 上线性无关，所以 $c_k\neq 0$, 故而我们不妨假设 $c_k=1$. 现在对于任意的 $\delta\in\Delta$, 将 δ 作用于 (1), 我们有 $\sum\limits_{\ell=1}^{k}\delta c_\ell\theta_i'x_\ell+\sum\limits_{\ell=1}^{k}c_\ell\delta\theta_i'x_\ell=0$, 因为 $\delta\theta_i'\in\Theta(k-1)$, 所以 $\sum\limits_{\ell=1}^{k}c_\ell\delta\theta_i'x_\ell=0$, 进而 $\sum\limits_{\ell=1}^{k}\delta c_\ell\theta_i'x_\ell=0$. 因为 $\gamma_1',\gamma_2',\cdots,\gamma_k'$ 在 K 上线性无关，$(\delta c_1,\delta c_2,\cdots,\delta c_i,\cdots,0)=\alpha(c_1,c_2,\cdots,c_i,\cdots,1)$, 这里 $\alpha\in K$. 由此可知对于任意的 $\delta\in\Delta$,

$\delta c_i = 0$. 对于任意的 $\sigma \in \Sigma$, 与定理 的证明一样可以得到 $\sigma c_i = c_i$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 因此 $c_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \cdots, k$. 定理得证.

注 2 在定理 3 中, 为了判断微分差分域上的 n 个元素在常数域上是否线性相关, 最坏的情况必须计算 $\prod\limits_{i=1}^{n-1} \binom{\mu+\nu+i}{i}$ 个行列式, 这里 $\mu = |\Delta|, \nu = |\Sigma|$.

事实上, 在定理 3 中, 有很多行列式没有必要进行计算. 下面的推论就这一方面对前面的定理进行了改进.

推论 1 设 K 是一个微分差分域, 记 $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\mu\}$ 为 K 上的微分导子的集合, $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\nu\}$ 为 K 上的差分导子的集合. 记 Θ 为由 Δ 和 Σ 中的元素生成的自由交换半群, 并记 $\mathcal{C}$ 为 K 的常数域. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$. 如果存在 $\theta'_i \in \Theta(i-1)(1 \le i \le n-1)$ 使得 $\gamma'_i = (\theta'_i x_1, \theta'_i x_2, \cdots, \theta'_i x_n)$ 在 K 上线性无关, 那么 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关当且仅当对于任意的 $\delta \in \Delta, \sigma \in \Sigma, j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$,

$$\begin{vmatrix} \theta'_1 x_1 & \theta'_1 x_2 & \cdots & \theta'_1 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta'_{n-1} x_1 & \theta'_{n-1} x_2 & \cdots & \theta'_{n-1} x_k \\ \delta\theta'_j x_1 & \delta\theta'_j x_2 & \cdots & \delta\theta'_j x_k \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \theta'_1 x_1 & \theta'_1 x_2 & \cdots & \theta'_1 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta'_{n-1} x_1 & \theta'_{n-1} x_2 & \cdots & \theta'_{n-1} x_k \\ \sigma\theta'_j x_1 & \sigma\theta'_j x_2 & \cdots & \sigma\theta'_j x_k \end{vmatrix} = 0.$$

证 ($\Rightarrow$) 由定理 3 可知.

($\Leftarrow$) 因为 γ'_i 在 K 上线性无关, 由题设条件可知对于任意的 $\delta \in \Delta, \sigma \in \Sigma$ 以及 $i = 1, 2, \cdots, n-1$, $\delta\gamma'_i$ 以及 $\sigma\gamma'_i$ 均可写成 $\gamma'_1, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_{n-1}$ 的线性组合. 因为 $\forall\theta \in \Theta$ 均可以表示为 $\delta_1^{i_1} \cdots \delta_k^{i_k} \sigma_1^{j_1} \cdots \sigma_l^{j_l}$ 的形式, 由归纳可知, 对于任意的 $\theta \in \Theta$, $\theta\gamma'_i$ 均可以写成 $\gamma'_1, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_{n-1}$ 的 K 线性组合. 特别地, 对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$ 以及 $\theta_i \in \Theta(i-1)$, 我们有 $\theta_i\gamma'_1 = (\theta'_i x_1, \theta'_i x_2, \cdots, \theta'_i x_n)$ 均可以写成 $\gamma'_1, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_{n-1}$ 的 K 线性组合. 因为 $\gamma'_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 所以对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$ 以及于任意的 $\theta_i \in \Theta(i-1)$, $\det((\theta_i x_j)_{1 \le i,j \le n}) = 0$. 由定理 3 可知, 推论成立.

