分类号 ________________ 密级 ________________

UDC ________________ 编号 ________________

中国科学院研究生院
博士学位论文

关于 Zeilberger 方法的终止条件和算法改进

陈 绍 示

指导教师 Frédéric Chyzak 与李子明 研究员

法国国家自动化研究所与数学与系统科学研究院

申请学位级别 博士 学科专业名称 应用数学

论文提交日期 2010 年10 月 论文答辩日期 2010 年11 月

培养单位 中国科学院数学与系统科学研究院

学位授予单位 中国科学院研究生院

答辩委员会主席 ________________

Termination Conditions and Algorithmic Improvements of Zeilberger's Method

Shaoshi Chen

Supervisor:

Frédéric Chyzak and Ziming Li

Key Laboratory of Mathematics Mechanization
Institute of Systems Science
Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Sciences

December, 2010

摘　要

在过去的 20 年里, Zeilberger 方法在特殊函数恒等式, 尤其组合恒等式, 自动证明方面起到了革命性的作用. 本论文将从两个方面研究 Zeilberger 方法.

在实效方面, 我们关注如何对已有的算法进行优化和设计新的更快的算法. 根据由简单到复杂的原则, 我们从构造有理函数的差和算子 (telescoper) 入手. 这种特殊情形仍然有许多应用. 比如, 计算代数函数和组合中有理生成函数的对角 (diagonal) 的零化微分方程. 对双变元有理函数, 我们提出了一种基于 Hermite 约化构造极小差和算子的算法. 并且，我们对经典的 Almkvist–Zeilberger 算法做了一些改进. 通过对许多实际例子的测试，证实了我们的算法在效率上的优越性.

在理论方面, 我们的第一个结果的研究动机是关于完整 (holonomic) 超指数-超几何函数的 Wilf–Zeilberger 猜想. 在已有的关于猜想的离散情形的证明中, Ore-Sato 结构定理起了关键作用. 为了研究猜想的一般情形, 我们证明了任一多变元超指数-超几何函数都可以分解成有理函数, 幂函数, 超指数函数和超几何项的乘积, 这是双变元混合情形时由冯如勇，Singer 和吴敏证明的一个结果的推广. 进一步的, 结合关于多变元超指数函数的 Christopher 定理和关于多变元超几何项的 Ore–Sato 定理, 我们给出了多变元超指数-超几何函数的结构定理. 我们的第二个结果与 Zeilberger 算法的终止问题有关. 在离散情形下, Abramov 给出了判定一个超几何项是否存在差和算子的准则. 在 q-差分情形下, 类似的判定准则由陈永川, 侯庆虎和穆彦平给出. 这些结果在 Zeilberger 算法的终止性判定中起到了本质的作用. 对于其余情形, 即连续-离散混合情形, 我们提出了两个关于双变元超指数-超几何的差和算子的存在的判定准则. 类似于 Abramov 的结果，我们证明了双变元超指数-超几何存在关于离散变元(连续变元) 的差和算子当且仅当该函数可以写成超几何可加的(超指数可积的) 函数与正则函数的和. 我们的准则基于对双变元超指数-超几何的标准表示和两类加法分解.

关键词： Zeilberger 算法, 差和算子, 超指数-超几何函数, Wilf–Zeilberger 猜想, 结构定理, 终止性问题, 存在性判定准则

Abstract

Since 1990's, Zeilberger's method of creative telescoping has played an important role in the automatic proof of special-function identities. The long-term goal initiated in this work is to obtain fast algorithms and implementations for definite integration and summation in the framework of creative telescoping. Our contributions include new practical algorithms and theoretical criteria for the termination of existing algorithms.

On the practical side, we focus on the construction of minimal telescopers for bivariate rational functions, which has many applications related to algebraic functions and diagonals of rational generating functions. By considering this constrained class of inputs, we are able to blend the general method of creative telescoping with the well-known Hermite reduction from symbolic integration. Moreover, we made some improvements over the classical algorithm by Almkvist and Zeilberger for this subclass. Our experimental results showed that the Hermite-reduction based algorithm outperforms all other known algorithms concerning both the worst-case complexity and the actual timings of implementations.

On the theoretical side, our first result is motivated by the Wilf–Zeilberger conjecture on holonomic hyperexponential-hypergeometric functions. We present a structure theorem for multivariate hyperexponential-hypergeometric functions that any such an function can be written as the product of some familiar functions. This theorem extends both the Ore-Sato theorem for multivariate hypergeometric terms and the recent result by Feng, Singer, and Wu for bivariate hyperexponential-hypergeometric functions. The second result is related to the existence problem of telescopers. In the bivariate discrete case, Abramov has derived a criterion that decides whether a hypergeometric term has a telescoper. Similar results have been obtained in the q-shift case by Chen, Hou, and Mu. These results are fundamental for the termination of Zeilberger-style algorithms. In the remaining bivariate continuous-discrete cases, we have derived two existence criteria for the existence of telescopers for bivariate hyperexponential-hypergeometric functions. Our criteria are of the same type as Abramov's; they say that a hyperexponential-hypergeometric function can be written as a sum of a hypergeometric-summable, resp. integrable, function and a proper one if it has a telescoper with respect to the discrete, resp. continuous, variable. Our criteria are based on a standard representation of bivariate hyperexponential-hypergeometric functions, and two additive decompositions.

Keywords: Zeilberger algorithms, telescopers, hyperexponential-hypergeometric functions, Wilf–Zeilberger conjecture, structure theorem, termination problems, existence criteria

目　　录

表　格

插　　图

第一章　引言

1.1　问题的背景

算法化的处理特殊函数的积分和求和是符号计算的重要课题之一. 在 90年代初, Zeilberger [86] 在 Bernstein 的代数 D-模理论 [16] 的框架下提出了一种自动证明一类涉及特殊函数的积分与和式的恒等式的方法, 即 Zeilberger 方法. 该方法的基本思想是先构造积分与和式所满足的微分或者差分方程, 然后通过操作这些方程来证明涉及这些积分与和式的恒等式. 例如, 考虑下面恒等式

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(x,n) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \quad \text{其中 } f(x,n) = \binom{2n}{n} x^n \text{ 且 } x \in [0, 1/4). \tag{1.1}$$

Zeilberger 方法的第一步是寻找等式 (1.1) 左边和式所满足的微分方程. 为此, 先构造非零微分算子 $L \in \mathbb{Q}(x)\langle D_x \rangle$ 使得存在某函数 $g(x,n)$ 满足

$$L(f) = \Delta_n(g). \tag{1.2}$$

此外, 函数 g 与被求和函数 f 之比为关于变元 x 和 n 的有理函数. 这里, 我们可以算法化地找到

$$L = 2 - (1-4x)D_x \quad \text{和} \quad g = nx^{n-1}\binom{2n}{n}.$$

对等式 (1.2) 两边关于 n 求和并注意到求和与 L 算子作用交换, 且

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Delta_n(g) = 0 \quad \text{对所有 } x \in [0, 1/4) \text{ 成立.}$$

如此, 我们就得到等式 (1.1) 左边和式所满足的微分方程为

$$2y(x) - (1-4x)\frac{dy(x)}{dx} = 0.$$

容易验证等式 (1.1) 右边的函数也满足该方程, 并且等式 (1.1) 在 $x = 0$ 时成立. 由 Cauchy 定理, 等式 (1.1) 得证. 等式 (1.2) 中的算子 L 被称为函数 f 的 *差和*

	积分, 求和问题	差和方程
(P1)	$\int_a^b f(x,y)\,dy$	$L(x,D_x)(f) = D_y(g)$
(P2)	$\int_a^b f(n,y)\,dy$	$L(n,S_n)(f) = D_y(g)$
(P3)	$\sum_{m=a}^b f(m,x)$	$L(x,D_x)(f) = \Delta_m(g)$
(P4)	$\sum_{m=a}^b f(n,m)$	$L(n,S_n)(f) = \Delta_m(g)$

表 1.1: 四类差和问题

算子 (telescoper), 而 g 被称为函数 f 关于 L 的*验证函数 (certificate)*. 根据问题的提法不同, 相应地有四类构造差和算子的问题, 见表格 1.1.

自从 Zeilberger 方法提出以来, 在该方法的理论和算法设计方面已经有广泛而深入的研究 [87, 15, 84, 6, 57]. 这里核心的问题有两个方面: 一方面是对于给定函数, 如何判定差和算子是否存在, 即存在性问题; 另一方面是在差和算子存在的前提下, 如何有效的计算出差和算子来, 即构造性问题.

关于存在性问题, Zeilberger 在文章 [86] 中证明了一类所谓的完整函数 (holonomic functions) 总存在差和算子. 特别地，Wilf 和 Zeilberger 基于 Fasenmyer [37] 和 Verbaeten [81] 的思想对差和算子关于正则超指数-超几何函数的存在性给出了一个初等的并且构造性的证明 [84]. 此外, 在这文章中, Wilf 和 Zeilberger 关于超指数-超几何函数提出了一个大胆的猜想：超指数-超几何函数是完整的当且仅当该函数是正则的 (proper)，这里正则指函数可以表示成我们熟知的多项式函数，指数函数，幂函数和伽玛函数的乘积. 从超指数-超几何函数的定义方程出发，正则性是可以用算法判定的. 所以如果该猜想成立，那么判定超指数-超几何函数的完整性质就可以算法化. 但是，完整性质只是差和算子存在的充分条件. 事实上，Chyzak, Kauers 和 Salvy 在文章 [29] 中指出了几类非完整但差和算子仍存在的函数，并且给出了比完整性质弱的存在条件. 因此，找到判定差和算子存在的充分必要条件一直是一种理论上的挑战. 对于超指数-超几何函数，已经有许多这方面的工作. 在连续情形下, Bernstein [16] 和 Lipshitz [60] 等人的工作揭示了对任一超指数函数都存在差和算子. 但是，当我们转到其他情形时问题变得不那么简单. 在离散及其 q-模拟情形，关于存在性问题第一个完整的解答是 Abramov–Le 准则 [58, 9]，该准则可以判定任给关于离散变元 m 和 n 的有理函数是否存在差和算子. 根据他们的准则，我们可以证明有理

函数

$$f = \frac{1}{m^2 + n^2},$$

没有差和算子. 在这项工作完成的不久, Abramov [5, 6] 将该准则推广到了双变元超几何项情形. 更具体的说，Abramov 证明了一个超几何项具有差和算子当且仅当该超几何项可以写成超几何可加的 (hypergeometric-summable) 超几何项与正则超几何项的和. 在 q-差分情形，类似的判定准则由陈永川，侯庆虎和穆彦平在文章 [23] 中给出. 根据 Zeilberger 算法的设计方式，其终止性与差和算子的存在性等价. 所以以上这些结果在 Zeilberger 算法的终止性判定中起到了本质的作用. 这样, 剩下的存在性问题是两种微分-差分混合情形, 即表格 1.1 中的 (P2) 和 (P3). 这两个存在性问题将在本论文的第五章中解决.

关于构造性问题, Zeilberger 在文章 [86] 中提出的算法是先将 Sylvester 消元方法推广到微分算子环上, 然后来构造差和算子. 这种消元的思想在后来 Takayama [78] 和 Chyzak 与 Salvy 等人的工作 [30] 中利用非交换 Gröbner 基方法得到了改进. 不久, Zeilberger 发现对一类所谓的超几何项可以基于参数化的 Gosper 算法来“快速”的构造差和算子 [87], 这就是后来所谓的 Zeilberger 快速算法 (fast algorithm). 几乎同时, Almkvist 和 Zeilberger 将该快速算法推广到了微分情形 [15]. 这类快速算法在许多计算机代数系统中得到了实现, 比如 Maple [7], Mathematica [64]等. 在文章 [28] 中, Chyzak 将此快速算法推广到了一般的 ∂-有限函数. 相比之下, 复杂度分析方面的工作却很少. 当输入是有理函数时, 我们在文章 [17] 中得到了一些复杂度分析的结果. 已有的算法是将差和算子与其验证函数绑定在一起同时计算出来的. 但从应用角度看, 许多时候只需要计算差和算子. 所以如何避免验证函数计算在实际应用中很重要. 这是本论文第三章的主要研究动机之一.

1.2 本论文的贡献

我们的主要结果有三部分:

1. 在第三章中, 对于双变元的有理函数，我们提出了一种基于 Hermite 约化构造极小差和算子的算法. 并且，我们对经典的 Almkvist–Zeilberger 算法做了一些改进. 我们在计算机代数系统 Maple 上实现了这两种算法. 通过对实际例子的测试，证实了我们的程序比 Maple 原有的程序 DEtools[Zeilberger] 效率高.

2. 在第四章中, 为了研究 Wilf–Zeilberger 猜想的一般情形, 我们证明了任一多变元超指数-超几何函数都可以分解成有理函数, 幂函数, 超指数函数和超几何项的乘积, 这是双变元混合情形时由冯如勇，Singer 和吴敏证明的一个结果的推广. 进一步的, 结合关于多变元超指数函数的 Christopher 定理和关于多变元超几何项的 Ore–Sato 定理, 我们给出了多变元超指数-超几何函数的结构定理. 该定理是多变元离散情形 Ore–Sato 定理 [61, 75, 65, 14] 和双变元混合情形由冯如勇，Singer 和吴敏证明的一个结果 [39, 性质 5] 的推广.

3. 在第五章中, 我们提出了两个关于双变元超指数-超几何的差和算子的存在的判定准则. 类似于 Abramov 的结果，我们证明了双变元超指数-超几何存在关于离散变元(连续变元) 的差和算子当且仅当该函数可以写成超几何可加的(超指数可积的) 函数与正则函数的和. 我们的准则基于对双变元超指数-超几何的标准表示和两类加法分解：一类是关于离散变元的 Abramov–Petkovšek 分解 [11, 13]，另一类是关于连续变元的 Geddes–Le–Li 分解 [44].

第二章　预备知识

在本章中, 我们介绍微分, 差分环 (域) 和 Ore 多项式环 [73, 31, 61, 85] 的基本定义与性质. 此外, 我们将简述有理函数的不定积分计算的一些基本方法.

2.1　微分, 差分环和域

设 R 是一个交换环. 映射 $\delta:\ R\rightarrow R$ 称为 R 上的导数, 如果对所有 $a,b\in R$ 满足

$$\delta(a+b)=\delta(a)+\delta(b),\quad \delta(ab)=\delta(a)b+a\delta(b).$$

二元组 (R,δ) 被称为一个微分环. 进一步地, 如果 R 是域, 则称 R 为微分域. R 中元素 c 被称为是关于 δ 的常数如果 $\delta(c)=0$. R 中关于 δ 的所有常数构成 R 的一个子环, 记为 $C_{\delta,R}$. 当 R 是域时, $C_{\delta,R}$ 也是域. 下面我们给出导数的一些基本性质, 其证明见 [20].

引理 2.1. *设 (R,δ) 为微分环. 对所有的 $a,b\in R$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 满足*

(i) $\delta(1)=0$;

(ii) $\delta(a^n)=na^{n-1}\delta(a)$;

(iii) *如果 b 是可逆的, 则有*

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{\delta(a)b-a\delta(b)}{b^2}.$$

(iv) *对数导数恒等式: 如果 a,b 是可逆的, 则有*

$$\frac{\delta(ab)}{ab}=\frac{\delta(a)}{a}+\frac{\delta(b)}{b}.$$

设 $\sigma:R\rightarrow R$ 是单同态. 则二元组 (R,σ) 被称为一个差分环. 进一步的, 如果 R 是域, 则称 R 为差分域. R 中元素 c 被称为是关于 σ 的常数如果 $\sigma(c)=c$. R 中关于 σ 的所有常数构成 R 的一个子环, 记为 $C_{\sigma,R}$. 当 R 是域时, $C_{\sigma,R}$ 也是域. 自然地, 我们称三元组 (R,δ,σ) 为一个微分-差分环. 如果 R 上的导数 δ 和自同构 σ 是可交换的, 则称 (R,δ,σ) 为正交的 (orthogonal). 如果没有特别说明, 我们总假设后文出现的域都是特征零的, 微分-差分环都是正交的.

2.2 Ore 环

域上的一元 Ore 多项式环是统一处理线性常微分、差分、q-差分和其它算子的代数模型. 它是一类特殊的非交换主理想整环. 设 (F, δ, σ) 为微分-差分域. 域 F 上的 Ore 多项式环 $F[x; \delta, \sigma]$ 是关于 x 的一元多项式环, 其加法和普通多项式加法一样, 乘法满足结合律, 分配律和如下交换法则:

$$xf = \sigma(f)x + \delta(f), \quad \text{对所有 } f \in F \text{ 成立}. \tag{2.1}$$

由交换规则 (2.1)，$F[x; \delta, \sigma]$ 中的任意两个 Ore 多项式的乘法可以由结合律、分配律得出. 下面给出 Ore 多项式环的几个例子：

例 2.1.

1. 任意域 k 上普通多项式环 $k[x]$, 这里导数 δ 为零映射, 自同构 σ 为恒等映射.
2. 微分算子环 $k(t)[x; d/dt, 1]$, 这里 1 代表恒等映射.
3. 移位算子环 $k(t)[x; 0, \sigma]$, 这里对任意 $f \in k(t)$ 定义 $\sigma(f(t)) = f(t+1)$.
4. 差分算子环 $k(t)[x; 0, \Delta]$, 这里对任意 $f \in k(t)$ 定义 $\Delta(f(t)) = f(t+1) - f(t)$.

当 σ 是自同构时, 在 Ore 多项式环 $F[x; \delta, \sigma]$ 上有左和右欧几里德除法算法, 即对任意 $f, g \in F[x; \delta, \sigma]$, 存在 $q, r \in F[x; \delta, \sigma]$ 使得 $f = qg + r$ 或者 $f = gq + r$, 其中 $\deg(r) < \deg(g)$, 这蕴含着 $F[x; \delta, \sigma]$ 是主理想整环. Ore 多项式环可以推广到多变元情形, 具体参见 [30, 27, 85].

2.3 有理函数的不定积分

初等函数的不定积分曾经是计算机代数早期发展的动力之一. 许多经典的技巧，比如扩展欧几里德算法，无平方分解，子结式算法等都在提高计算积分效率上起到了重要作用. 从算法角度来说，是 Risch [70, 71] 在 1969 年提出了第一个完整的算法用来判定初等函数的不定积分是否仍然是初等函数的，并且给出了计算初等函数的不定积分的基本思路. Risch 算法在大部分计算机代数系统中得到了部分实现. 继此之后，Rothstein, Trager, Davenport 和 Bronstein 等人发展并改进了 Risch 算法 [74, 79, 35, 19]. 如今, 符号积分 (*Symbolic Integration*)

与微分方程，差分方程符号求解已经成为符号计算学科里活跃的研究方向. 在本节中，我们将回顾计算有理函数的不定积分的一些基本技巧和方法. 关于更详细的阐述，可以参见 [19, 第 2 章], [42, 第 11 章], 和 [82, 第 22 章].

设 F 是特征为零的域，$F(y)$ 是 F 上关于变元 y 的有理函数域. 在域 $F(y)$ 上，导数 δ 定义为

$$\delta(f) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \text{对所有 } f \in F(y) \text{ 成立.}$$

如此，$(F(y), \delta)$ 就是个微分域，并且其常数域为 F. 在大学微积分中，我们知道任一复数域上有理函数 $f \in \mathbb{C}(y)$ 都具有如下形式的初等函数不定积分，

$$\int f\, dy = g + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log(y - \alpha_i) \tag{2.2}$$

其中 $g \in \mathbb{C}(y)$ 且 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$. 这里，我们称 g 为不定积分的有理部分 (*rational part*), 对数和式为不定积分的对数部分 (*logarithmic part*). 在基域为复数域即代数闭域的情况下，有理函数的不定积分问题从理论上已经完全解决. 但是，当基域不是代数闭域时，比如有理数域 $\mathbb{Q}$，问题就变得相对复杂. 这时候，我们可能需要对基域做代数扩张，并且所有的计算可能要在代数扩域中进行. 因此，简单的运用微积分中的方法就不可行了. 对于任一有理函数 $f \in F(y)$，Hermite [47] 早在 1872 年就注意到 f 的不定积分的有理部分仍然在域 $F(y)$ 中，并且提出了计算有理部分的算法，即 Hermite 约化 (Hermite reduction)，该算法避免了引进任何代数扩张. 要完整的表示出不定积分的对数部分，一般来说是需要对基域进行适当的扩张的. 这时的问题是如何避免一些不必要的代数扩张. 这个问题分别由 Trager [79] 和 Rothstein [74] 独立解决.

2.3.1 Hermite 约化

Hermite 约化的基本思想是运用扩展欧几里德算法和分部积分将被积有理函数化归到一个分母为无平方多项式的有理函数. 换句话说, Hermite 约化将给定有理函数 $f \in F(y)$ 分解成

$$f = \delta(g) + \frac{a}{b}, \quad \text{其中 } g \in F(y)\text{，} a, b \in F[y] \text{ 满足 } \deg(a) < \deg(b) \text{ 且 } b \text{ 是无平方的.} \tag{2.3}$$

这样的二元组 $(g, a/b)$ 被成为 f 关于 y 的加法分解 (*additive decomposition*). 有理函数 g 和 a/b 分别称为 f 的加法分解的有理部分和对数部分.