利用上述推论, 我们可以给出如下判定给定微分差分域 K 中的 n 个非零元素是否在常数域 $\mathcal{C}$ 上线性相关的算法.

算法 输入: K 上的 n 个非零元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 输出: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是否在 $\mathcal{C}$ 上线性相关.

1) 令 $k = 2$, 计算

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \delta x_1 & \delta x_2 \end{vmatrix}, \ \delta \in \Delta, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \sigma x_1 & \sigma x_2 \end{vmatrix}, \ \sigma \in \Sigma.$$

如果所有的行列式均为零, 则由推论, x_1, x_2 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关, 算法终止. 否则存在 $\theta_2 \in \Delta \cup \Sigma$ 使得 $\det((\theta_i x_j)_{1 \le i,j \le 2}) \ne 0$, 这里 $\theta_1 = 1$. 令 $k := k+1$.

2) 若 $k \le n$, 计算

$$\begin{vmatrix} \theta_1 x_1 & \theta_1 x_2 & \cdots & \theta_1 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k-1} x_1 & \theta_{k-1} x_2 & \cdots & \theta_{k-1} x_k \\ \delta\theta_i x_1 & \delta\theta_i x_2 & \cdots & \delta\theta_i x_k \end{vmatrix}, \ \delta \in \varDelta, \ i = 1, 2, \cdots, k-1,$$

$$\begin{vmatrix} \theta_1 x_1 & \theta_1 x_2 & \cdots & \theta_1 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k-1} x_1 & \theta_{k-1} x_2 & \cdots & \theta_{k-1} x_k \\ \sigma\theta_i x_1 & \sigma\theta_i x_2 & \cdots & \sigma\theta_i x_k \end{vmatrix}, \ \sigma \in \varSigma, \ i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

如果所有的行列式均为 0, 则由推论 可知 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关, 算法终止. 否则, 存在 $\theta_k = \theta' \theta_{i_0}$ 这里 $\theta' \in \varDelta \cup \varSigma$ 以及 $i_0 \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$, 使得

$$\begin{vmatrix} \theta_1 x_1 & \theta_1 x_2 & \cdots & \theta_1 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{k-1} x_1 & \theta_{k-1} x_2 & \cdots & \theta_{k-1} x_k \\ \theta_k x_1 & \theta_k x_2 & \cdots & \theta_k x_k \end{vmatrix} \neq 0.$$

令 $k := k+1$, 重复步骤 2.

3) 如果在步骤 2 中算法没有终止，则由推论 可知， $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关，算法终止.

注 3 容易知道在算法 中, 我们最多需要计算 $\frac{n(n-1)(\mu+\nu)}{2}$ 个行列式, 这里 $\mu = |\varDelta|, \nu = |\varSigma|$. 因此我们的算法大大降低了所需计算行列式的数目.

3　特征非 0 的微分差分域上的 Wronskian 行列式

在第 2 节中我们所考虑的域都是特征为 0. 当域的特征不为 0 时，情况会有所不同. 设 F 为任意一个域，t 为自变量. 考虑有理函数域 $F(t)$, 在其上定义微分导子 $\delta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 当 F 的特征为 0 时，我们知道其常数域为 F; 但是当 F 的特征为素数 p 时，它的常数域为 $F(t^p)$. 为了使其常数域依然为 F, 我们需要引进新的微分运算.

定义 4 设 K 是一个域，$\delta = \{\delta^{(v)}; v = 0, 1, \cdots\}$, 其中 $\delta^{(v)}$ 是 K 到 K 的映射, 如果 δ 满足

1) $\forall\, x \in K$, $\delta^{(0)} x = x$;
2) $\forall\, x, y \in K$, $\delta^{(v)}(x+y) = \delta^{(v)} x + \delta^{(v)} y$;
3) $\forall\, v \in \mathbb{N}$, $\forall\, x, y \in K$, $\delta^{(v)}(xy) = \sum\limits_{v_1+v_2=v} \delta^{(v_1)} x \delta^{(v_2)} y$;
4) $\forall\, \mu, \nu \in \mathbb{N}$, $x \in K$, $\delta^{(\mu)}(\delta^{(\nu)} x) = \binom{\mu+\nu}{\mu} \delta^{(\mu+\nu)} x$;

就称 δ 是 K 上的迭代微分导子 (iterative derivation).

设 $\delta_i=\{\delta_i^{(v)};v\geq 0\},i=1,2,\cdots,m$ 为 K 上的 m 个迭代微分导子. 我们称 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$ 是可交换的，如果对于任意的 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 以及非负整数 u,v, 均有 $\delta_i^{(u)}\delta_j^{(v)}=\delta_j^{(v)}\delta_i^{(u)}$. 类似地，我们可以定义 K 上迭代微分导子与差分导子的可交换性. 下面我们在考虑多个迭代微分导子与差分导子时，总是假定它们是可交换的. 为了方便，我们称定义有迭代微分导子的域 K 为迭代微分域；称同时含有迭代微分导子与差分导子的域为迭代微分差分域.

定义 5 设 K 为迭代微分差分域，其中 $\delta_i=\{\delta_i^{(v)};v\geq 0\},i=1,2,\cdots,\mu$ 为迭代微分导子， $\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_\nu\}$ 为差分导子. K 中的元素 c 称为常数，如果有 $\delta_i^{(v)}c=0$, 对于任意的 $i\in\{1,2,\cdots,\mu\},v\in\mathbb{N}$ 以及 $\sigma_j c=c$, 对于任意的 $j\in\{1,2,\cdots,\nu\}$. K 中的所有常数构成一个域，称为常数域，我们依然用 $\mathcal{C}$ 表示.

注 4 在定义 中， $\delta^{(1)}$ 是通常的微分导子. 当 $\mathrm{char}(K)=0$ 时，我们有 $\delta^{(\nu)}=\frac{1}{\nu!}(\delta^{(1)})^\nu$. 由此可知，此时 $\delta^{(1)}$ 的常数也是迭代微分导子的常数. 当 $\mathrm{char}(K)=p>0$ 时，情况会有所不同，如下面的例子所示.

例 2 令 $K=F((t))$, 这里 $\mathrm{char}(F)=p>0$, t 为未定元. 我们定义迭代微分导子 $\delta^{(i)}(t^j)=\binom{j}{i}t^{j-i}$, 这里当 $j<i$ 时， $\binom{j}{i}=0$. 当 $i=1$ 时， $\delta^{(1)}$ 为通常的微分导子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 此时我们有常数域 $F((t^p))$. 但是我们有 $\delta^{(p)}(t^p)=1$, 因而在迭代微分导子下，我们有常数域为 F.

在迭代微分导子下，经典的 Wronskian 行列式的结果可以被推广到特征大于零的域上. 具体的有如下定理，证明参见 [7].

定理 4 设 K 为微分域， $\delta_i=\{\delta_i^{(v)};v\geq 0\},i=1,2,\cdots,\mu$ 为其上的迭代微分导子. 设 $\mathcal{C}$ 为 K 的常数域. 令 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in K$. 那么 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关当且仅当对于任意的 $\theta_i\in\{\delta_1^{(v_1)}\delta_2^{(v_2)}\cdots\delta_\mu^{(v_\mu)}:v_1\geq 0,v_2\geq 0,\cdots,v_\mu\geq 0\}$, $\det((\theta_i x_j)_{1\leq i,j\leq n})=0$.