下面我们概述一下 Hermite 约化的基本步骤，更详细的说明参见 [19, 第 2.2 节]. 首先，将被积函数 $f \in F(y)$ 写成 $f = A/D$，这里 $A, D \in F[y]$ 且 $\gcd(A, D) = 1$. 设 $D = D_1 D_2^2 \dots D_n^n$ 为 D 的无平方分解. 关于这个分解，我们得到 f 的如下部分分式分解

$$f = P + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{D_i^i}, \tag{2.4}$$

其中 P 和 A_i 都在 $F[y]$ 中并且 $\deg(A_i) < \deg(D_i^i)$ 对所有 i. 由导数 δ 的线性性质, 我们只需考虑所有如下分式的不定积分

$$\frac{P}{Q^m} \in F[y], \quad \text{这里整数 } m > 1,\ \deg(P) < m \deg(Q) \text{ 且 } Q \text{ 是无平方的.}$$

由 Q 的无平方性，即 $\gcd(Q, \delta(Q)) = 1$, 则存在如下 Bézout 等式

$$S\delta(Q) + TQ = 1, \tag{2.5}$$

这里的 $S, T \in F[y]$ 可以通过扩展欧几里德算法求得. 进一步地，上式两边乘以 P 再做带余除法，我们得到

$$P = SP\delta(Q) + TPQ = (GQ + B)\delta(Q) + TPQ = B\delta(Q) + CQ, \tag{2.6}$$

其中 $C = G\delta(Q) + TP$ 满足 $\deg(C) < (m-1)\deg(Q)$. 现在，由分部积分得出

$$\frac{P}{Q^m} = \frac{B\delta(Q) + CQ}{Q^m} = \delta\left(\frac{-(m-1)^{-1}B}{Q^{m-1}}\right) + \frac{C + (m-1)^{-1}\delta(B)}{Q^{m-1}}, \tag{2.7}$$

这里 $\deg(C + (m-1)^{-1}\delta(B)) < (m-1)\deg(Q)$ 因为 $\deg(B) < \deg(Q)$ 且 $\deg(C) < (m-1)\deg(Q)$. 如此，分式 P/Q^m 的极点阶数降低了至少一次. 重复上述步骤直到把分母化为无平方的.

下面的引理是关于加法分解的唯一性，该结论最早是在 Ostrogradsky [62] 工作中提出. 该引理可以用 [42, 定理 11.4] 的证明方法同样证得.

引理 2.2. 设 $f = a/b$ 是 $F(y)$ 中非零有理函数，满足 $a, b \in F[y]$, $\gcd(a, b) = 1$, $\deg(a) < \deg(b)$, 且 b 是无平方的. 则不存在 $g \in F(y)$ 使得 $f = \delta(g)$.

推论 2.3. 设 f 是 $F(y)$ 中有理函数. 则 f 的加法分解在允许有理部分相差一个常数意义下是唯一的.

证明. 假设 $(g_1, a_1/b_1)$ 和 $(g_2, a_2/b_2)$ 是 f 的两个加法分解, 且 $a_1/b_1 \neq a_2/b_2$. 则对数部分的差可以写成

$$0 \neq \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{A}{B}, \quad \text{其中 } A, B \in F[y],\ \gcd(A, B) = 1,\ \text{且 } \deg(A) < \deg(B).$$

因为 b_1 和 b_2 是无平方的且 B 整除 $b_1 b_2$, 所以 B 也是是无平方的. 但是,

$$\frac{A}{B} = \delta(g_2 - g_1),$$

这与引理 2.2 矛盾. 因此 $a_1/b_1 = a_2/b_2$ 且有 g_1 和 g_2 只相差一个常数. ∎

为后面应用, 我们回顾对数导数的一些基本性质.

引理 2.4. *对任意非零有理函数 $f, g \in F(y)$ 和整数 $m \in \mathbb{Z}$, 成立*

$$\frac{\delta(f^m)}{f^m} = m\frac{\delta f}{f} \quad \text{和} \quad \frac{\delta(fg)}{fg} = \frac{\delta(f)}{f} + \frac{\delta(g)}{g}. \tag{2.8}$$

此外, 如果 $f = a/b$ 满足 $a, b \in F[y]$ 且 $\gcd(a, b) = 1$, 则

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{p}{a^* b^*},$$

其中 a^* 和 b^* 分别为 a 和 b 的无平方部分, 且 $p \in F[y]$ 满足 $\deg(p) < \deg(a^* b^*)$ 且 $\gcd(p, a^* b^*) = 1$.

证明. 等式 (2.8) 由下面的直接计算可得:

$$\frac{\delta(f^m)}{f^m} = \frac{m\delta(f) f^{m-1}}{f^m} = m\frac{\delta f}{f} \quad \text{且} \quad \frac{\delta(fg)}{fg} = \frac{\delta(f)g + f\delta(g)}{fg} = \frac{\delta(f)}{f} + \frac{\delta(g)}{g}.$$

设 $a = a_1 a_2^2 \cdots a_m^m$ 和 $b = b_1 b_2^2 \cdots b_n^n$ 分别为 a 和 b 的无平方分解. 则 $a^* = a_1 a_2 \cdots a_m$ 和 $b^* = b_1 b_2 \cdots b_n$. 由等式 (2.8) 得出

$$\frac{\delta f}{f} = \frac{p}{a^* b^*}, \quad \text{其中} \quad p = b^* \sum_{i=1}^{m} \frac{i\delta(a_i) a^*}{a_i} - a^* \sum_{j=1}^{n} \frac{j\delta(b_j) b^*}{b_i} \in F[y].$$

容易看出 $\deg(p) < \deg(a^* b^*)$. 因为 a_i 和 b_j 都是无平方的且两两互素, 所以

$$\gcd\left(a^*, \sum_{i=1}^{m} \frac{i\delta(a_i) a^*}{a_i}\right) = \gcd\left(b^*, \sum_{j=1}^{n} \frac{j\delta(b_j) b^*}{b_i}\right) = 1,$$

这进一步导出 $\gcd(p, a^* b^*) = 1$. 证毕. ∎

下面的引理对后面证明唯一性结论很重要. 特别地, 我们将在定理 4.12 和引理 4.6 的证明中用到这个结论.

引理 2.5. 设 f 是 $F(y)$ 中的有理函数, $p_1, \ldots, p_n$ 是 $F[y]$ 中两两互素的多项式, 且 $c_1, \ldots, c_n$ 是 F 中的元素. 如果

$$\delta(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\delta(p_i)}{p_i},$$

那么 $f \in F$ 且对所有满足 $1 \leq i \leq n$ 的 i, 要么 $c_i = 0$ 要么 $p_i \in F$.

证明. 令 p_i^* 是 p_i 的无平方部分. 由引理 2.4, 得出

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\delta(p_i)}{p_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{q_i}{p_i^*} \triangleq \frac{a}{b},$$

其中 $a, b \in F[y]$, $\gcd(a, b) = 1$ 且 q_i 是 $F[y]$ 中多项式满足 $\gcd(q_i, p_i^*) = 1$ 和 $\deg(q_i) < \deg(p_i^*)$. 因为 p_i 是两两互素的, 所以 p_i^* 也是两两互素的. 由此, b 的分母是无平方的且 $\deg(a) < \deg(b)$. 由引理 2.2, a/b 必然等于零且 $f \in F$. 由部分分式分解的唯一性, 所有分式 $c_i q_i / p_i^*$ 也都等于零. 这蕴含着对所有满足 $1 \leq i \leq n$ 的 i, 要么 $c_i = 0$ 要么 $p_i \in F$. ∎

Ostrogradsky–Horowitz 算法 [62, 48] 是基于线性方程组求解来得到有理函数的加法分解的另一种方法. 具体参见 [19, 第 2.3 节].

2.3.2 留数和 Rothstein–Trager 结式

在得到加法分解之后, 有理函数的不定积分问题就转化为计算如下函数的积分

$$\int \frac{a}{b}\, dy, \quad \text{其中 } a, b \in F[y] \text{ 满足 } \gcd(a, b) = 1, \deg(a) < \deg(b) \text{ 且 } b \text{ 无平方.} \tag{2.9}$$

在 F 的代数闭包 $\overline{F}$ 上, 有理函数 a/b 可以分解为

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{y - \alpha_i}, \quad \text{其中 } \alpha_i, \beta_i \in \overline{F} \text{ 且 } b(\alpha_i) = 0 \text{ 对 } 1 \leq i \leq n.$$

从而，a/b 的积分可以表达为

$$\int \frac{a}{b}\,dy = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log(y-\alpha_i).$$

类似于分析中的定义，我们称 β_i 为 a/b 在点 $y=\alpha_i$ 处的留数 (*residue*). 根据 Lagrange 公式 [41, 第 38 页] (或见 [42, 练习 11.8])，a/b 在 α_i 处的留数为

$$\beta_i = \frac{a(\alpha_i)}{\delta b(\alpha_i)} \in F(\alpha_i). \tag{2.10}$$

所以我们总可以在 b 的分裂域中把不定积分 (2.9) 表达出来. 但是，为了得到此积分不一定总要计算分裂域. 比如，下面的积分可以在不需要任何代数扩张下表到出来.

$$\int \frac{2y}{y^2-2}\,dy = \log(y+\sqrt{2}) + \log(y-\sqrt{2}) = \log(y^2-2).$$

事实上，Rothstein [74] 和 Trager [79] 已经证明了表达出积分 (2.9) 所需的极小代数扩张是如下结式的分裂域.

$$R(z) = \mathrm{resultant}_y(b, a - z\delta b) \in F[z]. \tag{2.11}$$

上面的多项式 $R(z)$ 被称为 a/b 关于 y 的 Rothstein–Trager 结式 (*Rothstein–Trager resultant*). 由公式(2.10)，所有 a/b 在其极点处的留数都是 $R(z)$ 的根. 此外我们有下面的引理，该结论分散在文献 [42, 19, 82] 中.

引理 2.6. *设 $a, b \in F[y]$ 满足 $\deg(a) < \deg(b)$，$\gcd(a,b)=1$ 且 b 是 $F[y]$ 中无平方多项式. 设 $R(z)$ 为 a/b 关于 y 的 Rothstein–Trager 结式. 则有*

(i) 所有 $R(z)$ 的根都是非零的;

(ii) 如果 α_1 和 α_2 是 $R(z)$ 的两个互不相同的根，则 p_1 和 p_2 是在 $\overline{F}$ 上互素的多项式，其中

$$p_i = \gcd(b,\, a-\alpha_i\delta(b)) \in F(\alpha_i)[y], \quad \text{这里 } i=1,2.$$

证明. 结论 (*i*) 由 $\gcd(a,b)=1$ 导出. 至于结论 (*ii*)，我们先假设 p_1 和 p_2 不是互素的，则存在 $\beta \in \overline{F}$ 使得 $p_1(\beta)=p_2(\beta)=0$. 由 p_1 和 p_2 的定义可知，$b(\beta)=0$

且对于 $i=1,2$ 有 $(a-\alpha_i\delta(b))(\beta)=0$. 因为 b 在 $F[t]$ 中是无平方的, 所以 $\delta(b)(\beta)\neq 0$, 这蕴涵着

$$\alpha_1=\alpha_2=\frac{a(\beta)}{\delta(b)(\beta)},$$

这与 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 矛盾. 证毕. ∎

下面的定理是计算对数部分的 Rothstein–Trager 算法的基础. 关于该定理的证明, 参见 [20, 定理 2.4.1] 或者 [82, 定理 22.8].

定理 2.7 (Rothstein–Trager)**.** *设 $a,b\in F[y]$ 满足 $\deg(a)<\deg(b)$, $\gcd(a,b)=1$ 且 b 在 $F[y]$中是无平方的. 设 $R(z)$ 为 a/b 关于 y 的 Rothstein–Trager 结式. 则 a/b 的积分可以表达为*

$$\int\frac{a}{b}\,dy=\sum_{i=1}^{n}c_i\log(g_i),$$

这里 $c_1,\dots c_n\in\overline{F}$ 是 $R(z)$ 的互不相同的根且 $g_i=\gcd(b,a-c_i\delta b)\in F(c_i)[y]$ 对所有 $1\le i\le n$. 此外, 如果 E 是 F 的一个代数扩张使得在 E 上有

$$\int\frac{a}{b}\,dy=\sum_{i=1}^{m}\tilde{c}_i\log(\tilde{g}_i),$$

这里 $\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_m\in E\setminus\{0\}$ 且 $\tilde{g}_1,\dots,\tilde{g}_m\in E[y]\setminus E$ 是首一, 无平方, 且两两互素的. 则 E 包含 $R(z)$ 的所有的根.

综合上面两节所述, 我们得到关于有理函数不定积分的基本定理.

定理 2.8. *设 f 是 $F(y)$ 中非零的有理函数. 则存在 $g\in F(y)$, 非零 $c_j\in\overline{F}$ 和 $p_j\in F(c_j)[y]\setminus F(c_j)$ 对所有 $j=1,\dots,n$ 使得*

$$f=\delta(g)+\sum_{j=1}^{n}c_j\frac{\delta(p_j)}{p_j}.$$

此外, 当 $j\neq j^*$ 时, p_j 和 p_{j^*} 是 $\overline{F}$ 上的互素的多项式.

证明. 由 Hermite 约化, 存在 $f\in F(y)$, $a,b\in F[y]$ 满足 $\deg a<\deg b$, $\gcd(a,b)=1$ 且 b 是无平方的, 使得

$$f=\delta(g)+\frac{a}{b}.$$

如果 a 等于零, 命题得证. 假设 a 是非零, 并且令 Λ 为 a/b 关于 y 的 Rothstein–Trager 结式 $R(z)$ 的所有的根构成的集合. 由引理 2.6 (i), 所有 Λ 的元素都非零. 由定理 2.7 可知,

$$f = \delta(g) + \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda \frac{\delta(p_\lambda)}{p_\lambda},$$

其中 $p_\lambda = \gcd(b,\, a - \lambda\delta b) \in F(\lambda)[y] \setminus F(\lambda)$. 由引理 2.6 (ii), 当 λ 和 μ 为 Λ 中互不相同元素时, p_λ 和 p_μ 是互素的. 证毕. ▮

第三章　基于 Hermite 约化计算有理函数的差和算子

3.1　前言

早在 1827 年, 挪威数学家阿贝尔 [1, 第 287 页] 就注意到: 任意单变元代数函数都是某多项式系数线性微分方程的解. 计算代数函数所满足的线性微分方程在理论上和实际应用中都非常重要 [33, 32, 25, 26]. 在文章 [18] 中, Bostan, Chyzak 等人发现这类线性微分方程可以通过计算双变元有理函数的差和算子 (telescoper) 来得到. 另一方面, 许多组合计数问题都与计算生成函数的对角 (diagonal) 有密切联系 [69, 66]. 当生成函数是双变元有理函数时, 其对角所满足的线性微分方程也可以通过计算有理函数的差和算子 (telescoper) 而得到. 在这一章中, 我们将讨论如何有效地计算有理函数的差和算子, 即研究如下问题:

问题 3.1.
给定非零双变元有理函数 $f \in k(x, y)$, 构造非零算子 $L \in k(x)\langle D_x \rangle$ 与双变元有理函数 $g \in k(x, y)$ 使得

$$L(x, D_x)(f) = D_y(g). \tag{3.1}$$

这里，我们称 L 为 有理函数 f 的差和算子 (telescoper)，g 为 f 关于 L 的验证函数 (certificate). 因为 D_y 和环 $k(x)\langle D_x \rangle$ 中任何元素都是可交换的，所以我们总可以让差和算子的系数取为关于 x 的多项式.

主要结果. 对于双变元的有理函数，我们提出了一种基于 Hermite 约化的构造极小差和算子的算法. 并且，我们对经典的 Almkvist–Zeilberger 算法做了一些改进. 我们在计算机代数系统 Maple 上实现了这两种算法. 通过对实际例子的测试，证实了我们的程序比 Maple 原有的程序 DEtools[Zeilberger] 效率高.

本章其余部分安排如下: 首先，我们基于 Lipshitz 的方法给出了差和算子的阶的二次估计. 进一步地，我们采用文章 [18] 中的方法得到了阶的更好的估计. 在小节 3.3 中，我们提出了基于 Hermite 约化的构造极小差和算子的新算法，并对已有的 Almkvist–Zeilberger 算法做了一些改进. 最后，我们将给出算法的程序实现及一些测试例子.

本章的结果是与 Alin Bostan，Frédéric Chyzak，和李子明合作得到的. 主要结果发表于 [17].

3.2 差和算子的存在性与阶估计

在 1990 年，Zeilberger [86] 基于 Bernstein 的完整 D-模理论 (holonomic D-modules) [16] 证明了差和算子 (telescopers) 对所有完整函数 (holonomic functions) 都存在，从而保证了 Zeilberger 算法对于处理一大类熟知的特殊函数恒等式的可行性. 实际上，研究差和算子的存在性更加初等的方法是运用 Lipshitz 在文章 [60] 中证明的一个消元引理. 在这节中，我们就运用 Lipshitz 的方法来讨论有理函数的差和算子的存在性和阶估计.

设 $f = P/Q \in k(x, y)$ 为非零有理函数且 P 和 Q 为 $k[x, y]$ 中互素的多项式. 令 $d_x = \max\{\deg_x(P), \deg_y(Q)\}$ 和 $d_y = \max\{\deg_y(P), \deg_y(Q)\}$. 我们下面的目标是找到非零的微分算子 $A(x, D_x, D_y) \in k[x]\langle D_x, D_y\rangle$ 使得 $A(f) = 0$. 为此设 $\mathbb{W}_N$ 是由集合 $\{\, x^i D_x^j D_y^\ell \mid i + j + \ell \le N \,\}$ 在 k 上张成的向量空间. 由组合事实可知，$\mathbb{W}_N$ 在 k 上的维数为 $\binom{N+3}{3}$. 由导数法则和数学归纳法可得，

$$x^i D_x^j D_y^\ell(f) = \frac{P_{i,j,\ell}}{Q^{i+j+\ell+1}}, \tag{3.2}$$

其中 $\deg_x(P_{i,j,\ell}) \le (i + j + \ell)d_x + i$ 且 $\deg_y(P_{i,j,\ell}) \le (i + j + \ell)d_y$. 所以集合 $\mathbb{W}_N(f)$ 包含在如下集合中

$$\mathbb{V}_N = \operatorname{span}_k \left\{ \frac{x^i y^j}{Q^{N+1}} \mid i \le (N+1)d_x + N, j \le (N+1)d_y \right\},$$

这里 $\mathbb{V}_N$ 在 k 上的维数为 $(N+1)(d_x+1)((N+1)d_y+1)$. 定义映射 $\phi\colon \mathbb{W}_N \to \mathbb{V}_N$ 为 $\phi(L) = L(f)$, 这里 $L \in \mathbb{W}_N$. 不难验证当 $N \ge 6(d_x + 1)(d_y + 1)$ 时，不等式

$$\binom{N+3}{3} > (N+1)(d_x+1)((N+1)d_y+1)$$

成立. 这表明当 $N \ge 6(d_x + 1)(d_y + 1)$ 时，线性映射 ϕ 的核中含有非零元素，即存在非零元素 $A(x, D_x, D_y) \in k[x]\langle D_x, D_y\rangle$ 使得 $A(f) = 0$. 下面的引理表明从这样的零化算子 $A(x, D_x, D_y)$ 出发可以找到 f 的差和算子. 本引理的证明采用了 Wegschaider [83, 定理 3.2] 在证明类似结论时使用的技巧.

引理 3.1. 设 $f \in k(x,y)$ 为非零有理函数， A 为 $k[x]\langle D_x, D_y\rangle$ 中非零算子使得 $A(f)=0$. 则存在非零算子 $L(x,D_x) \in k[x]\langle D_x\rangle$ 和有理函数 $g \in k(x,y)$ 使得 $L(f)=D_y(g)$.

证明. 首先，非零算子 A 总可以写成 $A = D_y^m(L(x,D_x)+D_yM)$, 其中 $m \in \mathbb{N}$, $M \in k[x]\langle D_x, D_y\rangle$，且 L 是 $k[x]\langle D_x\rangle$ 中的非零算子. 由 Wegschaider 技巧 [83, 定理 3.2] 的微分推广可知，存在 $w \in k[y]$ 和非零的 $r \in k$ 使得

$$wD_y^m = D_yQ + r, \tag{3.3}$$

这里 $Q \in k[y]\langle D_y\rangle$. 特别地，当取 $w=y^m$ 时，则有 $r=(-1)^m m! \neq 0$. 由 $rD_y = D_y r$ 和 (3.3) 得出

$$\frac{y^m}{(-1)^m m!}A = L + D_yG, \quad 其中\ G \in k[x,y]\langle D_x, D_y\rangle.$$

因为 $A(f)=0$, 所以 $L(f)=D_y(-G(f))$. 注意到 $g=-G(f)$ 仍然是 $k(x,y)$ 中的有理函数. 证毕. ∎

由 Lipshitz 的方法我们得出差和算子的阶的界是 $6(d_x+1)(d_y+1)$，即是二次的. 下面我们采用文章 [18] 中的方法给出一个只是关于 d_y 线性的阶的界的估计. 这时我们设

$$\mathbb{W}_{N_x,N_\partial} = \operatorname{span}_k\left\{\, x^iD_x^jD_y^\ell \mid i \le N_x, j+\ell \le N_\partial \,\right\}.$$

这里 $\mathbb{W}_N$ 在 k 上的维数为 $(N_x+1)\binom{N_\partial+2}{2}$. 由等式 3.2 可知，集合 $\mathbb{W}_{N_x,N_\partial}(f)$ 包含在如下集合中

$$\mathbb{V}_{N_x,N_\partial} = \operatorname{span}_k\left\{\frac{x^iy^j}{Q^{N+1}} \mid i \le (N_\partial+1)d_x+N_x, j \le (N_\partial+1)d_y\right\}.$$

这里 $\mathbb{V}_{N_x,N_\partial}$ 在 k 上的维数为 $((N_\partial+1)d_x+N_x+1)((N_\partial+1)d_y+1)$. 这时我们可以选取 $N_x=3d_xd_y$ 和 $N_\partial=6d_y$ 得到不等式

$$(N_x+1)\binom{N_\partial+2}{2} > ((N_\partial+1)d_x+N_x+1)((N_\partial+1)d_y+1).$$

由此存在一个非零算子 $A \in k[x]\langle D_x, D_y\rangle$ 使得 $A(f)=0$. 不过这时 f 的差和算子 L 的阶至多为 $6d_y$, 即关于 d_y 是线性的.

3.3 极小差和算子的构造

从 1990 年以来，许多已有工作 [86, 15, 43, 57] 的注意力都集中在计算阶为极小的差和算子上. 注意到一个有理函数的所有差和算子在主理想环 $k(x)\langle D_x\rangle$ 中形成一个左理想. 该理想的生成元我们称之为该有理函数的极小差和算子. 下面我们就来研究如何计算一个有理函数的极小差和算子 (minimal telescoper). 对于给定有理函数来说，其任意两个极小差和算子之间只相差 $k(x)$ 中的因子. 所以，函数的首一的极小差和算子是唯一的.

3.3.1 基于 Hermite 约化的算法

在实际应用中，我们往往只需要求差和算子，而不需要求验证函数. 在后面的分析中，我们将知道验证函数本身的存贮大小要比差和算子的大一个量阶. 因此，如何在构造差和算子过程中，避免验证函数的计算将对许多应用问题起到很大的帮助. 出于这个目的，我们在方框 3.1 中设计出了一种构造极小差和算子的新算法. 该算法的核心是有理函数的 Hermite 约化并且可以应实际需要而选择计算或不计算验证函数.

设 $f = P/Q$ 为 $k(x,y)$ 中的有理函数, 这里 P 和 Q 是 $k[x,y]$ 中的互素的多项式. 对所有非负整数 i，关于 y 运用 Hermite 约化可以得到加法分解

$$D_x^i(f) = D_y(g_i) + r_i, \tag{3.4}$$

其中 $g_i, r_i \in k(x,y)$ 且 r_i 是分母为关于多项式的真分式. 注意到 $D_x^i(f)$ 的分母的无平方因子部分整除 Q 的关于 y 无平方因子部分 Q^*, 所以 r_i 的分母也必然整除 Q^*. 如此我们可以将所有 r_i 统一写成

$$r_i = \frac{a_i}{Q^*}, \quad 其中\ a_i \in k(x)[y]\ 且\ \deg_y(a_i) < \deg_y(Q^*). \tag{3.5}$$

设 $\mu = \deg_y(Q^*)$, 把所有 a_i 看成在 $k(x)$ 上维数为 μ 的向量，那么由线性代数知识可知，$a_0, \ldots, a_\mu$ 在 $k(x)$ 上线性相关. 综上所述，我们得到下面的引理：

引理 3.2. *有理函数 $r_0, \ldots, r_\mu$ 在 $k(x)$ 上线性相关.*

下面的引理 3.3 将说明一旦给出有理函数 r_i 在 $k(x)$ 上的线性关系，通过 (3.4) 就可以得到 f 的差和算子及其相应的验证函数. 此外该引理还说明方框 3.1 中的算法 HermiteTelescoping 可以正确地得到 f 的极小差和算子及其相应的验证函数.

算法 HermiteTelescoping

输入: $f = P/Q \in k(x,y)$ 满足 $\gcd(P,Q)=1$.

输出: 极小差和算子 $L \in k[x]\langle D_x \rangle$ 和验证函数 $g \in k(x,y)$.

1. 对 f 关于 y 运用 Hermite 约化得出加法分解 $f = D_y(g_0) + a_0/Q^*$. 如果 $a_0 = 0$, 那么返回 $(1, g_0)$.

2. 对 i 从 1 到 $\deg_y(Q^*)$ 执行：

   (a) 对 $-a_{i-1}D_x(Q^*)/Q^{*2}$ 关于 y 运用 Hermite 约化得到加法分解，

   $$\frac{-a_{i-1}D_x(Q^*)}{{Q^*}^2} = D_y(\tilde{g}_i) + \frac{\tilde{a}_i}{Q^*}.$$

   (b) 设定 $g_i = D_x(g_{i-1}) + \tilde{g}_i$ 和 $a_i = D_x(a_{i-1}) + \tilde{a}_i$.

   (c) 从 $\sum_{j=0}^{i} \eta_j a_j = 0$ 中导出关于 η_j 的线性方程组. 如果方程组在 $k(x)$ 上存在非平凡解, 那么设定

   $$(L, g) := \left(\sum_{j=0}^{i} \eta_j D_x^j, \sum_{j=0}^{i} \eta_j g_j \right)$$

   且跳出循环.

3. 计算 L 的关于 D_x 的容度 (content) c，并且返回 $(c^{-1}L, c^{-1}g)$.

图 3.1: 基于 Hermite 约化的算法

引理 3.3. 设 f 为 $k(x,y)$ 中的有理函数. 则存在不全为零的 $\eta_0, \ldots, \eta_\rho \in k(x)$ 使得

$$\sum_{i=0}^{\rho} \eta_i r_i = 0,$$

当且仅当 f 的差和算子及相应的验证函数分别为

$$L = \sum_{i=0}^{\rho} \eta_i D_x^i \quad 和 \quad g = \sum_{i=0}^{\rho} \eta_i g_i.$$

此外，ρ 是使得 $r_0, \ldots, r_\rho$ 在 $k(x)$ 上线性相关的最小非负整数当且仅当 ρ 为 f 的极小差和算子的阶.

证明. 由等式 (3.4) 两边乘上 η_i 再关于 i 求和，我们得到

$$L(f) = D_y\left(\sum_{i=0}^{\rho} \eta_i g_i\right) + \sum_{i=0}^{\rho} \eta_i r_i, \quad 其中 \quad L := \sum_{i=0}^{\rho} \eta_i D_x^i.$$

注意到和式 $\sum_{i=0}^{\rho} \eta_i r_i$ 是分母为关于 y 的无平方的真分式. 因此由引理 2.2, L 是 f 的差和算子当且仅当 $\sum_{i=0}^{\rho} \eta_i r_i = 0$. 由前一等价自然得到后一等价. 证毕. ∎

给合引理 3.2 和 3.3，我们可以得到 f 的极小差和算子的阶的更紧的上界.

推论 3.4. *设 $f = P/Q$ 为 $k(x, y)$ 中的有理函数, 这里 P 和 Q 是 $k[x, y]$ 中的互素的多项式. 则 f 的极小差和算子的阶至多为 $\deg_y(Q^*)$.*

注 1. 在算法 HermiteTelescoping 的循环步骤中, 注意到方程组的解空间的维数实际上只能取 0 或者 1. 这种请况下, 我们在完全求解之前可以先通过选取随机点 $x_0 \in k$ 把多项式矩阵变成常数矩阵, 然后计算矩阵的秩. 如果矩阵是满秩的，就跳到下一循环. 进一步地, 若 k 是有理数域，我们还可以将上面得到的常数矩阵模掉一个随机素数, 再在有限域上计算矩阵的秩. 这种技巧在我们的程序实现中，被证实对提高效率很有帮助.

3.3.2 改进的 Almkvist–Zeilberger 算法

对于给定有理函数 $f = P/Q \in k(x, y)$, Almkvist–Zeilberger 算法构造极小差和算子的基本思想是: 对每个给定的阶 $\rho \in \mathbb{N}$, 判定是否存在不全为零的 $\eta_i \in k(x)$ 使得

$$\sum_{i=0}^{\rho} \eta_i D_x^i(f) = D_y(g_\rho), \quad 其中\ g \in k(x, y). \tag{3.6}$$

这里参数化方程 (3.6) 的求解则是基于参数化的微分 Gosper 算法 [15]. 如果方程 (3.6) 存在非平凡解，则得到 f 的极小差和算子和验证函数为

$$L = \sum_{i=0}^{\rho} \eta_i D_x^i, \quad 和 \quad g = g_\rho.$$

否则，让阶增加到 $\rho + 1$, 并重复上过程. 由推论 3.4 可知，Almkvist–Zeilberger 算法在至多 $\deg_y(Q^*) + 1$ 步终止. 下面我们对参数化的微分 Gosper 算法解方程 (3.6) 提出一些改进办法，并在方框 3.2 中给出改进的 Almkvist–Zeilberger 算法.

算法 RationalAZ

输入: $f = P/Q \in k(x,y)$ 满足 $\gcd(P,Q)=1$ 和 $\deg_y(P) < \deg_y(Q)$.
输出: 极小差和算子 $L \in k[x]\langle D_x\rangle$ 和验证函数 $g \in k(x,y)$.

1. 计算 $Q^- = \gcd(Q, D_y(Q))$, $Q^* = Q/Q^-$, 和 Q, Q^* 关于 x 的本原部分 T, T^*;
2. 赋值 $(\tilde{N}, N, \beta, H) := (P, P, d_y^-, -Q^* D_y(Q)/Q)$;
3. 让 ℓ 从 0 到 $\deg_y(Q^*)$，执行：
   (a) 设 $z = \sum_{j=0}^{\beta} z_j y^j$. 代入方程 (3.7) (这时 $\rho = \ell$) 得到线性系统 $\mathcal{M}\begin{pmatrix}\eta_i & z_j\end{pmatrix}^T = 0$，然后计算 $\mathcal{M}$ 的零空间的一组基 S.
   (b) 如果 S 包非平凡解 $(\eta_0, \ldots, \eta_\ell, s)$ 使得 $\eta_0, \ldots, \eta_\ell$ 不全是零, 那么取 $(L, g) := \left(\sum_{i=0}^{\ell} \eta_i D_x^i, s/(Q^- T^{*\ell})\right)$, 然后到步骤 4;
   (c) 更新 $\tilde{N} := D_x(\tilde{N})T^* - \tilde{N}\left(T^* D_x(T)/T + i D_x(T^*)\right)$，$N := NT^* + \eta_{\ell+1}\tilde{N}$，$\beta := \beta + \deg_y(T^*)$，和 $H := H - t^* D_y(T^*)$.
4. 计算 L 关于 D_x 的容度 c，返回 $(c^{-1}L, c^{-1}g)$.

图 3.2: 改进的 Almkvist–Zeilberger 算法

定义 3.2 ([45]). 设 F 是特征为零的域，$a, b \in K[y]$ 是非零多项式. 如果

$$\frac{a}{b} = \frac{D_y(p)}{p} + \frac{q}{r} \qquad \text{且 } \gcd(r, q - \tau D_y(r)) = 1 \text{ 对所有 } \tau \in \mathbb{N},$$

那么三元组 $(p, q, r) \in K[y]^3$ 被称为有理函数 a/b 的微分 Gosper 形式 (*differential Gosper form*).

微分 Gosper 算法求解方程 (3.6) 的步骤一是计算有理函数 $F = \sum_{i=0}^{\rho} \eta_i D_x^i(f)$ 的对数导数的微分 Gosper-形式, 其中 η_i 看成与 y 无关的未定元. 下面我们推广文章 [57] 中的技巧来直接给出这时候的微分 Gosper-形式的显示表达式. 这样我们就避免了在一般计算微分 Gosper-形式时所需要的复杂结式计算及其整数根的求解.

首先，我们定义一些记号. 记 Q^* 为 Q 关于 y 的无平方部分且 $Q^- = Q/Q^*$. 令 $d_y = \deg_x(Q), d_y^* = \deg_y(Q^*), d_y^- = \deg_y(Q^-)$ 和 $d_x = \deg_x(Q)$. 通过分

算法	$\deg_{D_x}(L)$	$\deg_x(L)$	$\deg_x(g)$	$\deg_y(g)$	复杂度
HermiteTelescoping	$\leq d_y$	$\mathcal{O}(d_x d_y^2)$	$\mathcal{O}(d_x d_y^2)$	$\mathcal{O}(d_y^2)$	$\tilde{\mathcal{O}}(d_x d_y^{\omega+3})$
RationalAZ	$\leq d_y$	$\mathcal{O}(d_x d_y^2)$	$\mathcal{O}(d_x d_y^2)$	$\mathcal{O}(d_y^2)$	$\tilde{\mathcal{O}}(d_x d_y^{2\omega+2})$

表 3.1: 构造极小差和算子的算法的复杂度

开关于 x 的容度和本原部分，得到分解 $Q = t(y)T(x,y)$. 通过简单的归纳, 存在 $N_i \in k[x,y]$，使得 $D_x^i(f) = N_i/(QT^{*i})$. 设 $N = \sum_{i=0}^{\rho} \eta_i N_i T^{*\rho-i}$ 和 $H = -D_y(Q)/Q^- - \rho t^* D_y(T^*)$. 通过简单的次数估计，我们得出

$$\deg_x(N_i) \leq \deg_x(P) + i\deg_x(T^*) - i, \quad \deg_y(N_i) \leq d_y + i\deg_y(T^*) - 1.$$

同样地，$\deg_x(N) \leq \deg_x(P) + \rho\deg_x(T^*) - \rho, \quad \deg_y(N) \leq d_y + \rho\deg_y(T^*) - 1.$

引理 3.5. *如果 $F = \sum_{i=0}^{\rho} \eta_i D_x^i(f)$ 是非零的,那么三元组 (N, H, Q^*) 就是 $D_y(F)/F$ 的微分 Gosper 形式.*

证明. 首先注意到 $F = N/(QT^{*\rho})$ 和 $Q^* = t^*T^*$. 其次直接计算可得

$$D_y(F)/F = D_y(N)/N - D_y(Q)/Q - \rho D_y(T^*)/T^* = D_y(N)/N + H/Q^*.$$

下面只要验证对任意 $\tau \in \mathbb{N}$，有 $\gcd(Q^*, H - \tau D_y(Q^*)) = 1$. 设 Q 的无平方因子部分 $Q^* = Q_1 Q_2 \cdots Q_m$ 和 $\hat{Q}_i = Q^*/Q_i$. 直接代入 H 的表达式可得

$$Z := H - \tau D_y(Q^*) = -\rho t^* D_y(T^*) - \sum_{i=1}^{m} (i+\tau)\hat{Q}_i D_y(Q_i).$$

任取因子 Q_j，如果它整除 t^*，那么

$$Z \equiv -(j+\tau)\hat{Q}_j D_y(Q_j) \qquad \mathrm{mod}\ Q_j.$$

否则有

$$Z \equiv -(j+\tau)\hat{Q}_j D_y(Q_j) - \rho t^*(D_y(Q_j)T^*/Q_j) \equiv -(j+\tau+\rho)\hat{Q}_j D_y(Q_j) \qquad \mathrm{mod}\ Q_j.$$

在两种情况下, 当$j > 0$, $\tau \geq 0$, 和 $\rho \geq 0$ 时，Z 与 Q^* 总是互素的. 证毕. ∎

通过变量代换 $g = z/(Q^- T^{*\rho})$, 我们将方程 (3.6) 转化为

$$\sum_{i=0}^{\rho} \eta_i N_i T^{*\rho-i} = Q^* D_y(z) + (D_y(Q^*) + H)\, z. \tag{3.7}$$

这时候由文章 [15, 第 577 页定理] 可知，如果上方程有理函数解 $z \in k(x,y)$, 则该解必然是 $k(x)[y]$ 中的多项式. 所以，下面的任务是估计出多项式解的次数上界. 为此，我们先回顾 [45, 推论 9.6] 中的结果.

引理 3.6. *设 F 是特征为零的域，$a, b \in F[y]$ 满足 $\beta = -\operatorname{lc}_y(b)/\operatorname{lc}_y(a)$ 是非负整数且 $\deg_y(b) = \deg_y(a) - 1$. 设多项式 $c \in F[y]$ 满足 $\beta \geq \deg_y(c) - \deg_y(a) + 1$. 如果 u 是 $aD_y(z) + bz = c$ 的多项式解, 那么 $\deg_y(u) \leq \beta$.*

下面引理将给出多项式解的次数上界，该结论是 [57, 引理 2] 的推广.

引理 3.7. *对任意不全为零的 $\eta_i \in k(x)^{\rho+1}$, 如果 $u \in k(x)[y]$ 是 (3.7) 的解，那么*

$$\deg_y(u) \leq \beta = d_y^- + \rho \deg_y(T^*)$$

证明. 设 $a = Q^*$ 和 $b = D_y(Q^*) + H$. 根据 H 的定义, $b = -Q^* D_y(Q^-)/Q^- - \rho t^* D_y(T^*)$，并且 $\operatorname{lc}_y(b) = -(d_y^- + \rho \deg_y(T^*)) \operatorname{lc}_y(a)$. 因此 $\beta = -\operatorname{lc}_y(b)/\operatorname{lc}_y(a) = d_y^- + \rho \deg_y(T^*)$ 是非负整数. 注意到 $\deg_y(N) < d_y + \rho \deg_y(T^*)$ 和 $d_y = d_y^* + d_y^-$, 所以 $\beta \geq \deg_y(N) - d_y^* + 1$. 由引理 3.6 可知命题成立. ∎

为了表达方便，设 $n_x := d_x + \rho \deg_x(T^*) - \rho \in \mathcal{O}(\rho d_x)$ 和 $n_y := d_y + \rho \deg_y(T^*) - 1 \in \mathcal{O}(\rho d_y)$. 由引理 3.7, 将 $z = \sum_{i=0}^{\beta} z_i y^i$ 代入方程 (3.6)，得到如下线性方程组

$$\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \hat{P}, \tag{3.8}$$

其中 M_1 是系数为次数至多为 n_x 的 $(n_y+1) \times (\rho+1)$ 的矩阵，M_2 是系数为次数至多为 d_x 的 $(n_y+1) \times (\beta+1)$ 的矩阵. 以算法的设计方式，该线性方程组的解空间维数为 0 或者 1. 根据 Cramer 法则，可以得出解的次数上界为 $n_x(\rho+1) + d_x(\beta+1) \in \mathcal{O}(d_x d_y d_y^*)$. 如此，我们就得到了差和算子和验证函数的存贮大小的一个上界估计. 我们总结上述分析，得到以下结论.

定理 3.8. 设 $f = P/Q \in k(x, y)$ 满足 $P, Q \in k[x, y]$, $\gcd(P, Q) = 1$, $\deg_y(P) < \deg_y(Q)$ 且 $\deg_x(P) < d_x$. 则对此 f 存在极小差和算子 $L \in k[x]\langle D_x\rangle$ 和验证函数 $g \in k(x, y)$ 满足 L 的阶数不大于 d_y^*, $\deg_x(L) \in \mathcal{O}(d_x d_y^2)$ 和 $\deg_x(g) \in \mathcal{O}(d_x d_y^2)$, $\deg_y(g) \in \mathcal{O}(d_y^2)$.

注 2. 假设给定的有理函数的分子和分母关于 x 和 y 次数至多为 d. 由上定理表明，差和算子的存贮大小的量阶是 $\mathcal{O}(d^4)$，而验证函数的存贮大小的量阶是 $\mathcal{O}(d^5)$. 所以，一般来说，如果问题只需要计算差和算子，那么避免验证函数的计算往往可以降低计算复杂度.

3.3.3 算法的复杂度

在文章 [17] 中，我们给出了算法 HermiteTelescoping 和算法 RationalAZ 的详细的复杂度分析. 所有的复杂度估计是以 k 中基本运算为单位的. 设 $k[x]_{\leq d}^{m\times n}$ 为系数在 $k[x]$ 中次数至多为 d 的 $m \times n$ 的矩阵的集合. 设 ω 为矩阵乘法的可行指数, 即在 $k^{n\times n}$ 中的两个矩阵相乘可以由 $\mathcal{O}(n^\omega)$ 次 k 中运算完成. 我们在表格 3.1 中简述我们复杂度分析的结果，详细参见 [17].

3.4 算法实现与例子

在本节中，我们将介绍我们的 Maple 软件包 RationalCT . 在该软件包中，我们对已有的部分分式分解程序进行了优化，并在此基础上实现了有理函数的 Hermite 约化. RationalCT 中计算极小差和算子的函数命令为 HermiteTelescoping 和 RationalAZ，分别对应上面的两个算法. 我们将给出一些测试例子的消耗时间表以比较不同程序的效率.

RationalCT: 计算有理函数的极小差和算子的 Maple 程序包

```
> with(RationalCT);
```

$$[HermiteReduction,\ HermiteTelescoping,\ RationalAZ,\ SquareFreeParFrac]$$

```
> SquareFreeParFrac(1/(x^3+5*x^2+8*x+4), x, 'pfd');
```
（部分分式分解）

$$1,\ [x,\ 0,\ [[x+2,\ [1,\ -1],\ [1,\ -1]],\ [x+1,\ [1,\ 1]]]]$$

```
> pfd;
```

$$-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+1}$$

```
> f :=-1/(-y+y^2+x);
```

$$f := -\frac{1}{-y+y^2+x}$$

```
> HermiteReduction(f^2, x); ( Hermite 约化)
```

$$[\frac{-1+2\,y}{(4\,x-1)\,(-y+y^2+x)}, \frac{2}{(4\,x-1)\,(-y+y^2+x)}]$$

```
> HermiteTelescoping(f, x, y, Dx); ( 基于Hermite 约化的算法)
```

$$[2+(4\,x-1)\,Dx, \frac{-1+2\,y}{-y+y^2+x}]$$

```
> HermiteTelescoping(f, x, y, Dx, 'No_Certificate'); ( 无验证函数)
```

$$2+(4\,x-1)\,Dx$$

```
> RationalAZ(f, x, y, Dx); ( 改进的 Almkvist-Zeilberger 算法)
```

$$[2+(4\,x-1)\,Dx, \frac{-1+2\,y}{-y+y^2+x}]$$

```
> DEtools[Zeilberger](f, x, y, Dx); ( Maple 中的程序)
```

$$[2+(4\,x-1)\,Dx, \frac{-1+2\,y}{-y+y^2+x}]$$

3.4.1　例子及其时间对比

现在我们通过一系列的例子来给出不同算法的时间对比.

例 3.1 (随机生成的有理函数). 我们运用 Maple 中的随机多项式生成函数 randpoly 来生成测试有理函数的分子和分母, 并设定关于 x 和 y 的次数一样, 即

$$f=\frac{P}{Q}, \quad d=d_x=d_y\in\{1,2,\ldots,7\}.$$

为了简洁起见, 我们约定

- AZ: Maple 13 中程序命令 DEtools[Zeilberger];

- `Hermite`: 基于 Hermite 约化的算法;
- `RatAZ`: 改进的 Almkvist–Zeilberger 算法.

d	1	2	3	4	5	6	7
`AZ`	0.054	0.158	2.731	64.75	619.0	> hr	> hr
`RatAZ`	0.019	0.059	0.402	4.461	34.13	220.5	792.1
`Hermite`	0.016	0.057	0.398	2.664	18.80	106.2	422.5

表 3.2: 随机例子的测试结果 (时间是以秒为单位)

例 3.2 (代数函数的零化微分方程). 设 $\alpha(x)$ 是单变元的代数函数, 其定义多项式为 $P(x,\alpha(x))=0$, 其中 P 在 $k[x,y]$ 中不可约. 下面的引理将计算代数函数的零化微分方程转化为计算有理函数的差和算子, 证明见 [18].