下面我们将定理 4 推广到迭代微分差分域上.

定理 5 设 K 为迭代微分差分域，其中 $\delta_i=\{\delta_i^{(v)};v\geq 0\},i=1,2,\cdots,\mu$ 为迭代微分导子， $\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_\nu\}$ 为差分导子. 记 $\Theta=\{\delta_1^{(v_1)}\cdots\delta_\mu^{(v_\mu)}\sigma_1^{u_1}\cdots\sigma_\nu^{u_\nu}:v_i\geq 0,u_j\geq 0\}$. 设 $\mathcal{C}$ 为 K 的常数域并且 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in K$. 那么 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关当且仅当对 $\forall\ \theta_i\in\Theta$, $\det((\theta_i x_j)_{1\leq i,j\leq n})=0$.

证 $(\Rightarrow)$ 因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关，所以存在不全为 0 的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n\in\mathcal{C}$ 使得 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n=0$. 易知对于任意的 $\theta\in\Theta$, 均有 $c_1\theta x_1+\cdots+c_n\theta x_n=0$. 因而 $\forall\ \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\in\Theta$,

$$\begin{pmatrix}\theta_1x_1 & \theta_1x_2 & \cdots & \theta_1x_n\\ \theta_2x_1 & \theta_2x_2 & \cdots & \theta_2x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \theta_nx_1 & \theta_nx_2 & \cdots & \theta_nx_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=0.$$

从而对于 $\forall\ \theta_1,2,\cdots,\theta_n\in\Theta,\det((\theta_i x_j)_{1\leq i,j\leq n})=0$.

$(\Leftarrow)$ 证明思路与定理 8 类似，不同之处在于这里的微分导子较为复杂，因而这部分的证明要复杂一些. 我们将对元素的个数 n 进行归纳. $n=1$ 时结论显然成立. 假设 $n<k$ 时结论成立，下面考虑 $n=k$. 若对于任意的 $\theta_i\in\Theta$, 均有 $\det((\theta_i x_j)_{1\leq i,j\leq k-1})=0$, 则由归纳假设 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 在 $\mathcal{C}$ 上线性相关，故而结论对于 $n=k$ 时成立. 下面假设存

在 $\theta'_i \in \Theta$ 使得 $\det\left((\theta'_i x_j)_{1\le i,j\le k-1}\right) \neq 0$. 由此可知 $k-1$ 个向量 $\gamma'_i = (\theta'_i x_1, \theta'_i x_2, \cdots, \theta'_i x_k), i = 1, 2, \cdots, k-1$ 在 K 上线性无关. 由假设条件可知，对于任意的 $\theta \in \Theta$, 有

$$\begin{vmatrix} \theta'_1 x_1 & \theta'_1 x_1 & \cdots & \theta'_1 x_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta'_{k-1} x_1 & \theta'_{k-1} x_2 & \cdots & \theta'_{k-1} x_k \\ \theta x_1 & \theta x_2 & \cdots & \theta x_k \end{vmatrix} = 0.$$

因此存在不全为 0 的 $c_1, c_2, \cdots, c_k \in K$ 使得

$$c_1\theta'_i x_1 + c_2\theta'_i x_2 + \cdots + c_k\theta'_i x_k = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1, \tag{2}$$

并且对 $\forall\, \theta \in \Theta$, $(\theta x_1, \theta x_2, \cdots, \theta x_k)$ 为 $\gamma'_1, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_{k-1}$ 的 K 线性组合. 进而对 $\forall\, \theta \in \Theta$,

$$c_1\theta x_1 + c_2\theta x_2 + \cdots + c_k\theta x_k = 0.$$

由于 $\gamma'_1, \gamma'_2, \cdots, \gamma'_{k-1}$ 在 K 上线性无关，所以 $c_k \neq 0$. 故而我们不妨假设 $c_k = 1$. 接下来我们证明 $c_i \in \mathcal{C}$.