引理 3.9. *如果 L 是有理函数 $\frac{yD_y(P)}{P}$ 关于 y 的差和算子, 则 $L(\alpha(x))=0$.*

下面我们同样运用 Maple 中的随机多项式生成函数 randpoly 来生成多项式 $P\in\mathbb{Z}[x,y]$ 满足, 并记其全次数 (total degree) 为 d.

d	4	5	6	7	8	9	10
`RatAZ`	0.30	1.05	4.90	21.6	69.5	237.	846.
`Hermite`	0.21	0.94	4.53	20.5	84.7	231.	864.
`gfun (Maple 13)`	0.14	0.75	6.92	79.6	1661	> hr	> hr
`gfun (Algo)`	0.10	0.46	2.44	12.2	52.7	157.	464.

表 3.3: 代数函数的测试结果 (时间是以秒为单位)

例 3.3 (对角的零化微分方程). 对于双变元有理幂级数

$$f=\sum_{i,j\geq 0} f_{i,j}x^iy^j\in k(x,y)\cap k[[x,y]],$$

定义其对角 (diagonal) 为

$$\operatorname{diag}(f):=\sum_{i=0}^{\infty} f_{i,i}x^i.$$

下面的引理将计算对角的零化微分方程转化为计算有理函数的差和算子, 证明见 [60, 60].

引理 3.10. *如果 L 是有理函数 $\frac{f(y,x/y)}{y}$ 关于 y 的差和算子, 则 $L(\mathrm{diag}(f)) = 0$.*

首先, 我们测试 Pemantle 和 Wilson 文章 [66] 中例子:

$$f = \frac{1}{1-x-y-xy(1-x^d)}, \quad \text{其中 } d \in \mathbb{N}.$$

d	8	9	10	11	12	13	14	15
AZ	3.53	6.33	13.6	38.5	68.1	145.	263.	368.
RatAZ	5.27	4.63	8.72	16.9	36.1	55.4	99.4	352.
Hermite	2.33	4.52	8.71	18.6	36.1	65.3	121.	169.

表 3.4: Pemantle–Wilson 文中的对角的测试结果 (时间是以秒为单位)

下面我们测试 Stanley 书 [77] 关于平面行走 (plane walk) 的例子. 设 $S_d = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 | i+j=d\}$, 考虑

$$f(x,y,d) = \frac{1}{1-\sum_{(i,j)\in S_d} x^i y^j}, \quad \text{其中 } 11 \leq d \leq 20.$$

d	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
AZ	48.7	5.72	144.	12.4	400.	23.9	1016.	46.7	$>$ hr.	81.2
RatAZ	43.8	5.61	129.	11.8	269.	27.9	663.4	45.8	2976.	88.4
Hermite	11.7	2.55	31.9	5.71	91.3	12.8	227.8	21.1	617.9	40.3
Order	11	6	13	7	15	8	17	9	19	10

表 3.5: 平面行走的对角的测试结果 (时间是以秒为单位)

在表格 3.5 中, 我们观察到当 d 为偶数时, 极小差和算子的阶恰好为 $d/2$. 我们猜测这对一般偶数 d 都成立, 并希望能给出组合的解释.

第四章　多变元超指数-超几何函数的结构

4.1　前言

多变元超指数-超几何函数是系数为多元多项式的一阶齐次线性微分-差分方程组的解. 这类函数是普通指数函数和超几何项的一种推广. 在 90 年代初 [84], 美国数学家 Wilf 和 Zeilberger 注意到在数学和物理中一大类常见的特殊函数恒等式都涉及多变元超指数-超几何函数的积分或者和式. 并且，针对这类恒等式他们提出了一套机械化的证明方法，即所谓的 WZ 方法. 这套方法的核心就是构造多变元超指数-超几何函数的差和算子 (telscoper). 除了在组合中应用外，多变元超指数-超几何函数也在 Lauewnt-Ore 代数的分解 [85] 方面起到重要作用.

在其开创性文章 [86] 中，Zeilberger 关于特殊函数恒等式自动证明的理论基础是 Bernstein 在 70 年代为了证明盖尔芳德猜想所发展起来的代数 D-模理论 [16]. 完整模 (holonomic modules) 是代数 D-模理论的核心对象. 简单的说，Weyl 代数上的模被称为是完整的如果该模具有极小的 Hilbert维数 [34, 第 10 章]. 函数被称为完整的 (holonomic functions) 如果该函数的零化理想，看成 Weyl 代数上的模是完整的. 对于这类完整函数，Zeilberger 算法的终止性是可以得到保证的 [86]. 理论上说，如果函数的零化理想完全给定，那么判定该函数是否是完整的是可能的. 不幸的是，计算给定函数的零化理想往往很困难甚至不可能. 比如证明简单离散函数 $1/(n^2+m^2)$ 不是完整的就已经依赖了一些非常特殊的办法. 在文章 [84, 第 585 页] 中，Wilf 和 Zeilberger 关于超指数-超几何函数提出了一个大胆的猜想：超指数-超几何函数是完整的当且仅当该函数是正则的 (proper)，这里正则指函数可以表示成我们熟知的多项式函数，指数函数，幂函数和伽玛函数的乘积. 从超指数-超几何函数的定义方程出发，正则性是可以用算法判定的. 所以如果该猜想成立，那么判定超指数-超几何函数的完整性质就可以算法化.

在多变元离散情形下，Wilf–Zeilberger 猜想已经由 Payne [65] 在其博士论文中， Abramov 和 Petkovšek 在文章 [14] 中分别独立解决. 特别的，在两个变元离散情形下侯庆虎 [49, 50] 在其博士论文中也给出了猜想的证明. 他们的证

明都基于 Ore–Sato 定理，该定理刻画了多变元超几何项的乘性结构. 为了进一步研究 Wilf–Zeilberger 猜想的一般情形，我们需要首先推广 Ore–Sato 定理到多变元连续-离散混合情形.

主要结果. 本章我们的主要结果是证明了任一多变元超指数-超几何函数都可以分解成有理函数, 幂函数, 超指数函数和超几何项的乘积, 这是双变元混合情形时由冯如勇，Singer 和吴敏证明的一个结果 [39, 性质 5] 的推广. 进一步的, 结合关于多变元超指数函数的 Christopher 定理 [88, 24] 和关于多变元超几何项的 Ore–Sato 定理 [61, 75, 65, 14], 我们给出了多变元超指数-超几何函数的结构定理.

本章的其余部分安排如下：首先，我们给出多变元超指数-超几何函数的一个代数框架. 其次，我们对多变元有理函数定义一类新的有理正规形式，并研究其代数性质. 利用新的有理正规形式，我们刻画出了满足可积性条件的一组有理函数的特殊形式. 最后, 我们给出多变元超指数-超几何函数的乘性结构定理.

本章的主要结果是与李子明合作得到的 [22].

4.2 代数框架

在本节中，我们回顾文章 [56, 20, 59] 中对完全可积系统 (fully integrable systems) 所引入的代数框架. 在这个框架下，多变元超指数-超几何函数可以看成一阶完全可积系统在其 Picard–Vessoit 扩张中的可逆元素.

4.2.1 Δ-环与超指数-超几何项

设 A 是交换环，Δ 是从 A 到自身的有限个彼此交换的映射组成的集合. 假设 Δ 中的映射是导数或者自同构. 注意到 A 上的导数 δ 满足两个条件：

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b) \quad \text{和} \quad \delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b \quad \text{对所有的 } a, b \in A \text{ 成立.}$$

二元组 (A, Δ) 被称为 Δ-环. 如果 A 是域，则称它为 Δ-域. 称环 A 的理想 I 是 Δ-理想如果 I 在所有 Δ 中映射作用下是封闭的，即对所有 $\phi \in \Delta$ 满足 $\phi(I) \subset I$. 零理想和环 A 本身被称为平凡 Δ-理想. 环 A 被称为是单的 (simple) 如果它不含有非平凡的 Δ-理想.

设 c 是 A 中元素. 如果 δ 是 Δ 中的导数且 $\delta(c) = 0$，则称 c 为关于 δ 的常数. 同样的，如果 σ 是 Δ 中的自同构且 $\sigma(c) = c$，则称 c 为关于 σ 的常数. 如果

c 是关于 Δ 中所有映射的常数，则我们称 c 是 A 的常数. A 中所有的常数的集合记为 C_A，它是 A 的子环. 当 A 是域时，C_A 也是域.

环 $\mathcal{R}$ 被称为 Δ-环 (A, Δ) 的 Δ-扩张如果 $\mathcal{R}$ 包含 A 并且 Δ 中所有映射都可以扩张成 $\mathcal{R}$ 上的两两相互交换导数或者自同构. 这些扩张到 $\mathcal{R}$ 上的导数或者自同构构成的集合仍然记为 Δ.

设 k 是特征为零的域. 为简洁起见，我们用粗体字母 $\mathbf{t}$ 代替连续变元 $(t_1, \ldots, t_m)$，$\mathbf{x}$ 代替离散变元 $(x_1, \ldots, x_n)$. 设 $k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 是 k 上关于变元 $t_1, \ldots, t_m$ 和 $x_1, \ldots, x_n$ 的有理函数域. 在域 $k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 上，导数 δ_i $(1 \le i \le m)$ 和平移算子 σ_j $(1 \le j \le n)$ 分别定义为：对所有 $f \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$，满足

$$\delta_i(f) = \frac{\partial f}{\partial t_i} \quad 和 \quad \sigma_j(f) = f(\mathbf{t}, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

记 $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. 注意到 Δ 中的映射在 $k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 上是两两相互交换的，所以二元组 $(k(\mathbf{t}, \mathbf{x}), \Delta)$ 是 Δ-域.

定义 4.1. 设 $\mathcal{R}$ 是 $k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 的 Δ-扩张. $\mathcal{R}$ 中非零元素 h 被称为在 $k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 上是超指数-超几何的, 如果存在 $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 满足 $b_1 \cdots b_n \neq 0$, 使得

$$\delta_1(h) = a_1 h, \ \ldots, \ \delta_m(h) = a_m h, \quad 且 \quad \sigma_1(h) = b_1 h, \ \ldots, \ \sigma_n(h) = b_n h. \tag{4.1}$$

有理函数 a_i 和 b_j 分别被称为 h 的 δ_i-商 (certificate with respect to t_i) 和 σ_j-商 (certificate with respect to x_i). 并且, 统称它们为 h 的算子商 (certificates).

由定义可知，$\mathcal{R}$ 中超指数-超几何项的导函数，平移，和乘积还是超指数-超几何的. 如果 $\mathcal{R}$ 是单的，可以证明任一 $\mathcal{R}$ 中超指数-超几何项都是可逆的 [59, 引理 2.1]. 注意到 Δ 中映射是两两相互交换的，于是定义 4.1 中算子商 a_i 和 b_j 满足如下三组可积性条件：

$$\delta_i(a_j) = \delta_j(a_i) \quad 对\ 1 \le i < j \le m, \tag{4.2}$$

$$\sigma_i(b_j) b_i = \sigma_j(b_i) b_j \quad 对\ 1 \le i < j \le n, \tag{4.3}$$

$$\frac{\delta_i(b_j)}{b_j} = \sigma_j(a_i) - a_i \quad 对\ 1 \le i \le m\ 和\ 1 \le j \le n. \tag{4.4}$$

在离散情形下，文章 [14] 中称满足条件 (4.3) 的有理函数 $b_1, \ldots, b_n \in k(\mathbf{x})$ 是相容的 (compatible). 我们延用这种说法，称满足条件 (4.2), (4.3), 和 (4.4) 的有理函数 $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ 是相容的 (compatible).

函数	表达式	一阶完全可积系统
指数函数	$\exp(f)$	$\mathcal{H}(\delta_1(f),\ldots,\delta_m(f),1,\ldots,1)$
常幂函数	β^λ	$\mathcal{H}(\lambda\frac{\delta_1(\beta)}{\beta},\ldots,\lambda\frac{\delta_m(\beta)}{\beta},1,\ldots,1)$
符号幂函数	β^{x_j}	$\mathcal{H}(x_j\frac{\delta_1(\beta)}{\beta},\ldots,x_j\frac{\delta_m(\beta)}{\beta},1,\ldots,1,\beta,1,\ldots,1)$
阶乘	$(\lambda)_{\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}}$	$\mathcal{H}(0,\ldots,0,\prod_{\ell=0}^{e_1-1}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}+\lambda+\ell),\ldots,\prod_{\ell=0}^{e_n-1}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}+\lambda+\ell))$

(在上表中，$f,\beta\in k(\mathbf{t})$, $\lambda\in k$, 且 $\mathbf{e}\in\mathbb{Z}^n$.)

表 4.1: 常见函数对应的一阶完全可积系统

4.2.2 一阶完全可积系统

一般情况下，$k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 的任一 Δ-扩张不一定是整环. 为此，我们需要构造单的 Δ-环，使得其中的所有超指数-超几何项都是可逆的. 我们将采用文章 [20, 第 3 章] 中的方法来构造 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 的 Δ-扩张使得它包含有限个一阶系统的解.

定义 4.2. 设 $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n$ 是 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 中的有理函数. 一阶系统

$$\delta_1(z)=a_1z,\ \ldots,\ \delta_m(z)=a_mz,\quad \sigma_1(z)=b_1z,\ \ldots,\ \sigma_n(z)=b_nz, \tag{4.5}$$

被称为是在 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 上完全可积的 (fully integrable) 如果 $b_1\cdots b_n\neq 0$ 并且 $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n$ 是相容的，即满足条件 (4.2), (4.3), 和 (4.4).

由 [20, 定理 2] 可知，对给定的有限个一阶完全可积系统都存在 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 上单的 Δ-扩张 $\mathcal{R}$ 使得每个一阶完全可积系统在 $\mathcal{R}$ 中都有一个解. 并且，$\mathcal{R}$ 的常数域等于 k 如果 k 是代数闭的. 我们把一阶完全可积系统 (4.5) 在其对应的单的 Δ-扩张 $\mathcal{R}$ 中的所有解集合记为 $\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})$. 如果 k 是代数闭的，那么由 [20, 定理 2] 可知 $\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是 k 上一维向量空间. 为此，我们将把解空间 $\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 和系统 (4.5) 等同看待. 在表格 4.1 中，我们给出常见函数对应的一阶完全可积系统. 在后文中，所有超指数-超几何函数也将看成是一阶完全可积系统在其单的 Δ-扩张 $\mathcal{R}$ 中的元素. 所以，我们可以对这些超指数-超几何函数进行相加，相乘和取逆. 根据文章 [14, 定义 2] 的说法，两超指数-超几何函数被称为是共轭的

(conjugate) 如果它们的所有算子商是相同的，即满足同一一阶完全可积系统. 如果 k 是代数闭的，那么共轭的超指数-超几何函数之间只相差一个非零常数.

在下面引理中，我们列出由 $\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的定义直接导出的几条性质.

引理 4.1. (*i*) 对任一 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 上超指数-超几何函数 g, 成立

$$g\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathcal{H}\left(a_1 + \frac{\delta_1(g)}{g}, \ldots, a_m + \frac{\delta_m(g)}{g}, b_1\frac{\sigma_1(g)}{g}, \ldots, b_n\frac{\sigma_n(g)}{g}\right).$$

(*ii*) $\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathcal{H}(\tilde{\mathbf{a}},\tilde{\mathbf{b}}) = \mathcal{H}(\mathbf{a}+\tilde{\mathbf{a}},\mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}})$, 其中 $\mathbf{a}+\tilde{\mathbf{a}}$ 和 $\mathbf{b}\tilde{\mathbf{b}}$ 是关于向量逐个分量定义的.

(*iii*) $\delta_i(\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})) = a_i\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 对所有 $1 \leq i \leq m$ 成立, $\sigma_j(\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})) = b_j\mathcal{H}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 对所有 $1 \leq j \leq n$ 成立.

4.3 有理正规形式

在本节中，我们先回顾单变元有理函数的两个有理正规形式 (rational normal forms) 的定义及其性质 [13, 10, 44]. 这两个有理正规形式在超指数函数和超几何项的极小分解 (minimal decomposition) 中起到了重要作用 [44, 12, 13, 10].

然后，我们将对 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 中多变元有理函数引入一种新的有理正规形式. 这种新的正规形式将在下节研究相容有理函数的结构中发挥作用.

4.3.1 微分，差分有理正规形式

在这里，设 $F(y)$ 为所有 F 上关于变元 y的单变元有理函数域. $F(y)$ 上的导数和平移算子按如下定义: 对所有 $f \in F(y)$,

$$\delta(f(y)) = \frac{\partial f(y)}{\partial y} \quad 和 \quad \sigma(f(y)) = f(y+1).$$

这样 $F(y)$ 具有了微分和差分结构. 多项式 $P \in F[y]$ 被称为是无平方的 (*squarefree*) 如果 $\gcd(P,\delta(P)) = 1$. 如果对所有 $i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 满足 $\gcd(P,\sigma^i(P)) = 1$，那么称多项式 P 是无平移的 (*shift-free*). 直观地说，无平移的多项式的任意

两个不相等的根之差都不是整数. 下面的几个基本事实揭示了无平方性和无平移性与有理可积和可和之间的联系，它们的证明可以在文献 [2, 62, 47, 48] 中找到.

引理 4.2. 设 $f = P/Q$ 是 $F(y)$ 中有理函数并且满足 $\gcd(P, Q) = 1$ 和 $\deg(P) < \deg(Q)$. 那么，

(i) 如果 Q 是无平方的并且 $f = \delta(g)$ 对某个 $g \in F(y)$, 则 $f = 0$.

(ii) 如果 Q 是无平移的并且 $f = \sigma(g) - g$ 对某个 $g \in F(y)$, 则 $f = 0$.

定义 4.3 (微分既约性，平移既约性)**.** 非零有理函数 $f = P/Q \in F(y)$ 被称为是关于 y 微分既约的 (*differential-reduced*) 如果 $\gcd(Q, P - i\delta(Q)) = 1$ 对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 成立. 如果对所有 $i \in \mathbb{Z}$ 满足 $\gcd(P, \sigma^i(Q)) = 1$, 则称 f 是关于 y 是平移既约的 (*shift-reduced*).

下面我们来证明微分既约和差分既约有理函数的一些基本性质.

引理 4.3. 设 $f = P/Q \in F(y)$ 为关于 y 的微分既约有理函数. 如果 $f = \delta(g)/g$ 对某一 $g \in F(y)$, 则 $g \in F$ 且 $f = 0$.

证明. 假设 $g \in F(y) \setminus F$. 则

$$f = \frac{\delta(g)}{g} = \sum_{i=1}^{s} \frac{m_i}{y - \alpha_i}, \quad \text{其中 } m_i \in \mathbb{Z} \text{ 且 } \alpha_i \in \bar{F} \text{ 对所有 } 1 \leq i \leq s.$$

由定理 2.7, m_i 是 Rothstein–Trager 结式 $\mathrm{RT}_y(f)$ 的根. 所以对所有 m_i,

$$\gcd(Q, P - m_i\delta(Q)) \neq 1,$$

这与假设 f 是关于 y 微分既约的矛盾. 因此 $g \in F$ 且有 $f = 0$. ∎

引理 4.4. 设 $f \in F(y)$ 是关于 y 差分既约的有理函数. 如果 $f = \sigma(g)/g$ 对某一 $g \in F(y)$, 那么 $g \in F$ 且 $f = 1$.

证明. 假设 $g \in F(y) \setminus F$. 则 $g = a/b$ 满足 $a, b \in F[y]$, $\gcd(a, b) = 1$ 且至少 a, b 之一不在 F 中. 不失一般性，我们可以假设 $a \in F[y] \setminus F$. 那么

$a = (y-\alpha_1)^{m_1}\cdots(y-\alpha_s)^{m_s}$, 其中 $m_i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ 且 $\alpha_i \in \bar{F}$ 对所有 $i = 1,\ldots,s$. 设 B 为集合

$$\{\alpha_i | \alpha_i - \alpha_1 \in \mathbb{Z} \quad 且\ 1 \leq i \leq s\}.$$

不失一般性，我们可以假设对所有 $\beta \in B$, $\beta - \alpha_1 \geq 0$ 并且令 β_1 是 B 中和 α_1 相差距离最大的元素. 因为 $f = \sigma(g)/g$, 所以 $f = \sigma(a)b/(a\sigma(b))$. 注意到 $\alpha_1 - 1$ 是 $\sigma(a)$ 的根但不是乘积 $a\sigma(b)$ 的根, 还有 β_1 是 a 的根但不是乘积 $\sigma(a)b$ 的根, 因为 $\gcd(a,b) = 1$ 且 f 是关于 y 差分既约的. 这样就存在整数 $d = \beta_1 - \alpha + 1$ 使得 $\gcd(\mathrm{num}(f), \sigma^d(\mathrm{den}(f))) \neq 1$, 这与假设 f 是关于 y 差分既约的矛盾. 因此 $g \in F$ 且有 $f = 1$. ▮

下面我们给出微分，差分有理正规形式的定义.

定义 4.4 (微分有理正规形式)**.** 给定有理函数 $f \in F(y)$, 称二元组 $(K,S) \in F(y)\times F(y)$ 为 f 的微分有理标准形 (*differential rational normal form*)，简记为 DRNF，如果 $f = K + \delta(S)/S$ 且 K 是关于 y 微分既约的. 此外，如果 K 和 S 的分母是互素的, 则称 (K,S) 是 f 的一个严格微分有理正规形式 (*strict DRNF*).

定义 4.5 (差分有理正规形式)**.** 给定有理函数 $f \in F(y)$, 称二元组 $(K,S) \in F(y)\times F(y)$ 为 f 的差分有理标准形 (*shift rational normal form*)，简记为 SRNF，如果 $f = K\cdot\sigma(S)/S$ 且 K 是关于 y 差分既约的. 设 $k_1 = \mathrm{num}(K)$, $k_2 = \mathrm{den}(K)$, $s_1 = \mathrm{num}(S)$ 且 $s_2 = \mathrm{den}(S)$. 此外，如果 K 和 S 的分母满足

$$\gcd(k_1, \sigma(s_2)s_1) = \gcd(k_2, \sigma(s_1)s_2) = 1,$$

则称 (K,S)是 f 的一个严格差分有理正规形式 (*strict SRNF*).

设 $h(y)$ 是 $F(y)$ 上超指数函数或则超几何项，其算子商为 $f \in F(y)$. 那么从任一 f 的微分或则差分有理正规形式 (K,S) 都可以得到 h 的如下分解

$$h(y) = Sh', \quad 其中\ h'\ 的算子商是\ K.$$

从这个分解出发, 我们可以对 h 进行两种不同的加法分解 (additive decompositions), 这将在下章中详细讨论.

4.3.2 $\mathbb{X}$-有理正规形式

在本节中，我们将对 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 中多变元有理函数引入一种新的有理正规形式，这将有助于我们在下节得到 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 中相容有理函数的一种特殊形式.

为了简洁起见，我们把不可约部分分式分解 (irreducible partial fraction decomposition) 缩写为 “IPFD”. 对于非零有理函数 $f \in k(\mathbf{t},\mathbf{x})$，$f$ 的不可约部分分式分解中的每项分式的分母我们都取定为 $K_i(\mathbf{x})[t_i]$ 中首一的多项式，这里 K_i 代表域 $k(t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_m)$.

设 $\mathbb{X}$ 是 1 和离散变元 $x_1\ldots,x_n$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的所有线性组合形成的集合. 给定非零有理函数 $r \in K_i(\mathbf{x})(t_i)$，$r$ 关于变元 t_i 的 IPFD 的形式如下

$$r = p_0+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i}\frac{p_{i,j}}{q_i^j},\quad \text{其中 } p_0,p_{i,j},q_i \in K_i(\mathbf{x})[t_i] \text{ 且 } \deg_{t_i}(p_{i,j}) < \deg_{t_i}(q_i). \tag{4.6}$$

设 r_S 是所有 (4.6) 中满足如下条件的分式 $p_{i,1}/q_i$ $(1 \le i \le s)$ 的和.

(*i*) $p_{i,1} = x\delta_i(q_i)$ 对某一 $x \in \mathbb{X}$, 且

(*ii*) q_i^2 不整除 r 的分母.

由对数导数公式, 我们总可以把 r_S 写成

$$r_S = \frac{\delta_i(f)}{f}+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\delta_i(\beta_j)}{\beta_j},$$

其中 f 和 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 在 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 里. 那么 r 就可以分解为

$$r = r_S + r_K. \tag{4.7}$$

如上的二元组 (r_S,r_K) 被称为 r 关于 t_i 的一个 $\mathbb{X}$-有理正规形式 ($\mathbb{X}$-*rational canonical form*), 并且把 r_S 和 r_K 分别称为 r 关于 t_i 的 $\mathbb{X}$-壳 ($\mathbb{X}$-*shell*) 和 $\mathbb{X}$-核 ($\mathbb{X}$-*kernel*).

有理函数的 $\mathbb{X}$-有理正规形式的唯一性可以由不可约部分分式分解的唯一性直接得出.

为了避免繁复的式子，我们引入下面的记号. 对每个 i 使得 $1 \le i \le m$, 设

$$M_i = \left\{\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\delta_i(\beta_j)}{\beta_j} \mid \beta_1,\ldots,\beta_n \in k(\mathbf{t})\right\}$$

和

$$N_i = \left\{ \frac{\delta_i(f)}{f} + u + v \mid f \in k(\mathbf{x}, \mathbf{t}),\, u \in M_i,\, v \in k(\mathbf{t}) \right\}.$$

此外, 对每个 j 使得 $1 \le j \le n$, 设

$$M_{i,j} = \left\{ \sum_{p=1}^{j-1} x_p \frac{\delta_i(\beta_p)}{\beta_p} + \sum_{q=j+1}^{n} x_q \frac{\delta_i(\beta_q)}{\beta_q} \mid \beta_p, \beta_q \in k(\mathbf{t}, x_j) \right\}$$

和

$$N_{i,j} = \left\{ \frac{\delta_i(f)}{f} + U + V \mid f \in k(\mathbf{x}, \mathbf{t}),\, U \in M_{i,j},\, V \in k(\mathbf{t}, x_j) \right\}.$$

注意到集合 M_i, N_i, $M_{i,j}$, 和 $N_{i,j}$ 都构成加法群. 我们的第一个引理是刻画 $N_{i,j}$ 中元素的 $\mathbb{X}$-壳和 $\mathbb{X}$-核的形式.

引理 4.5. *设 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $j \in \{1, \ldots, n\}$. 如果 a 是 $N_{i,j}$ 中非零元素, 则存在 $g \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $v_j, u \in k(\mathbf{t}, x_j)$, 和 $s_1, s_2 \in M_{i,j}$ 使得 a 关于 t_i 的 $\mathbb{X}$-壳和 $\mathbb{X}$-核分别为*

$$a_S = \frac{\delta_i(g)}{g} + x_j \frac{\delta_i(v_j)}{v_j} + s_1 \quad 和 \quad a_K = u + s_2.$$

证明. 不失一般性，我们假设 $i = 1$ 且 $j = n$. 因为 a 在 $N_{1,n}$ 中, 所以 a 有如下形式

$$a = \underbrace{\frac{\delta_1(f)}{f} + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \frac{\delta_1(u_j)}{u_j}}_{a'} + r, \quad 其中\ f \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})\ 且\ u_1, \ldots, u_{n-1}, r \in k(\mathbf{t}, x_n).$$

假设 r_S 和 r_K 分别为 r 关于 t_1 的 $\mathbb{X}$-壳和 $\mathbb{X}$-核. 则存在 $b, v_n \in k(\mathbf{t}, x_n)$ 使得

$$r_S = \frac{\delta_1(b)}{b} + x_n \frac{\delta_1(v_n)}{v_n}.$$

设 Ω 为所有在 r_K 关于 t_1 的 IPFD 中出现的分式的分母的不可约因子构成的集合. 通过除去 a' 关于 t_1 的 IPFD 中那些其分母在 Ω 中分式，我们得到

$$a = \underbrace{\frac{\delta_1(f_1)}{f_1} + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \frac{\delta_1(v_j)}{v_j} + x_n \frac{\delta_1(v_n)}{v_n} + \frac{\delta_1(b)}{b}}_{a_S} + \underbrace{\frac{\delta_1(f_2)}{f_2} + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \frac{\delta_1(w_j)}{w_j} + r_K}_{a_K},$$

其中所有出现在 a_S 关于 t_1 的 IPFD 中的分式的分母不属于 Ω 而 a_K 的属于 Ω. 因此 $a_S + a_K$ 是 a 关于 t_1 的 $\mathbb{X}$-有理正规形式. 设定

$$g = f_1 b, \quad u = r_K + \frac{\delta_1(f_2)}{f_2}, \quad s_1 = \sum_{j=1}^{n-1} x_j \frac{\delta_1(v_j)}{v_j}, \quad 且 \quad s_2 = \sum_{j=1}^{n-1} x_j \frac{\delta_1(w_j)}{w_j}.$$

证毕. ∎

下面的引理表明如果 $j \neq p$, $N_{i,j}$ 和 $N_{i,p}$ 的交集恰恰是集合 N_i.

引理 4.6. *设 $i \in \{1, \ldots, m\}$ 且 $j, p \in \{1, \ldots, n\}$ 满足 $j \neq p$. 则*

$$N_{i,j} \cap N_{i,p} = N_i.$$

证明. 不失一般性，我们假设 $i = 1$, $j = 1$, $p = n$ 且 $n > 1$. 由定义，N_1 自然包含在 $N_{1,1}$ 和 $N_{1,n}$ 的交集中. 所以只需要证明反向包含关系. 设 a 为 $N_{1,1}$ 和 $N_{1,n}$ 的交集中非零元素. 令 a_S 和 a_K 分别为 a 关于 t_1 的 $\mathbb{X}$-壳和 $\mathbb{X}$-核. 由引理 4.5, a 关于 t_1 的 $\mathbb{X}$-壳和 $\mathbb{X}$-核具有如下形式

$$a_S = \frac{\delta_1(f_1)}{f_1} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\delta_1(v_j)}{v_j} = \frac{\delta_1(f_1')}{f_1'} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\delta_1(v_j')}{v_j'},$$

其中 $f_1, f_1' \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $v_j \in k(\mathbf{t}, x_1)$ 且对所有 $j = 1, \ldots, n$ 满足 $v_j' \in k(\mathbf{t}, x_n)$. 注意到 x_j 是 $k(\mathbf{t})$ 上的未定元. 则由引理 2.5 得出

$$\frac{\delta_1(f_1)}{f_1} = \frac{\delta_1(f_2)}{f_2} \quad 和 \quad \frac{\delta_1(v_j)}{v_j} = \frac{\delta_1(v_j')}{v_j'}$$

对所有 $j = 1, \ldots, n$ 成立. 因为微分方程

$$\delta_1(z) = \frac{\delta_1(v_j')}{v_j'} z$$

在 $v_j \in k(\mathbf{t}, x_1)$ 中有解并且方程系数属于 $k(\mathbf{t}, x_n)$, 所以必然在 $k(\mathbf{t})$ 中有一解 b_j'.

设定 $g' = f_1$，则有

$$a_S = \frac{\delta_1(g')}{g'} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\delta_1(b_j')}{b_j'}.$$

由引理 4.5, a 的 $\mathbb{X}$-核具有如下形式

$$\begin{aligned} a_K &= x_n \frac{\delta_1(w_n)}{w_n} + \sum_{q=2}^{n-1} x_q \frac{\delta_1(w_q)}{w_q} + s \\ &= x_1 \frac{\delta_1(w_1')}{w_1'} + \sum_{q=2}^{n-1} x_q \frac{\delta_1(w_q')}{w_q'} + s', \end{aligned}$$

其中 $w_1, \ldots, w_{n-1}, s \in k(\mathbf{t}, x_1)$ 且 $w_2', \ldots, w_n', s' \in k(\mathbf{t}, x_n)$. 由上面第二个等式知，$a_K$ 是系数在 $k(\mathbf{t}, x_2, \ldots, x_n)$ 中关于 x_1 的多项式，并且 a_K 关于 x_1 的次数至多为 1. 所以 w_q 可以取成 $k(\mathbf{t})$ 中元素. 否则 a_K 的分母将含有变元 x_1，这将与 a_K 是关于 x_1 的多项式矛盾. 如此得出，

$$s = cx_1 + d,$$

其中 $c, d \in k(t)$. 同样的, 我们有

$$a_K = x_1 \frac{\delta_1(w_1')}{w_1'} + \sum_{q=2}^{n-1} x_q \frac{\delta_1(w_q')}{w_q'} + c' x_n + d',$$

其中 $w_1', \ldots, w_{n-1}', c', d' \in k(\mathbf{t})$. 应此, $c = \delta_1(w_1')/w_1'$

$$a_K = \sum_{q=1}^{n} x_q \frac{\delta(w_q^*)}{w_q^*} + d,$$

其中 w_q^* 和 d 都在 $k(t)$ 中. 这就证明了 a 在集合 N_1 中. ▮

下面的引理可以看成引理 4.6 的离散形式.

引理 4.7. 设 $i, p \in \{1, \ldots, m\}$ 满足 $i \neq p$ 且 $j \in \{1, \ldots, n\}$. 如果有理函数 $b \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 可以写成

$$b = \frac{\sigma_j(f_i)}{f_i} \beta_i \alpha_i = \frac{\sigma_j(f_p)}{f_p} \beta_p \alpha_p \tag{4.8}$$

对某些 $f_i, f_p \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $\beta_i, \beta_p \in k(\mathbf{t})$, $\alpha_i \in k(t_p, \mathbf{x})$ 和 $\alpha_p \in k(t_i, \mathbf{x})$, 那么存在 $f \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $\alpha \in k(\mathbf{x})$, 和 $\beta \in k(\mathbf{t})$ 使得

$$b = \frac{\sigma_j(f)}{f} \beta \alpha.$$

证明. 不失一般性，我们假设 α_i 和 α_j 都是关于 x_j 平移既约的. 如果

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_p} = \frac{\sigma_j(g)}{g}\frac{1}{u}, \tag{4.9}$$

其中 $(g, 1/u)$ 是 α_i/α_p 关于 x_j 的差分有理正规形式. 那么 g 必然属于 $k(\mathbf{x})$, 因为 t_i 和 t_p 是互不相同的未定元. 由方程(4.8) 和 (4.9) 得出

$$\frac{\sigma_j(w)}{w} = \frac{\beta_p}{\beta_i}u,$$

其中 $w = f_i g/f_p$. 因为 u 是关于 x_j 平移既约的, 并且 $\beta_i, \beta_p \in k(\mathbf{t})$, 所以引理 4.4 导出 $\sigma_j(w) = w$, 且

$$\frac{\beta_p}{\beta_i}u = 1,$$

这样我们有 $u \in k(\mathbf{t})$. 由方程 (4.9) 知，$\alpha_i \in k(t_p, \mathbf{x})$ 是 $k(\mathbf{x})$ 中元素和 $k(\mathbf{t})$ 中元素的乘积, 且 α_p 属于 $k(t_i, \mathbf{x})$. 由有理函数分解的唯一性, α_i 可以写成乘积 cd，其中 $c \in k(t_p)$ 且 $d \in k(\mathbf{x})$. 设定 $f = f_i$, $\beta = \beta_i c$ 和 $\alpha = d$，引理成立. ∎

4.4 相容有理函数的结构

本节的目标是证明如下定理, 该定理刻画了超指数-超几何函数的算子商的结构.

定理 4.8. 设 $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ 为 $k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 中有理函数，并且满足 $b_1 \cdots b_n \neq 0$ 和所有可积条件 (4.2), (4.3) 和 (4.4). 则存在 $f \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, 单变元有理函数 $r_v \in k(z)$, 其中 v 为某一有限集合 $V \in \mathbb{Z}^n$ 的元素, $c_1, \ldots, c_L \in \bar{k}$, $g_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in k(\mathbf{t})$, 和 $g_1, \ldots, g_L \in \bar{k}(\mathbf{t})$ 满足

$$a_i = \delta_i(g_0) + \frac{\delta_i(f)}{f} + \sum_{\ell=1}^{L} c_\ell \frac{\delta_i(g_\ell)}{g_\ell} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\delta_i(\beta_j)}{\beta_j} \quad \text{对所有 } i = 1, \ldots, m \text{ 成立}, \tag{4.10}$$

且

$$b_j = \frac{\sigma_j(f)}{f}\beta_j \prod_{v \in V}\prod_{p=0}^{v_j} r_v(\mathbf{x}\cdot v + p) \quad \text{对所有 } j = 1, \ldots, n \text{ 成立} \tag{4.11}$$

其中 $\mathbf{x} \cdot v$ 代表向量内积 $x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$.

4.4.1 Ore-Sato 定理

在 1930年，Ore [61] 给出了满足递归关系

$$R_1(m,n+1)R_2(m,n)=R_1(m,n)R_2(m+1,n)$$

的有理函数 $R_1,R_2\in k(m,n)$ 的所有可能形式，即解的结构. Ore 定理的多变元情形推广形式由 Sato [75] 在 60年代发展他的预齐次向量空间 (prehomogeneous vector spaces) 理论中运用同调代数方法得到了证明. 在证明离散情形下的 Wilf–Zeilberger 猜想过程中，Payne 在其博士论文 [65]，Abramov 和 Petkovšek 在文章 [12, 14] 中分别独立地重新发现并运用初等方法证明了 Ore-Sato 定理.

特别的，侯庆虎在其博士论文 [49, 50] 中也给出了两个变元情形时该定理的证明. 这些结果揭示了多变元超几何项的算子商的乘性结构. 下面我们采用 Payne 博士论文 [65, 定理 2.8.4] 的表述来给出 Ore-Sato 定理.

定理 4.9 (Ore-Sato 定理)**.** *设 $b_1,\ldots,b_n$ 为 $k(\mathbf{x})$ 中有理函数且满足 $b_1\cdots b_n\neq 0$ 和可积条件*

$$\frac{\sigma_i(b_j)}{b_j}=\frac{\sigma_j(b_i)}{b_i},\quad \text{对所有 } 1\leq i<j\leq n.$$

则存在有理函数 $f\in k(\mathbf{x})$, 有限集合 $V\in\mathbb{Z}^n$ 和单变元有理函数 $r_v\in k(z)$ (这里 $v\in V$) 使得对所有 $1\leq j\leq n$,

$$b_j=\frac{\sigma_j(f)}{f}\prod_{v\in V}\prod_{p=0}^{v_j}r_v(\mathbf{x}\cdot v+p),$$

其中 $\mathbf{x}\cdot v$ 代表向量内积 $x_1v_1+\ldots+x_nv_n$.

下面几节中，我们将讨论有理函数满足其他可积条件 (4.2) 和 (4.4)时可能具有的结构.

4.4.2 多变元 Christopher 定理的证明

多变元超指数函数 $h(\mathbf{t})$ 是下面一阶完全可积系统的非零解.

$$\delta_1(z)=a_1z,\quad \ldots,\quad \delta_m(z)=a_mz,$$

这里 $a_1,\ldots,a_m$ 是 $k(\mathbf{t})$ 中相容的有理函数, 即满足可积条件 (4.3). 在两个变元情形下, Geddes, Le 和李子明 [44] 刻画了 a_1 和 a_2 的分母之间的联系. 基于该联

系，他们在其工作中对超指数函数提出了预差和算子 (*prescoper*) 的概念. 并证明了预差和算子是差和算子的右因子.

引理 4.10 (Geddes–Le–Li, 2004). 设 $a_1, a_2 \in k(t_1, t_2)$ 满足 $\delta_2(a_1) = \delta_1(a_2)$. 若 $d_1, d_2 \in k[t_1, t_2]$ 分别为 a_1, a_2 的分母, 则有 $d_1/d_2 = f(t_1)/g(t_2)$ 对某些 $f \in k[t_1]$ 和 $g \in k[t_2]$ 成立.

在对关于 Liouvillian 首次积分的 Singer 定理 [76] 的改进中，Christopher [24] 证明了如下定理.

定理 4.11 (Christopher, 1999). 任意的 $\mathbb{C}(t_1, t_2)$ 上双变元超指数函数 $h(t_1, t_2)$ 都可以写成

$$\exp(f)\prod_{\ell=1}^{L} g_\ell^{c_\ell}, \quad \text{其中 } f, g_\ell \in \mathbb{C}(t_1, t_2) \text{ 且 } c_\ell \in \mathbb{C}.$$

等价的, $h(t_1, t_2)$ 的两个算子商 a_1 和 a_2 可以写成

$$a_i = \delta_i(f) + \sum_{\ell=1}^{L} c_\ell \frac{\delta_i(g_\ell)}{g_\ell}, \quad \text{对 } i = 1, 2.$$

在文章 [88], Zoladek 运用 Cerveau 和Mattei 的书 [21] 中的一个结论给出了多变元 Christopher 定理的证明. 我们给出该定理的一个纯代数证明.

定理 4.12 (多变元 Christopher 定理). 设 $a_1, \ldots, a_m \in k(\mathbf{t})$ 满足

$$\delta_i(a_j) = \delta_j(a_i), \quad \text{对 } 1 \leq i < j \leq m.$$

则存在 $f \in k(\mathbf{t})$, 非零常数 $c_\ell \in \overline{k}$, 和 $g_\ell \in k(c_\ell)(\mathbf{t})$ 对所有 $1 \leq \ell \leq n$ 使得

$$a_i = \delta_i(f) + \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \frac{\delta_i(g_\ell)}{g_\ell}, \quad \text{对所有 } i = 1, \ldots, m.$$

我们将用数学归纳法证明上定理. 为此，先证明如下引理. 证明引理过程中，我们用到交换公式：

$$\delta_i\left(\frac{\delta_j(f)}{f}\right) = \delta_j\left(\frac{\delta_i(f)}{f}\right), \quad \text{对所有非零 } f \in k(\mathbf{t}) \text{ 和 } 1 \leq i < j \leq m. \tag{4.12}$$

引理 4.13. 设 K 代表 $k(t_2, t_3, \ldots, t_m)$ 并且 $a_1, \ldots, a_m$ 是 $k(\mathbf{t})$ 中有理函数满足

$$\delta_i(a_j) = \delta_j(a_i) \quad \text{对所有 } i, j \text{ 满足 } 1 \le i < j \le m.$$

则存在 $f \in k(\mathbf{t})$, $A_\ell \in K$ 对所有 $\ell = 2, \ldots, m$, 非零元素 $c_j \in \overline{k}$ 和 $p_j \in K(c_j)[t_1] \setminus K(c_j)$ 对所有 $1 \le j \le n$ (这里 $n \in \mathbb{N}$) 使得对所有 $2 \le i < j \le m$ 满足 $\delta_i(A_j) = \delta_j(A_i)$，并且

$$a_1 = \delta_1(f) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_1(p_j)}{p_j},$$

$$a_\ell = \delta_\ell(f) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_\ell(p_j)}{p_j} + A_\ell \quad \text{对 } \ell = 2, \ldots, m.$$

此外,当 $j \neq j^*$， p_j 和 p_{j^*} 是 $K(c_1, \ldots, c_n)$上关于 t_1 的互素多项式.

证明. 由引理 2.8，定理在 $m = 1$ 时成立. 应用引理 2.8 于 $a_1 \in K(t_1)$，我们得到：存在 $f \in k(\mathbf{t})$, 非零元素 $c_j \in \overline{K}$ 和 $p_j \in K(c_j)[t_1] \setminus K(c_j)$ 对所有 $1 \le j \le n$ (这里 $n \in \mathbb{N}$) 使得

$$a_1 = \delta_1(f) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_1(p_j)}{p_j}. \tag{4.13}$$

此外，c_j 是 a_1 关于 t_1 加法分解的对数部分 A/D 的 Rothstein-Trager 结式的互不相同的根，并且 $p_j = \gcd(D, A - c_j\delta_1(D))$. 所以由引理 2.6 可知，当 $j \neq j^*$ 时 p_j 和 p_{j^*} 是 $K(c_1, \ldots, c_n)$ 上关于 t_1 互素的多项式.