首先证明对于任意的 $v \in \mathbb{N}, j \in \{1, 2, \cdots, \mu\}, i \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$, $\delta_j^{(v)} c_i = 0$. 我们只需要证明 $j = 1$ 的情形，其它情形可类似证明. 我们对 v 用归纳法. 当 $v = 1$ 时，用 $\delta_1^{(1)}$ 作用于 (2) 得

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} \delta_1^{(1)} c_\ell \theta'_i x_\ell + \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \delta_1^{(1)} \theta'_i x_\ell = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

由于 $\delta_1^{(1)}\theta'_i \in \Theta$, 所以 $\sum\limits_{\ell=1}^{k} c_\ell \delta_1^{(1)} \theta'_i x_\ell = 0$, 从而可得 $\sum\limits_{\ell=1}^{k-1} \delta_1^{(1)} c_\ell \theta'_i x_\ell = 0$. 与定理 3 的证明类似，可得 $\delta_1^{(1)} c_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k-1$. 现在假设 $\delta_1^{(v)} c_i = 0$, $\forall\, 1 \le v < s, 1 \le i \le k-1$. 下面考虑 $\delta_1^{(s)} c_i$. 将 $\delta_1^{(s)}$ 作用于 (2) 并利用定义 4 中的 (3) 可得

$$\sum_{\ell=1}^{k} \sum_{v_1+v_2=s} \delta_1^{(v_1)} c_\ell \delta_1^{(v_2)} \theta'_i x_\ell = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

由归纳假设得

$$\sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \delta_1^{(s)} \theta'_i x_\ell + \sum_{\ell=1}^{k} \delta_1^{(s)} c_\ell \theta'_i x_\ell = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k-1.$$

与前面类似的推理过程，可得 $\delta_1^{(s)} c_i = 0, i = 1, 2, \cdots, k-1$. 与定理 2 的证明类似，可得对于任意 $\sigma \in \Sigma$, $\sigma c_i = c_i, i = 1, 2, \cdots, k-1$. 因此 $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathcal{C}$. 定理得证.

参 考 文 献

[1] Kolchin E R. Differential Algebra and Algebraic Groups. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1973, **54**.

[2] Singer M F. Liouvillian solutions of nth order homogeneous linear differential equations. *Amer. J. Math.*, 1981, **103**(4): 661–682.

[3] Chou S C and Gao X S. Automated reasoning in differential geometry and mechanics using the characteristic set method: Part II. Mechanical theorem proving. *J. Automat. Reason.*, 1994, **10**(2): 173–189.

[4] Feng R and Yu J. Mechanical theorem proving in the surfaces using the characteristic set method and Wronskian determinant. *Sci. China Ser. A*, 2008, **51**(10): 1763–1774.

[5] Cohn R M. Difference Algebra. Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydeny, 1965.

[6] Li Z, Wu M and Zheng D. Testing linear dependence of hyperexponential elements. *SIGSAM Communications in Computer Algebra*, 2007, **41(1)**, 3–11.

[7] Schmidt F K. Die Wronskische Determinante in beliebigen differenzierbaren Funktionenkörpern. *Math. Z.*, 1939, **45**(1): 62–74.

[8] Okugawa K. Basic properties of differential fields of an arbitrary characteristic and the Picard-Vessiot theory. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1962/1963, **2**: 295–322.

[9] Garcia A and Voloch J F. Wronskians and linear independence in fields of prime characteristic. *Manuscripta Math.*, 1987, **59**(4): 457–469.

WRONSKIAN DETERMINANTS OVER DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE FIELDS

LI Yinghong FENG Ruyong

(*Key Lab of Mathematics Mechanization, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

Abstract It is well-known that given finitely many of elements in a differential filed (difference field), these elements are linearly dependent over its constant field if and only if the corresponding Wronskian determinant (Casoratian determinant) vanishes. This paper generalizes these classical results into differential-difference fields, that is, the field including both differential operators and shift operators. Based on Okugawa's work, the results are generalized to differential-difference fields with positive characteristic.

Key words Differential-difference field, wronskian determinant, differential operator, shift operator, iterative differential operator.