下面我们证明所有的 c_j 在 $\overline{k}$ 中. 对所有 ℓ 满足 $2 \le \ell \le m$, 由交换公式 (4.12) 得出

$$\delta_\ell(a_1) = \delta_1(\delta_\ell(f)) + \delta_1\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_\ell(p_j)}{p_j}\right) + \sum_{j=1}^{n} \delta_\ell(c_j) \frac{\delta_1(p_j)}{p_j}.$$

再由可积条件 $\delta_\ell(a_1) = \delta_1(a_\ell)$ 导出

$$\delta_1\left(a_\ell - \delta_\ell(f) - \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_\ell(p_j)}{p_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \delta_\ell(c_j) \frac{\delta_1(p_j)}{p_j}.$$

因为 $p_j \in K(c_j)[t_1] \setminus K(c_j)$, 所以 $\delta_1(p_j) \neq 0$. 由引理 2.5, 对所有 ℓ 满足 $2 \le \ell \le m$, 成立 $\delta_\ell(c_j) = 0$ 且

$$a_\ell = \delta_\ell(f) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_\ell(p_j)}{p_j} + A_\ell, \quad \text{对某个 } A_\ell \in K(c_1, \ldots, c_n).$$

因此所有 c_j 在 $\overline{k}$ 中. 此外, 对所有 ℓ 满足 $2 \le \ell \le m$, 和式

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_\ell(p_j)}{p_j}$$

属于 $k(\mathbf{t})$, 这是因为该和式中 c_j 是系数在 $k(x)$ 中的 Rothstein-Trager 结式的根, 并且和式在任何 c_j 的置换下不变的. 由此得出所有 A_ℓ 在 K 中. 最后，可积条件 $\delta_i(a_j) = \delta_j(a_i)$ 导出 $\delta_i(A_j) = \delta_j(A_i)$ 对所有 i, j 满足 $2 \le i < j \le m$. 证毕. ∎

现在, 我们给出定理 4.12 的证明.

证明. 我们对 m 采用数学归纳法进行证明. 由引理 2.8，定理在 $m = 1$ 时成立. 我们下面假设 $m > 2$ 且定理对 $m - 1$ 成立. 设 K 代表 $k(t_2, t_3, \ldots, t_m)$. 由引理 4.13, 存在 $f \in k(\mathbf{t})$, $A_\ell \in K$ 对所有 $\ell = 2, \ldots, m$, 非零元素 $c_j \in \overline{k}$ 和 $p_j \in K(c_j)[t_1] \setminus K(c_j)$ 满足 $1 \le j \le n$ (这里 $n \in \mathbb{N}$) 使得$\delta_i(A_j) = \delta_j(A_i)$, 对所有 i, j 满足 $2 \le i < j \le m$, 且

$$\begin{aligned} a_1 &= \delta_1(f) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_1(p_j)}{p_j}, \\ a_\ell &= \delta_\ell(f) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_\ell(p_j)}{p_j} + A_\ell, \quad \text{对 } \ell = 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

由归纳假设, 对 $m - 1$ 个相容的有理函数 A_ℓ, 存在$\bar{f} \in K$, 非零元素 $\bar{c}_j \in \overline{k}$ 和 $\bar{p}_j \in K(c_j)$ 对所有 $j = 1, \ldots, \bar{n}$ 使得

$$A_\ell = \delta_\ell(\bar{f}) + \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{c}_j \frac{\delta_\ell(\bar{p}_j)}{\bar{p}_j}, \quad \text{对所有 } \ell \text{ 满足 } 2 \le \ell \le m.$$

因为 $\bar{f}$ 和 $\bar{p}_j$ 不含有变元 t_1, 所以

$$a_i = \delta_i(f + \bar{f}) + \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta_i(p_j)}{p_j} + \sum_{j=1}^{\bar{n}} \bar{c}_j \frac{\delta_i(\bar{p}_j)}{\bar{p}_j}, \quad \text{对所有 } i \text{ 满足 } 1 \le i \le m.$$

证毕. ∎

4.4.3 Feng-Singer-Wu 引理的多变元推广

在两个变元情形下, 冯如勇, Singer 和吴敏 [39, 命题 5] 证明了如果有理函数 $a, b \in k(t, x)$ 满足 $b \neq 0$ 和 $\sigma(a) - a = \delta(b)/b$，那么存在 $f \in k(t, x)$, $\alpha \in k(x)$, 和 $\beta, \gamma \in k(t)$ 使得

$$a = \frac{\delta_1(f)}{f} + x\frac{\delta_1(\beta)}{\beta} + \gamma \quad \text{且} \quad b = \frac{\sigma_1(f)}{f}\beta\alpha.$$

这个结论在他们计算素数阶线性微分-差分方程的 liouvillian 解中起到了重要作用. 我们将 Feng-Singer-Wu 的结果推广到多变元情形.

定理 4.14. 设 $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ 是 $k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 中有理函数并满足 $b_1 \cdots b_n \neq 0$.

如果所有的可积条件 (4.2), (4.3) 和 (4.4) 都成立，则存在 $f \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in k(\mathbf{t})$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in k(\mathbf{t})$ 和 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k(\mathbf{x})$ 使得

$$a_i = \frac{\delta_i(f)}{f} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\delta_i(\beta_j)}{\beta_j} + \gamma_i \quad \text{对所有 } i \text{ 满足 } 1 \leq i \leq m, \tag{4.14}$$

且

$$b_j = \frac{\sigma_j(f)}{f}\beta_j\alpha_j \quad \text{对所有 } j \text{ 满足 } 1 \leq j \leq n. \tag{4.15}$$

此外，γ_i, α_j 和 a_i, b_j 一样也满足所有的可积条件 (4.2), (4.3) 和 (4.4).

在证明定理 4.14 之前，我们先考查一些边界情形. 若果 $n = 0$, 我们可以设 $f = 1$ 和 $\gamma_i = a_i$ 对所有 i 满足 $1 \leq i \leq m$. 同样地，如果 $m = 0$, 我们可以设 $f = 1$, $\beta_j = 1$ 和 $b_j = \alpha_j$ 对所有 j 满足 $1 \leq j \leq n$. 因此, 定理在 $n = 0$ 或 $m = 0$ 时都成立. 如果 $m = n = 1$, 则由 Feng-Singer-Wu 的结果 [39, 性质 5] 得到定理. 在 Feng-Singer-Wu 的结果中，他们假设 k 是代数闭域. 但是仔细推敲其证明可知，该结论在 k 为特征零域时仍然成立. 综上所述，我们下面只需证明定理在 $m > 1$ 且 $n \geq 1$ 或者 $m \geq 1$ 且 $n > 1$ 时成立.

我们的证明对 m 和 n 应用数学归纳法. 为此，我们先证明定理在 $m = 1$, n 任意时成立.

引理 4.15. 设 $a, b_1, \ldots, b_n$ 为 $k(t, \mathbf{x})$ 中有理函数使得 $b_1, \ldots, b_n$ 满足可积条件 (4.3)，$b_1 \cdots b_n \neq 0$，且

$$\frac{\delta(b_j)}{b_j} = \sigma_j(a) - a, \quad \text{对所有 } j \text{ 满足 } 1 \leq j \leq n. \tag{4.16}$$

则存在 $f \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k(\mathbf{x})$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in k(t)$, 和 $\gamma \in k(t)$ 使得

$$a = \frac{\delta(f)}{f} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\delta(\beta_j)}{\beta_j} + \gamma \quad \text{且} \quad b_j = \frac{\sigma_j(f)}{f}\beta_j\alpha_j \quad \text{对 } 1 \le j \le n. \tag{4.17}$$

此外有理函数 α_i 在 $k(\mathbf{x})$ 中是相容的.

证明. 我们对 n 运用数学归纳法. 若果 $n = 1$, 则引理就是 [39, 性质 5]. 下面假设 $n > 1$ 并且引理对所有 b_j 个数小于 n 时成立. 将 $a, b_1, \ldots, b_n$ 看成 $k(x_n)$ 上关于 $t, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 的有理函数. 则由归纳假设，存在 $\tilde{f} \in k(t, \mathbf{x})$, $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{n-1} \in k(t, x_n)$ 和 $\tilde{\gamma} \in k(t, x_n)$ 使得

$$a = \frac{\delta(\tilde{f})}{\tilde{f}} + x_1 \frac{\delta(\tilde{\beta}_1)}{\tilde{\beta}_1} + \cdots + x_{n-1} \frac{\delta(\tilde{\beta}_{n-1})}{\tilde{\beta}_{n-1}} + \tilde{\gamma}.$$

类似的, 将 $a, b_1, \ldots, b_n$ 看成 $k(x_1)$ 上关于 t, x_2, $\ldots$, x_n 的有理函数, 则有

$$a = \frac{\delta(f')}{f'} + x_2 \frac{\delta(\beta_2')}{\beta_2'} + \cdots + x_n \frac{\delta(\beta_n')}{\beta_n'} + \gamma',$$

其中 $f' \in k(t, \mathbf{x})$, $\beta_2', \ldots, \beta_n' \in k(t, x_1)$, 且 $\gamma' \in k(t, x_1)$.

从引理 4.6 进一步得出存在 $f \in k(t, \mathbf{x})$ 和 $\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma \in k(t)$ 使得

$$a = \frac{\delta(f)}{f} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\delta(\beta_j)}{\beta_j} + \gamma.$$

假设对所有 j 满足 $1 \le j \le n$,

$$b_j = \frac{\sigma_j(f)}{f}\beta_j\alpha_j$$

对某些 $\alpha_j \in k(t, \mathbf{x})$. 由可积条件 (4.16) 和简单的计算得,

$$\frac{\delta(b_j)}{b_j} = \sigma_j(a) - a,$$

这又导出

$$\frac{\delta(\alpha_j)}{\alpha_j} = 0.$$

因此 α_j 属于 $k(\mathbf{x})$. 由可积条件 (4.3), 上面的 α_j 满足对所有 $1 \le j < q \le n$ 成立

$$\frac{\sigma_q(\alpha_j)}{\alpha_j} = \frac{\sigma_j(\alpha_q)}{\alpha_q}$$

证毕. ∎

现在我们给出定理 4.14 的证明.

证明. 我们对 m 运用数学归纳法进行证明. 当 $m=1$ 时，定理就是引理 4.15. 下面，设 n 为一正整数且假设定理当 a_i 个数小于 m 时都成立. 首先，在 $k(t_m)$ 上考虑连续变元 $t_1,\ldots,t_{m-1}$ 和离散变元 $x_1,\ \ldots,\ x_n$，则由归纳假设可知对满足 $1\le j\le n$ 的所有 j , 存在 $\tilde{f},\tilde{\beta}_j\in k(\mathbf{t})$ 和 $\tilde{\alpha}_j\in k(t_m,\mathbf{x})$ 使得

$$b_j=\frac{\sigma_j(\tilde{f})}{\tilde{f}}\tilde{\beta}_j\tilde{\alpha}_j.$$

接着我们在 $k(t_1)$ 上考虑连续变元 $t_2,\ldots,t_m$ 和离散变元 $x_1,\ \ldots,\ x_n$，则由归纳假设可知，对满足 $1\le j\le n$ 的所有 j , 存在 $\hat{f},\hat{\beta}_j\in k(\mathbf{t})$ 和 $\hat{\alpha}_j\in k(t_1,\mathbf{x})$ 使得

$$b_j=\frac{\sigma_j(\hat{f})}{\hat{f}}\hat{\beta}_j\hat{\alpha}_j.$$

由上面两个等式和引理 4.7, 可知存在 $f_j'\in k(\mathbf{t},\mathbf{x})$, $\beta_j'\in k(\mathbf{t})$, $\alpha_j'\in k(\mathbf{x})$ 使得

$$b_j=\frac{\sigma_j(f_j')}{f_j'}\beta_j'\alpha_j'\quad \text{对所有 } j \text{ 满足 } 1\le j\le n. \tag{4.18}$$

现在我们断言存在 $f\in k(\mathbf{t},\mathbf{x})$, $\beta_1,\ldots,\beta_n\in k(\mathbf{t})$ 和 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in k(\mathbf{x})$ 使得

$$b_j=\frac{\sigma_j(f)}{f}\beta_j\alpha_j\quad \text{对所有 } j \text{ 满足 } 1\le j\le n.$$

我们同样对 n 运用数学归纳法证明该断言. 如果 $n=1$, 则断言由 (4.18) 导出. 下面假设断言对所有 $\ell<n$ 时成立, 并且

$$b_{\ell+1}=\frac{\sigma_{\ell+1}(f)}{f}u \tag{4.19}$$

其中 $u\in k(\mathbf{t},\mathbf{x})$. 由 (4.3),

$$\sigma_1(u)=\frac{\sigma_{\ell+1}(\alpha_1)}{\alpha_1}u,\ \ldots,\ \sigma_\ell(u)=\frac{\sigma_{\ell+1}(\alpha_\ell)}{\alpha_\ell}u.$$

因为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\in k(\mathbf{x})$, 所以

$$u=vw,$$

这里 $v\in k(\mathbf{t},x_{\ell+1},\ldots,x_n)$ 且 $w\in k(\mathbf{x})$. 由 (4.18) 和 (4.19) 可知，

$$\frac{\sigma_{\ell+1}(f)}{f}vw=\frac{\sigma_{\ell+1}(f_{\ell+1}')}{f_{\ell+1}'}\beta_{\ell+1}'\alpha_{\ell+1}'.$$

再由有理函数分解的唯一性，存在 $g \in k(\mathbf{t}, x_{\ell+1}, \ldots, x_n)$, $\beta_\ell \in k(\mathbf{t})$ 和 $\alpha_\ell \in k(\mathbf{x})$ 使得

$$vw = \frac{\sigma_{\ell+1}(g)}{g} \beta_{\ell+1} \alpha_{\ell+1}.$$

由于 $\sigma_j(g) = g$ 对满足 $1 \leq j \leq \ell$ 的所有 j 成立，那么只需将 f 替换为 fg 则得出断言对 $\ell + 1$ 成立.

接下来我们还需要得出有理函数 a_i 的形式. 假设对所有满足 $1 \leq i \leq m$ 的 i 都成立

$$a_i = \frac{\delta_i(f)}{f} + \sum_{j=1}^{m} x_i \frac{\delta_i(\beta_j)}{\beta_j} + \gamma_i,$$

其中 $\gamma_i \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 是待定函数. 由可积条件 (4.4) 可知，

$$\sigma_j(\gamma_i) = \gamma_i \quad \text{对所有 } j \text{ 满足 } 1 \leq j \leq n,$$

进一步导出 γ_i 属于 $k(\mathbf{t})$. 此外对所有满足 $1 \leq i < p \leq m$ 的 i 都成立

$$\delta_i(\gamma_p) = \delta_p(\gamma_i).$$

再由可积条件 (4.3) 可知，

$$\frac{\sigma_j(\alpha_q)}{\alpha_q} = \frac{\sigma_q(\alpha_j)}{\alpha_j}$$

多所有满足 $1 \leq j < q \leq n$ 的 j, q 成立. 证毕. ∎

注 3. 在上面定理中分别应用定理 4.9 和定理 4.12 于 γ_i 和 α_j, 我们就可以得到定理 4.8.

4.5 超指数-超几何函数的分解

在这节中假设 k 是代数闭的. 我们将从其算子商的结构出发推导出超指数-超几何函数的一种分解.

设 $h(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 是 $k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ 上的一个超指数-超几何函数. 那么其算子商$a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ 满足 $b_1 \cdots b_n \neq 0$ 且可积条件 (4.2), (4.3) 和 (4.4) 都成立. 由定理 4.14, 存在 $f \in k(\mathbf{t}, \mathbf{x})$, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in k(\mathbf{t}) \setminus \{0\}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in k(\mathbf{t})$ 和 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k(\mathbf{x})$ 使得

$$a_i = \frac{\delta_i(f)}{f} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\delta_i(\beta_j)}{\beta_j} + \gamma_i$$

对所有满足 $1 \le i \le m$ 的 i 成立, 且

$$b_j = \frac{\sigma_j(f)}{f}\beta_j\alpha_j$$

对所有满足 $1 \le j \le n$ 的 j 成立. 此外，

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_m,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

也满足可积条件 (4.2), (4.3) 和 (4.4). 由 [20, 定理 2], 存在 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$的单的微分-差分扩张 R 使得 R 包含超指数-超几何项 h, β^{x_i} 和 $h' \in \mathcal{H}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. 注意到 R 中任一超指数-超几何项都是可逆的，因为 R 是单的. 因为 k 是代数闭的，那么 R 中任何两个拥有相同算子商的元素只相差一个 R 中常数. 由简单验证可知，h 和 $f\beta_1^{x_1}\cdots\beta_n^{x_n}h'$ 拥有相同的算子商. 因此，

$$h = cf\beta_1^{x_1}\cdots\beta_n^{x_n}h',$$

这里 $c \in k$ 且 h' 的算子商为 $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. 注意到 γ_i 是关于 $\mathbf{t}$ 的函数和 α_j 是关于 $\mathbf{x}$ 的函数. 如此我们得到如下分解

$$\mathcal{H}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathcal{H}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, 1, \ldots, 1)\mathcal{H}(0, \ldots, 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

再由多变元 Christopher 定理 4.12 可知，任一函数 $h_e \in \mathcal{H}(\gamma_1, \ldots, \gamma_m, 1, \ldots, 1)$ 都共轭于

$$\exp(g_0)\prod_{\ell=1}^{L} g_\ell^{c_\ell},$$

其中 $c_1, \ldots, c_L \in k$ 且 $g_0, g_1, \ldots, g_L \in k(\mathbf{t})$. 由 [65, 推论 3.7.3] 或则 [14, 推论 4] 可知，任一函数 $h_g \in \mathcal{H}(0, \ldots, 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 都共轭于

$$\tilde{f}(\mathbf{x})T(\mathbf{x})$$

其中 $\tilde{f} \in k(\mathbf{x})$ 且 $T(\mathbf{x})$ 是关于 $\mathbf{x}$ 的阶乘项 (具体参见 [65, 定义 3.5.1] 或者 [14, 定义 5]).

综上所述，我们得到如下定理.

定理 4.16. 假设 k 是代数闭的，则任一 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 上超指数-超几何函数 h 都共轭于如下函数

$$r(\mathbf{t},\mathbf{x})\exp(g_0(\mathbf{t}))\prod_{\ell=1}^{L} g_\ell(\mathbf{t})^{c_\ell}\prod_{j=1}^{n}\beta_j(\mathbf{t})^{x_j}T(\mathbf{x}) \tag{4.20}$$

其中 $r \in k(\mathbf{t},\mathbf{x})$, $g_0, g_1, \ldots, g_L, \beta_1, \ldots, \beta_n \in k(\mathbf{t})$, $c_l, \ldots, c_L \in k$, 且 $T(\mathbf{x})$ 是关于 $\mathbf{x}$ 的阶乘项.

定义 4.6 (正则性)**.** 在 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 上的超指数-超几何函数 h 被称为是正则的 (*proper*) 如果它共轭于如下函数

$$p(\mathbf{t},\mathbf{x}) \exp(g_0(\mathbf{t})) \prod_{\ell=1}^{L} g_\ell(\mathbf{t})^{c_\ell} \prod_{j=1}^{n} \beta_j(\mathbf{t})^{x_j} T(\mathbf{x}) \tag{4.21}$$

其中 p 是 $k[\mathbf{t},\mathbf{x}]$ 中多项式, $g_0, g_1, \ldots, g_L, \beta_1, \ldots, \beta_n \in k(\mathbf{t})$, $c_1, \ldots, c_L \in k$, 且 $T(\mathbf{x})$ 是关于 $\mathbf{x}$ 的阶乘项.

由正则性定义 4.6 和多变元 Christopher 定理，我们得到下面的结论.

推论 4.17. 任一 $k(\mathbf{t})$ 上的多变元超指数函数都是正则的.

第五章　超指数-超几何函数的差和算子的存在性判定

5.1　前言

在最近的 20 年里，Zeilberger 算法的终止性得到了广泛的研究. 根据 Zeilberger 算法的设计方式，其终止性与差和算子的存在性等价. Zeilberger 在文章 [86] 中证明了他的算法对完整函数是终止的. 特别地，Wilf 和 Zeilberger 基于 Fasenmyer [37] 和 Verbaeten [81] 的思想对差和算子关于正则超指数-超几何函数的存在性给出了一个初等的并且构造性的证明 [86, 84]. 但是，完整性质只是差和算子存在的充分条件. 事实上，Chyzak, Kauers 和 Salvy 在文章 [29] 中指出了几类非完整但差和算子仍存在的函数，并且给出了比完整性质弱的存在条件. 从 2001 年开始, 有许多工作关注于超指数-超几何函数的差和算子存在性的充分必要条件. 在连续情形下, Bernstein [16] 和 Lipshitz [60] 等人的工作揭示了对任一超指数函数都存在差和算子. 也就是说，Zeilberger 算法对超指数函数总是能成功的计算出差和算子来. 但是，当对于其他情形问题就变得不那么简单. 在离散及其 q-模拟情形下，关于存在性问题第一个完整的解答是 Abramov 和 Le 在文章 [58, 9] 中给出的判定准则，该准则可以判定任给关于离散变元 m 和 n 的有理函数是否存在差和算子. 根据他们的准则，我们可以证明有理函数

$$f = \frac{1}{m^2 + n^2},$$

不存在差和算子. 在这项工作完成的不久, Abramov [5, 6] 将该准则推广到了双变元超几何项情形. 简单地说，Abramov 证明了一个超几何项具有差和算子当且仅当该超几何项可以写成超几何可加的 (hypergeometric-summable) 超几何项与正则超几何项的和. 在 q-差分情形，类似的判定准则由陈永川，侯庆虎和穆彦平在文章 [23] 中给出. 这些结果在 Zeilberger 算法的终止性判定中起到了本质的作用.

Almkvist 和 Zeilberger 在文章 [15] 中将 Zeilberger 算法推广到了微分-差分混合情形. 这种推广被应用于正交多项式 [54, 第 10-13 章] 的研究. 在这种连续-离散混合情形下，也不是所有的超指数-超几何函数都存在差和算子. 比如，

我们将在本章中证明关于连续变元 x 和离散变元 n 的有理函数

$$f = \frac{1}{x+n}$$

既不存在关于 x 的差和算子也不存在关于 n 的差和算子. 所以, 在这种情形下我们也需要给出类似Abramov 准则的判定定理.

主要贡献. 在本章中，我们提出了两个关于双变元超指数-超几何函数的差和算子的存在的判定准则. 类似于 Abramov 的结果，我们证明了双变元超指数-超几何存在关于离散变元(连续变元) 的差和算子当且仅当该函数可以写成超几何可加的(超指数可积的) 函数与正则函数的和. 我们的准则基于对双变元超指数-超几何的标准表示和两类加法分解：一类是关于离散变元的 Abramov–Petkovšek 分解 [11, 13]，另一类是关于连续变元的 Geddes–Le–Li 分解 [44].

本章的其余部分安排如下：在小节 5.2 中，我们构造了一个序列环，并将一阶完全可积系统对应的 Picard–Vessoit 环嵌入到序列环中，使得本章里出现的所有双变元超指数-超几何函数在序列环中都是可逆的. 在这个代数框架下，我们给出了差和算子存在性问题的表述. 超指数-超几何函数的标准表示将在小节 5.4 中给出. 在小节 5.5 中，我们讨论两类加法分解，即关于离散变元的 Abramov-Petkovšek 分解和关于连续变元的 Geddes-Le-Li 分解，并给出在标准表示下，超指数-超几何函数加法分解的特殊形式. 最后，我们给出判定差和算子存在性的两个准则并给出一些例子. 基于这两个准则，我们完全解决了微分-差分混合情形下Zeilberger 算法的终止性问题.

本章的结果是与 Frédéric Chyzak，冯如勇和李子明合作得到的.

5.2 代数预备

在文章 [70, 71] 中，Risch 基于 Ritt 的微分域及其扩张理论 [72, 73] 提出了判定一类超越初等函数的初等可积性的算法. 自此以后，符号积分 [19] 方面的后继工作都以微分代数 [73, 51, 55] 作为代数框架. 受 Risch 算法的启发，Karr [52, 53] 基于差分代数 [31] 建立了一套符号求和算法. 在本节中，我们把微分-差分环和域理论作为给出双变元超指数-超几何函数的代数框架. 在这个框架里，我们可以纯代数的研究差和算子的存在性问题.

设 k 为特征零的代数闭域，$k(x, n)$ 为 k 上关于变元 x 和 n 的有理函数域. 需要注意的是，在这章中我们将把 x 看成连续变元，n 看成离散变元. 在域

$k(x,n)$ 上, 导数 δ 和平移算子 σ 分别定义为

$$\delta(f(x,n)) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad 和 \quad \sigma(f(x,n)) = f(x,n+1) \quad 对所有\ f \in k(x,n)\ 成立.$$

5.2.1 序列环

我们把二元超指数-超几何函数嵌入到在一般微分域 (universal Picard-Vessiot field) 上的序列环里. 这里的构造来自于文章 [38, 40].

设 K 为微分域 $(k(x),\delta)$ 的一般 Picard-Vessiot 域 (universal Picard-Vessiot field) [80, 第 10 章]. 则 (K,δ) 是 $(k(x),\delta)$ 的一个微分域扩张. 此外，K 关于 δ 的常数域恰等于 k, 因为我们假设 k 是代数闭的. 设 $K^{\mathbb{N}}$ 是 K 上所有无穷序列构成的环，其中加法和乘法是逐项定义的. 对于 $K^{\mathbb{N}}$ 中序列

$$s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$$

定义

$$\delta'(s) = (\delta(s_0), \delta(s_1), \delta(s_2), \ldots).$$

则 δ' 是 $K^{\mathbb{N}}$ 上的导数. 设 $I \subset K^{\mathbb{N}}$ 是所有只有有限项不为零的序列构成的集合，可以验证它是 $K^{\mathbb{N}}$ 中的理想. 因为 I 在导数 δ' 作用下是封闭的，所以商环 $\mathcal{S} := K^{\mathbb{N}}/I$ 仍是微分环，其上的微分 $\bar{\delta}$ 由 δ' 自然诱导出，即，

$$\bar{\delta}(s+I) = \delta'(s) + I.$$

进一步地，我们定义映射 $\bar{\sigma} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ 满足

$$s + I \mapsto (s_1, s_2, s_3, \ldots,) + I.$$

容易验证 $\bar{\sigma}$ 是良定义的 $\mathcal{S}$ 上的自同构且映射 $\bar{\delta}$ 和 $\bar{\sigma}$ 是相互交换的.

现在，我们可以把有理函数域 $k(x,n)$ 嵌入到 $\mathcal{S}$ 中. 任给 $k(x,n)$ 中有理函数 $f(x,n)$，存在有限 $m \in \mathbb{N}$ 使得当 $i \geq m$ 时 $f(x,i)$ 是良定义的. 定义映射 $\phi : k(x,n) \to \mathcal{S}$ 满足

$$f(x,n) \mapsto (\underbrace{0,\ldots,0}_{m}, f(x,m), f(x,m+1), f(x,m+2), \ldots) + I.$$

由 I 的定义可知, ϕ 是使得 $\phi \circ \delta = \bar{\delta} \circ \phi$ 且 $\phi \circ \sigma = \bar{\sigma} \circ \phi$ 成立的良定义的单射. 因此可以把 $k(x,n)$ 和像集 $\phi(k(x,n))$ 等同看待. 又因为 $\bar{\delta}$ 和 $\bar{\sigma}$ 分别是 δ 和 σ 的扩张. 所以我们还可以把 $\bar{\delta}, \bar{\sigma}$ 分别和 δ, σ 等同起来. 从而，$\mathcal{S}$ 是 $k(x,n)$ 的微分-差分扩张，且 k 是 $\mathcal{S}$ 的常数域.

引理 5.1. 设 a 和 b 是 $k(x,n)$ 中元素满足 $b \neq 0$ 和可积条件

$$\frac{\delta(b)}{b} = \sigma(a) - a. \tag{5.1}$$

则存在 $\mathcal{S}$ 中可逆的超指数-超几何函数使得其 δ-商为 a 且 σ-商为 b.

证明. 我们把 a 和 b 看成关于 n 的有理函数. 设 N 为充分大的整数使得对所有 $j \geq N$, $a(x,j)$ 和 $b(x,j)$ 都是良定义的且 $b(x,j) \neq 0$. 由此，存在非零 $v \in K$ 使得

$$\delta(v) = a(x,N)v.$$

设 $h_i = 0$ $(0 \leq i \leq N-1)$，$h_N = v$, 且 $h_{i+1} = b(x,i)h_i$ $(i > N)$.

我们断言

$$h = (h_0, h_1, \ldots, h_N, h_{N+1}, \ldots) + I$$

是一个可逆的超指数-超几何函数并以 a 为 δ-商和 b 为 σ-商.

可逆性由事实 $h_i \neq 0$ 对所有 $i \geq N$ 成立而得出. 现在，我们通过如下计算来验证 $\sigma(h) = bh$:

$$\begin{aligned}
\sigma(h) &= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{N-1}, h_N, h_{N+1}, h_{N+2}, \cdots) + I \\
&= (\underbrace{0, \ldots, 0}_{N-1}, h_N, b(x,N)h_N, b(x,N+1)h_{N+1}, \cdots) + I \\
&= (\underbrace{0, \ldots, 1}_{N}, b(x,N), b(x,N+1), \cdots)(\underbrace{0, \ldots, 0}_{N-1}, h_N, h_N, h_{N+1}, \cdots) + I \\
&= bh.
\end{aligned}$$

接着, 我们证明对所有 $i \geq N$ 有 $\delta(h_i) = a(x,i)h_i$，这导出 $\delta(h) = ah$. 当 $i = N$，上等式自然成立. 假设上等式对 $N \leq \ell$ 成立. 由 (5.1), 我们有

$$\delta(b(x,\ell)) = a(x,\ell+1)b(x,\ell) - a(x,\ell)b(x,\ell).$$

从而得到

$$\begin{aligned}
\delta(h_{\ell+1}) = \delta(b(x,\ell)h_\ell) &= \delta(b(x,\ell))h_\ell + b(x,\ell)\delta(h_\ell) \\
&= (a(x,\ell+1)b(x,\ell) - a(x,\ell)b(x,\ell))h_\ell + b(x,\ell)a(x,\ell)h_\ell \\
&= a(x,\ell+1)b(x,\ell)h_\ell = a(x,\ell+1)h_{\ell+1}.
\end{aligned}$$

那么断言对 $\ell+1$ 成立. 所以，由归纳可得引理成立. ∎

例 5.1. 假设 $\beta(x)$ 是 $k(x)$ 中的非零元素. 则二元组 $(n\delta(\beta)/\beta, \beta)$ 满足 (5.1). 因此可得

$$(1, \beta, \beta^2, \ldots) + I$$

是 $\mathcal{S}$ 中的算子商分别为 $n\delta(\beta)/\beta$ 和 β 的超指数-超几何函数. 为后文方便起见，该函数被记为 β^n.

设 a 和 b 满足引理 5.1 中的假设，且等式 (5.1) 成立. 在前章中，我们定义

$$\mathcal{H}(a,b) \triangleq \{h \in \mathcal{S} \mid \delta(h) = ah \text{ 且 } \sigma(h) = bh\}.$$

命题 5.2. 集合 $\mathcal{H}(a,b)$ 是 k 上一维向量空间，并且其中任何非零元在 $\mathcal{S}$ 中可逆.

证明. 由引理 5.1, $\mathcal{H}(a,b)$ 中有一个可逆元素, 记它为 h. 设 g 为 $\mathcal{H}(a,b)$ 中的另一个元素. 则由直接计算可得 $\delta(gh^{-1}) = 0$ 且 $\sigma(gh^{-1}) = gh^{-1}$. 因此, gh^{-1} 是常数. 因为 k 是 $\mathcal{S}$ 的所有常数构成的集合，所以引理得证. ∎

上引理表明每个 $k(x,n)$ 上一阶完全可积系统都与 k 上一维的向量空间相对应. 为了后面应用，我们将引理 4.1 限制在 $\mathcal{H}(a,b)$ 上得下推论.

推论 5.3. (*i*) 对任一超指数-超几何函数 $g \in \mathcal{S}$, 成立

$$g\mathcal{H}(a,b) = \mathcal{H}\left(a + \frac{\delta(g)}{g}, b\frac{\sigma(g)}{g}\right);$$

(*ii*) 设 $a, b, a', b' \in k(x,n)$ 满足 $bb' \neq 0$ 且可积条件 (5.1) 对 (a,b) 和 (a',b') 都成立, 则有

$$\mathcal{H}(a,b)\mathcal{H}(a',b') = \mathcal{H}(a+a', bb');$$

(*iii*) $\delta(\mathcal{H}(a,b)) = a\mathcal{H}(a,b)$ 且 $\sigma(\mathcal{H}(a,b)) = b\mathcal{H}(a,b)$.

如果没有特别申明，在后文中出现的超指数-超几何函数都在 $\mathcal{S}$ 中.

5.2.2 微分-差分算子环

设 $k(x,n)\langle D_x, S_n\rangle$ 为 $k(x,n)$ 上微分-差分算子环，其中交换法则为，

$$S_nD_x = D_xS_n, \quad D_xf = fD_x + \delta(f), \qquad S_nf = \sigma(f)S_n,$$

对所有 $f \in k(x,n)$ 成立. 在这个环中，我们记 Δ_n 为向前差分算子 $S_n - 1$. 对所有 $s \in \mathcal{S}$, 定义作用: $D_x(s) = \delta(s)$ 和 $S_n(s) = \sigma(s)$. 则 $\mathcal{S}$ 就具有了环 $k(x,n)\langle D_x, S_n\rangle$ 上的左模结构. 设 h 是超指数-超几何函数并其 δ-商和 σ-商分别为 a 和 b. 则此时可积条件 (5.1) 可以改写为 $S_nD_x(h) = D_xS_n(h)$.

两个超指数-超几何函数被称为是在 $k(x,n)$ 上相似的 (*similar*) 如果两函数的比 h_1/h_2 在 $k(x,n)$ 中. 容易验证相似在超指数-超几何函数中是一种等价关系.

引理 5.4. *设 h_1 和 h_2 为 $k(x,n)$ 上超指数-超几何函数. 如果 h_1 和 h_2 是相似的，则*

(i) $h_1 + h_2$ 或者等于零或者与 h_1 相似;

(ii) 对所有 $L \in k(x,n)\langle D_x, S_n\rangle$, $L(h_1)$ 或者等于零或者与 h_1 相似.

证明. 设 $r \in k(x,n)$ 为函数的比 h_1/h_2. 则结论 (i) 由等式 $h_1 + h_2 = (1 + 1/r)h_1$ 得出. 因为 h_1 是 $k(x,n)$ 上超指数-超几何的，所以 h_1 的各阶导数和平移都是和 h_1 相似的. 这样结论 (ii) 由可结论 (i) 导出. ∎

5.2.3 分离多项式

对于非零有理函数 $f \in k(x,n)$，我们分别用 $\mathrm{num}(f)$ 和 $\mathrm{den}(f)$ 记 f 的分子和分母. 并且 $\mathrm{den}(f)$ 和 $\mathrm{num}(f)$ 作为 $k[x,n]$ 中多项式是互素的. 为了给出有理函数分解的标准形式, 我们引入下面定义.

定义 5.1. 多项式 $p \in k[x,n]$ 被称为是分离的 (*split*) 如果 p 可以写成形式 $p_1(x)p_2(n)$，其中 $p_1 \in k[x]$ 且 $p_2 \in k[n]$.

任一给定有理函数 f 总可以分解成 $f_1(x)f_2(n)f_3(x,n)$，其中 $f_1 \in k(x)$, $f_2 \in k(n)$ 且 $\mathrm{num}(f_3)$ 和 $\mathrm{den}(f_3)$ 都没有分离的因子. 我们称乘积 f_1f_2 为 f 的分离部分 (*split part*). 如果分离部分属于 k, 则称 f 的分离部分是平凡的.

计算线性微分和差分方程的有理解的算法由 Abramov 在文章 [3, 8, 4] 中提出. 基于 Abramov 的算法，我们下面来讨论首项系数为分离多项式的线性微分和差分方程的有理解形式.

引理 5.5. 设 L 为 $k[x,n]\langle D_x\rangle$ 或者 $k[x,n]\langle S_n\rangle$ 中的算子，p 为 $k[x,n]$ 中的多项式. 如果 L 的首项系数是分离的，那么 $L(y(x,n))=p$ 在 $k(x,n)$ 中的有理函数解的分母是分离的.

证明. 设 $f\in k(x,n)$ 为 $L(y(x,n))=p$ 的任一有理函数解，且 $q\in k[x,n]$ 为 L 的首项系数. 如果 L 是 $k[x,n]\langle D_x\rangle$ 中算子，$\mathrm{den}(f)$ 的分离性由如下基本事实导出：$\mathrm{den}(f)$ 在 $\overline{k(n)}$ 里的根必定是 q 的根，参见 [3]. 如果 L 是 $k[x,n]\langle S_n\rangle$ 中的算子，则依据计算线性差分方程有理解的分母界的 Abramov 算法 [4] 可知，f 的分母是乘积 $Q(x,n):=q(x,n)q(x,n-1)\cdots q(x,n-d)$ (这里 d 为某有限整数) 的因子. 由此导出 $\mathrm{den}(f)$ 是分离的. ∎

5.3 存在性问题

在数学中，微分和差分问题有时候可以用类似的办法处理. 经常是，一个方面的结果可以相应的在另一方面得到模拟. 在后面讨论中，我们的叙述也反映出微分和差分之间的这种相似性.

作为 Zeilberger 方法在微分-差分混合情形下的推广，Almkvist 和 Zeilberger [15] 提出一种构造如下积分的递归关系的方法

$$H(n):=\int_0^{+\infty} h(x,n)\,dx,$$

这里 $h(x,n)$ 是 $k(x,n)$ 上超指数-超几何函数，并且假设积分在 k 上是有定义的，比如 k 可取为 $\mathbb{C}$. Almkvist–Zeilberger 算法的核心是构造非零算子 $L(n,S_n)\in k(n)\langle S_n\rangle$ 使得

$$L(n,S_n)(h)=D_x(g), \tag{5.2}$$

这里 g 为 $k(x,n)$上的超指数-超几何函数. 算子 $L(n,S_n)$ 被称为 h 关于 x 的差和算子 (*telescoper with respect to* x). 得到差和算子之后，将该算子作用到等式 (5.2) 两边，得出

$$L(n,S_n)(H(n))=g(+\infty,n)-g(0,n).$$

如果 $g(+\infty,n)=g(0,n)$，则 $L(n,S_n)$ 就是积分 $H(n)$ 所满足的递归关系.

上面的想法也可以用来构造和式

$$H(x) := \sum_{-\infty}^{+\infty} h(x,n),$$

所满足的微分方程. 相应的我们构造非零算子 $L(x,D_x) \in k(x)\langle D_x\rangle$ 使得

$$L(x,D_x)(h) = \Delta_n(g), \tag{5.3}$$

这里 g 为 $k(x,n)$上的超指数-超几何函数. 这样的算子 $L(x,D_x)$ 被称为 h 关于 n 的差和算子 (*telescoper with respect to* n). 由引理 5.4 可知，等式 (5.2) 和 (5.3) 中的 g 都是或者为零或者与 h 相似. 至于这两种差和算子的具有体应用参见文章 [15] 的附录或者 Koepf 的书 [54, 第 10-13章].

和离散情形一样，并不是所有的超指数-超几何函数都有关于 x 或 n 的差和算子. 也就是说，仍然需要一种准则来判定 Almkvist–Zeilberger 算法的终止性.

在进入详细讨论之前，我们先给出一个简单的例子以抛砖引玉.

例 5.2. 考虑有理函数

$$f = \frac{1}{x+n}.$$

下面我们证明 f 既没有关于 x 的差和算子也没有关于 n 的差和算子.

微分情形： 我们用反正法. 假设 f 存在关于 x 的差和算子, 即存在非零算子 $L \in k(n)\langle S_n\rangle$ 使得 $L(f) = D_x(g)$ 对某 $g \in k(x,n)$ 成立. 记 $L = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i(n) S_n^i$，其中 $\rho \in \mathbb{N}$ 且 $\ell_i \in k(n)$. 则有

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i(n) S_n^i \left(\frac{1}{x+n}\right) = \sum_{i=0}^{\rho} \left(\frac{\ell_i(n)}{x+n+i}\right) = \frac{A}{D},$$

这里 D 整除关于 x 无平方的多项式 $(x+n)(x+n+1)\cdots(x+n+\rho)$，且 $A \in k(n)[x]$ 满足 $\deg_x(A) < \deg_x(D)$ 和 $\gcd(A,D) = 1$ (作为 $k(n)[x]$ 中的多项式). 因为 $A/D = D_x(g)$，则由引理 4.2 (i) 得出 $A = 0$. 于是 f 是线性差分方程 $L(z) = 0$ 的有理函数解. 由引理 5.5, f 的分母必须是 $k[x,n]$ 中分离多项式因为 L 的首系数是与 x 无关的，但是 $x+n$ 不是分离的，矛盾!

差分情形： 我们用反正法. 假设 f 存在关于 n 的差和算子, 即存在非零算子 $L \in k(x)\langle D_x\rangle$ 使得 $L(f) = \Delta_n(g)$ 对某 $g \in k(x,n)$ 成立. 记 $L = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i(x) D_x^i$，

其中 $\rho \in \mathbb{N}$ 且 $\ell_i \in k(x)$. 则有

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\rho} \ell_i(x) D_x^i \left(\frac{1}{x+n} \right) = \sum_{i=0}^{\rho} \left(\frac{(-1)^i \ell_i(x)}{(x+n)^{i+1}} \right) = \frac{A}{D},$$

这里 D 整除关于 n 无平移的多项式 $(x+n)^{\rho+1}$，且 $A \in k(x)[n]$ 满足 $\deg_n(A) < \deg_n(D)$ 和 $\gcd(A, D) = 1$ （作为 $k(x)[n]$ 中的多项式). 因为 $A/D = \Delta_n(g)$，则由引理 4.2 (ii) 得出 $A = 0$. 于是 f 是线性微分方程 $L(z) = 0$ 的有理函数解. 由引理 5.5, f 的分母必须是 $k[x, n]$ 中的分离多项式因为 L 的首系数是与 n 无关的，但是 $x+n$ 不是分离的，矛盾！

在后面几节中，我们将解决如下问题，即 Almkvist–Zeilberger 算法的终止性问题.

问题 5.2.
给定一个 $k(x, n)$ 上的超指数-超几何函数 $h(x, n)$，判定 h 是否拥有关于 x 或者 n 的差和算子？

5.4 标准表示

在这节中，我们给出超指数-超几何函数的一种标准表示. 该表示是基于 [39, 命题 5]，即定理 4.14 的双变元情形.

引理 5.6. *设 a 和 b 是 $k(x, n)$ 中两个非零有理函数且满足可积条件 (5.1). 则存在分离部分是平凡的有理函数 $f \in k(x, n)$，$\alpha \in k(n)$，和 $\beta, \gamma \in k(x)$ 使得*

$$a = \frac{\delta(f)}{f} + \frac{\delta(\beta(x))}{\beta(x)} n + \gamma(x) \quad 且 \quad b = \frac{\sigma(f)}{f} \alpha(n) \beta(x). \tag{5.4}$$

证明. 由 [39, 性质 5], 存在 $f \in k(x, n)$, $\alpha \in k(n)$, 和 $\beta, \gamma \in k(x)$ 使得 (5.4) 成立. 现在，将 f 写成 $f_1 f_2 f_3$，其中 $f_1 \in k(x)$, $f_2 \in k(n)$, 且 $f_3 \in k(x, n)$ 满足其分离部分在 k 中. 通过将 (5.4)中的 f，γ，和 α 替换为 f_3，$\gamma + \delta(f_1)/f_1$，和 $\alpha \sigma(f_2)/f_2$，引理证毕. ∎

由上引理可以得到双变元超指数-超几何函数的乘性分解，且该分解是唯一的.

命题 5.7. 设 h 是序列空间 S 中的双变元超指数-超几何函数. 则存在分离部分为平凡的有理函数 $f \in k(x, n)$, 分子和分母为首一的 $\alpha \in k(n)$, 和 β, $\gamma \in k(x)$ 使得

$$h \in f(x, n)\beta(x)^n \mathcal{H}(\gamma(x), \alpha(n)). \tag{5.5}$$

此外, 如果

$$h \in f'(x, n)\beta'(x)^n \mathcal{H}(\gamma'(x), \alpha'(n))$$

其中 $f' \in k(x, n)$ 的分离部分是平凡的, $\alpha' \in k(n)$ 的分子分母是首一的, 且 $\beta', \gamma' \in k(x)$, 则 $f/f' \in k$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, 且 $\gamma = \gamma'$.

证明. 假设 a 和 b 分别为 h 关于 x 和 n 的算子商. 由引理 5.6, 存在分离部分是平凡的有理函数 $f \in k(x, n)$, $\alpha \in k(n)$, 和 $\beta, \gamma \in k(x)$ 使得 (5.4). 由简单的计算可知, h 和非零函数 $f\beta^n\mathcal{H}(\gamma, \alpha)$ 具有相同的算子商. 由性质 5.2, (5.5) 成立.

假设 h 属于 $f'(x, y)\beta'(x)^n\mathcal{H}(\gamma'(x), \alpha'(n))$, 并且满足命题叙述中的条件. 则 a 和 b 是集合 $f'(x, y)\beta'(x)^n\mathcal{H}(\gamma'(x), \alpha'(n))$ 中任一非零元的 δ-商和 σ-商. 由此得出

$$\frac{\delta(f)}{f} + \frac{\delta(\beta(x))}{\beta(x)}n + \gamma(x) = \frac{\delta(f')}{f'} + \frac{\delta(\beta'(x))}{\beta'(x)}n + \gamma'(x), \tag{5.6}$$

和

$$\frac{\sigma(f)}{f}\alpha(n)\beta(x) = \frac{\sigma(f')}{f'}\alpha'(n)\beta'(x). \tag{5.7}$$

因为部分分式分解是唯一性的并且 f 和 f'分离部分都是平凡的, 所以等式 (5.6) 导出

$$\frac{\delta(f)}{f} = \frac{\delta(f')}{f'}, \quad \frac{\delta(\beta(x))}{\beta(x)} = \frac{\delta(\beta'(x))}{\beta'(x)}, \quad 和\ \gamma(x) = \gamma'(x).$$

由此, $f = cf'$ 且 $\beta = c'\beta'$, 这里 $c, c' \in k(n)$.

同样的由关于 f 和 f' 的假设可知, c 属于 k. 因为 β 和 β' 是与变元 n 无关的, 所以 c' 也与 n 无关. 由 (5.7) 得出 $\alpha(n) = c'\alpha(n)$. 又因为 $\alpha(n)$ 和 $\alpha'(n)$ 的分子分母是首一的, 所以 $c' = 1$. 证毕. ∎

定义 5.3. 设 $h(x, n) \in \mathcal{H}(a, b)$ 是 $k(x, n)$ 上超指数-超几何函数. 我们称四元组 $(f(x, n), \alpha(n), \beta(x), \gamma(x)) \in k(x, n)^4$ 是 h 的标准表示 (*standard representation*) 如果 f 是 $k(x, n)$ 中分离部分为平凡的有理函数, $\alpha \in k(n)$ 的分子分母是首一的, $\beta, \gamma \in k(x)$, 且等式 (5.5) 成立.

根据文章 [84] 中的定义，称双变元超指数-超几何函数 $h(x,n)$ 是正则的 (*proper*) 如果其标准表示为

$$(p(x,n),\ \alpha(n),\ \beta(x),\ \gamma(x)), \tag{5.8}$$

其中 $p\in k[x,n]$, $\alpha\in k(n)$, 且 $\beta,\gamma\in k(x)$.

命题 5.8. *设 $h\in f(x,n)\beta(x)^n\mathcal{H}(\gamma(x),\alpha(n))$ 满足 $f\in k(x,n)$, $\alpha\in k(n)$, 且 $\beta,\gamma\in k(x)$. 如果 f 的分母是分离的，则 h 是正则的.*

证明. 设 $f=p/q\in k(x,n)$ 满足 $p,q\in k[x,n]$ 且 $\gcd(p,q)=1$. 因为 q 是分离的, 所以存在 $A\in k[x]$ 和 $B\in k[n]$ 使得 $q=A(x)B(n)$. 由推论 5.3 (i)，我们得到

$$h\in p(x,n)\beta(x)^n\mathcal{H}\left(\gamma(x)-\frac{\delta(A(x))}{A(x)},\alpha(n)\frac{B(n)}{\sigma(B(n))}\right).$$

因此，h 是正则的. ∎

5.5 两类加法分解

对于两个变元的超指数-超几何函数 $h(x,n)$, 其中 x 是连续变元; n 是离散变元, 有两种*加法分解*: 一种是关于连续变元得到 $h=D_x(h_1)+h_2$; 另外一种是关于离散变元得到 $h=\Delta_n(h_1)+h_2$. 其中 h_1 和 h_2 是超指数-超几何函数且 h_2 在某种意义下极小. 所有关于加法分解的算法本质上都是 Gosper 算法 [46] 及其微分模拟 [15] 的扩展. 因为如果存在超指数-超几何函数 g, 使得 $h=D_x(g)$ 或 $h=\Delta_n(g)$, 那么算法返回 $h_2=0$. 在本节中, 我们讨论两种加法分解在标准表示下的特殊形式.

令 F 是特征为零的域. 当讨论关于 x 的加法分解时, F 取为 $k(n)$, 否则 F 取为 $k(x)$.

5.5.1 关于 x 的加法分解

Hermite 约化与 Ostrogradsky–Horowitz 算法把有理函数 $f\in F(x)$ 分解成 $f=D_x(g)+r$, 其中 $r=a/b$ 满足 $\deg_x(a)<\deg_x(b)$ 且 b 是无平方的多项式, 也就是, b 的重数极小. 出于两种不同的目的, Davenport [36] 和 Geddes, Le 以及Li [44] 推广了 Hermite 约化: 其一是为了求解 Risch 微分方程

$$D_x(y)+fy=g,\quad 其中\ f,g\in F(x),$$

其二是为了解决超指数函数的加法分解问题. 下面, 我们介绍 Geddes-Le-Li 分解算法. 为此, 先回顾文章 [44] 中的一些定义.

定义 5.4 (GLL 三元组)**.** 设 $u, v \in F[x]$, $w \in F(x)$. 如果它们满足下面的条件:

1. $\gcd(u, v) = 1$;
2. u 关于 x 无平方的;
3. w 关于 x 是微分既约的;
4. $\gcd(u, \mathrm{den}(w)) = 1$,

那么我们称 (u, v, w) 为 *Geddes–Le–Li 三元组*, 简称 *GLL 三元组*.

定义 5.5 (超指数可积)**.** 如果存在关于 x 的超指数函数 g 使得 $h = D_x(g)$, 那么称 h 为*超指数可积的*.

注意到上面定义中的 g 如果存在就必然与 h 相似.

定义 5.6 (关于 x 的加法分解)**.** 设 h 属于 $\mathcal{H}(a, b)$ 其中 $a, b \in F(x)$. h 的关于 x 的加法分解为如下形式

$$h = D_x(h_1) + h_2,$$

其中 h_1 和 h_2 是超指数-超几何的, 并且 h_2 或则等于 0 或则

$$h_2 \in \frac{v}{u} \cdot \mathcal{H}(a_2, b_2), \quad \text{其中 } b_2 \in F(x) \text{ 且 } (u, v, a_2) \text{ 是 GLL 三元组.}$$

这样的分解被称为是完全的 (complete) 如果 h 的超指数可积性蕴含 $h_2 = 0$.

注 4. 事实上, 后面讨论中我们并不需要关于 x 的完全加法分解. 根据 [67, 命题 5.6.2] 中的相同的论证方式, h_1 和 h_2 都与 h 相似.

5.5.1.1 Geddes–Le–Li 算法

我们回顾文章 [44] 中的关于 x 的加法分解算法. 把超指数-超几何函数 $h \in \mathcal{H}(a, b)$ 看作 δ-商为 $a \in F(x)$ 的超指数函数. 令 $(K, S) \in F(x) \times F(x)$ 为 a 的严格 DRNF, K 是关于 x 微分既约的且

$$a = K + \frac{\delta(S)}{S}, \quad \text{其中 } \gcd(\mathrm{den}(K), \mathrm{den}(S)) = 1.$$

从 a 的有理正规形式可以得到 h 的乘性分解, 即,

$$h = S \cdot \tilde{h}, \quad 其中\ \tilde{h} \in \mathcal{H}\left(K, b\frac{S}{\sigma(S)}\right).$$

接下来是所谓的 Hermite-like 约化, 由文章 [44, 定理 2], 则存在 $S_1 \in F(x)$ 满足

$$S = \delta(S_1) + KS_1 + \frac{v}{u \cdot \operatorname{den}(K)^i}, \tag{5.9}$$

其中 $i \in \{0, 1\}$ 且 (u, v, K) 是 GLL 三元组. 因为 $D_x(\tilde{h}) = K\tilde{h}$, 由 (5.9) 中的 S 的分解导出

$$h = D_x(S_1\tilde{h}) + \frac{v}{u \cdot \operatorname{den}(K)^i}\tilde{h}.$$

为了得到 h 的加法分解, 我们需要判断

$$h_2 = \frac{v}{u \cdot \operatorname{den}(K)^i}\tilde{h} \tag{5.10}$$

是不是超指数可积. 超指数可积的必要条件如下.

引理 5.9 (Geddes–Le–Li, 2004). *如果在 (5.10) 中的 h_2 是超几何可积, 那么 u 属于 F, 即关于导数 D_x 是常数.*

证明. 证明见 [44, 定理 4]. ∎

假设 u 属于 F. 那么由 [44, 定理 4] 可知我们只要判断一阶微分方程

$$\frac{v}{u} = D_x(z) + \left(K - \frac{D_x(\operatorname{den}(K)^i)}{\operatorname{den}(K)^i}\right)z \tag{5.11}$$

是否有 $F[x]$ 中的多项式解, 进一步转化为求解 F 上的一个线性方程组. 如果存在 (5.11) 的多项式解 $p \in F[x]$, 那么令 $h_1 = (S_1 + p/\operatorname{den}(K)^i)\tilde{h}$ 且 $h_2 = 0$. 否则 h 的加法分解为

$$h = D_x(h_1) + h_2, \quad 其中\ h_1 = S_1\tilde{h}\ 且\ h_2 = \frac{v}{u \cdot \operatorname{den}(K)^i}\tilde{h}.$$

5.5.1.2 从标准表示中计算关于 x 的加法分解

令 $(f(x,n),\alpha(n),\beta(x),\gamma(x))$ 为 $h\in\mathcal{H}(a,b)$ 的标准表示, 即,

$$h\in f(x,n)\beta(x)^n\mathcal{H}(\gamma(x),\alpha(n)),$$

其中 $f\in k(x,n)$ 分离部分是平凡的, $\alpha\in k(n)$ 具有首一的分子分母, 且 $\beta,\gamma\in k(x)$. 我们说明怎样从 h 的标准表示求它的关于 x 的加法分解.

首先计算 h 的标准表示中 a 的严格 DRNF. 下面的引理可以判定特殊形式的有理函数是否是微分既约的.

引理 5.10. *令 $g\in k(x,n)$ 具有形式*

$$\frac{p}{q}+n\frac{s}{t}+\frac{u}{v},$$

其中 $p,q,s,t,u,v\in k[x]$ 满足 $\gcd(p,q)=\gcd(s,t)=\gcd(u,v)=1$. 假定 $v\mid t$. 那么

(i) g 的分母是 q 和 t 的最小公倍数;

(ii) 如果 p/q 是微分既约的, 那么 g 是微分既约的.

证明. 为了证明第一个论断, 令 M 为 q 和 t 的最小公倍数, $w_1=M/q$, $w_2=M/t$, 且 $w_3=M/v$. $v\mid t$ 意味着 $w_2\mid w_3$. 不仅如此,

$$g=\frac{W}{M},\quad 其中\ W=p\cdot w_1+n\cdot s\cdot w_2+u\cdot w_3.$$

我们断言 $\gcd(W,M)=1$. 如果 w 是 $\gcd(W,M)$ 的不可约因子, 那么 $w\mid\gcd(M,s\cdot w_2)$ 且 $w\mid\gcd(M,p\cdot w_1+u\cdot w_3)$, 因为 n 在 $k(x)$ 上超越. 注意到 $M=q\cdot w_1=t\cdot w_2$ 且 $\gcd(s,t)=\gcd(p,q)=1$, 那么 $\gcd(M,p\cdot w_1)=w_1$ 且 $\gcd(M,s\cdot w_2)=w_2$. 于是 $w\mid w_2$ 且 $w\mid w_3$, 这意味着 $w\mid\gcd(M,p\cdot w_1)=w_1$. 因为 $\gcd(w_1,w_2)=1$, 我们有 $w=1$ 且 $\gcd(W,M)=1$. 所以 M 确实是 g 的分母.

对于第二个断言, 假定对某个 $\ell\in\mathbb{Z}$，w 是 $\gcd(M,W-\ell\cdot\delta(M))$ 的不可约因子. 那么

$$w\mid\gcd(q\cdot w_1,p\cdot w_1+n\cdot s\cdot w_2+u\cdot w_3-\ell\cdot\delta(q\cdot w_1)).$$

类似于上论断的证明, 我们可以证明 $w \mid w_2$, 这意味着 $w \mid w_3$, 因而 $w \mid q$, 否则 $\gcd(W, M)$ 是非平凡的, 与断言一相矛盾. 于是有

$$w \mid \gcd(q \cdot w_1, p \cdot w_1 - \ell \cdot \delta(q) \cdot w_1) = \gcd(q, p - \ell \cdot \delta(q)) \cdot w_1$$

这实际上等于 w_1, 因为 p/q 是微分既约的. 如此一来我们有 $\gcd(w_1, w_2) = 1$, 即 $w = 1$. 证毕. ∎

我们回顾在文章 [13, 第 533 页] 中用到的 *pump* 的定义.

定义 5.7 (Pump)**.** 设 $p, q \in F[x]$ 并满足 $p \mid q$. q 的因子 $\tilde{p}$ 被称为 p 的在 q 中的 *pump* 如果 $\gcd(q/\tilde{p}, \tilde{p}) = 1$, $p \mid \tilde{p}$, 并且 $\tilde{p}$ 的任意不可约因子整除 p.

对有理函数 $f \in k(x, n)$, 用 f^* 表示 $\mathrm{num}(f) \cdot \mathrm{den}(f)$ 的无平方部分. 从定义可以看出多项式与它的 pump 有同样的无平方部分. 我们下面介绍如何从 $\gamma(x)$ 的严格 DRNF 中得到 $a(x, n)$ 的严格 DRNF.

引理 5.11. *设 $(f(x, n), \beta(x), \gamma(x), \alpha(n))$ 为超指数-超几何函数 $h \in \mathcal{H}(a, b)$ 的标准表示. 如果 $(\tilde{K}, \tilde{S})$ 是 γ 的严格DRNF, 那么存在多项式 $T \in k[x]$ 满足 T 整除 $\tilde{S}$ 的分母使得*

$$\left(\tilde{K} + n \cdot \frac{\delta(\beta)}{\beta} - \frac{\delta(T)}{T},\ f \cdot \tilde{S} \cdot T\right) \tag{5.12}$$

是 a 关于 x 的严格 DRNF.

证明. 令 $(\tilde{K}, \tilde{S})$ 为 $\gamma(x)$ 的严格 DRNF. 那么由定义知

$$a = \frac{\delta(f)}{f} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta} + \gamma = \frac{\delta(f)}{f} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta} + \frac{\delta(\tilde{S})}{\tilde{S}} + \tilde{K}.$$

令 $u = \gcd(\mathrm{den}(\tilde{S}), \beta^*)$ 且 T 是 u 的在 $\mathrm{den}(\tilde{S})$ 中的 pump. 那么我们断言具有形式 (5.12) 的二元组 (K, S) 是 a 的关于 x 的严格 DRNF. 注意到 $\delta(\beta)/\beta$ 和 $\delta(T)/T$ 的分母分别为 β^* 和 T^*. 根据 pump 的定义和 $u \mid \beta^*$, u 是 T 的无平方部分, 意味着 $T^* \mid \beta^*$. 根据引理 5.10 (ii) 可知, K 是微分既约的.

下面只要证明 $\gcd(\mathrm{den}(K), \mathrm{den}(S)) = 1$. 由引理 5.10 (i) 可知, $\mathrm{den}(K) = \mathrm{lcm}(\beta^*, \mathrm{den}(\tilde{K}))$. 由 pump 的定义可得 $\mathrm{den}(\tilde{S}) = T \cdot w$ 其中 $w \in k[x]$ 且

$\gcd(w,T) = 1$. 另一方面因为 $\operatorname{num}(f)\cdot\operatorname{den}(f)$ 在 $k[x]$ 中无平凡因子, 所以 $\operatorname{den}(S) = \operatorname{den}(f)\cdot\operatorname{den}(\tilde{S}T) = \operatorname{den}(f)\cdot w$. 同样道理

$$\gcd(\operatorname{den}(K),\operatorname{den}(S)) = \gcd(\operatorname{den}(K),\operatorname{den}(f)\cdot w) = \gcd(\operatorname{den}(K),\, w).$$

由 u 和 w 的定义, $\gcd(\beta^*, w) = 1$. 因为 $(\tilde{K},\,\tilde{S})$ 是 γ 的严格 DRNF 且 w 是 $\operatorname{den}(\tilde{S})$ 的因子, 所以 $\gcd(\operatorname{den}(\tilde{K}), w) = 1$. 于是 $\gcd(\operatorname{den}(K),\,\operatorname{den}(S)) = 1$. 所以断言成立. ∎

我们将 Geddes–Le–Li 算法应用于具有标准表示的超指数-超几何函数上，并得到关于 x 的加法分解的特殊形式.

定理 5.12. *设 $(f(x,n),\alpha(n),\beta(x),\gamma(x))$ 为超指数-超几何函数 $h\in\mathcal{H}(a,b)$ 的标准表示. 则存在超指数-超几何函数 h_1 和 $\tilde{\gamma}(x)\in k(x)$ 使得*

$$h - D_x(h_1) \in \frac{v}{u}\cdot\mathcal{H}\left(\tilde{\gamma} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta},\, \beta\alpha\right) \tag{5.13}$$

其中 u, v 属于 $k(n)[x]$ 且 $(u, v, \tilde{\gamma} + n\delta(\beta)/\beta)$ 是GLL 三元组.

证明. 根据引理 5.11, h 的 δ-商为 a, 且具有严格 DRNF (K,S) 形式为

$$\left(\tilde{K} + n\cdot\frac{\delta(\beta)}{\beta} - \frac{\delta(T)}{T},\ f\cdot\tilde{S}\cdot T\right),$$

其中 $(\tilde{K},\tilde{S})$ 是 $\gamma(x)$ 的严格 DRNF且 $T\in k[x]$. 由此导出 h 的乘性分解,

$$h = S\tilde{h},\quad 其中\ \tilde{h}\in\mathcal{H}(K,\beta\alpha).$$

由 Hermite-like 约化, S 可以分解为

$$S = \delta(S_1) + S_1K + \frac{v}{u\operatorname{den}(K)^i},$$

其中 $i\in\{0,1\}$, $S_1\in k(x,n)$ 且 (u,v,K) 是 GLL 三元组. 于是有

$$h = D_x(S_1\tilde{h}) + \frac{v}{u\operatorname{den}(K)^i}\tilde{h}.$$

因为 $\operatorname{den}(K) = \mathrm{l}cm(\beta^*,\operatorname{den}(\tilde{K}))$ 且 $\operatorname{den}(K)$ 属于 $k[x]$ 所以

$$\begin{aligned}\frac{v}{u\operatorname{den}(K)^i}\mathcal{H}(K,\beta\alpha) &= \frac{v}{u}\mathcal{H}\left(K - \frac{\delta(\operatorname{den}(K)^i)}{\operatorname{den}(K)^i},\beta\alpha\frac{\operatorname{den}(K)^i}{\sigma(\operatorname{den}(K)^i)}\right)\\ &= \frac{v}{u}\mathcal{H}\left(K - \frac{\delta(\operatorname{den}(K)^i)}{\operatorname{den}(K)^i},\beta\alpha\right).\end{aligned}$$

记 $h_1 = S_1\tilde{h}$ 和 $\tilde{\gamma} = \tilde{K} - \frac{\delta(T)}{T} - \frac{\delta(\mathrm{den}(K)^i}{\mathrm{den}(K)^i}$ 我们得到 (5.13). 下面只要证明 $\left(u, v, \tilde{\gamma} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta}\right)$ 是 GLL 三元组. 注意到

$$a_2 := \tilde{\gamma} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta} = K - \frac{\delta(\mathrm{den}(K)^i}{\mathrm{den}(K)^i}.$$

因为 K 是微分既约的, 所以根据定义 a_2 也是微分既约的. 不仅如此, 因为 u 和 $\mathrm{den}(K)$ 互素, 所以 u 和$\mathrm{den}(a_2)$ 关于 x 是互素的. 于是 (u, v, a_2) 是 GLL 三元组. 证毕. ∎

注 5. 关于 x 的加法分解可以由在文章 [44] 中的算法 `ReducedCert` 计算.

5.5.2 关于 n 的加法分解

在离散情形, 在 [2, 4, 68, 63] 中的算法把有理函数 $f \in F(n)$ 分解为 $f = \Delta_n(g) + r$, 其中 $r = a/b$ 满足 $\deg_n(a) < \deg_n(b)$ 和 b 是关于 n 无平移的多项式, 也就是 b 的差量 (dispersion) 是极小的 [2]. 这些分解算法被 Abramov 和 Petkovšek [11, 13] 推广到超几何情形. 他们的算法本质上扩展了 Gosper 算法 [46], 即可以判定超几何项的不定和式是否是超几何的. 更精确地讲, 对给定的在 $F(n)$ 上的超几何项 $H(n)$, Abramov 和 Petkovšek 算法计算两个超几何项 $H_1(n)$ 和 $H_2(n)$ 使得 $H(n) = \Delta_n(H_1(n)) + H_2(n)$, 其中 H_2 在某种意义下极小. 特别地, 如果 $H(n)$ 是超几何可加的, 那么 H_2 等于零. 我们下面介绍 Abramov 和 Petkovšek 的算法. 为此, 先回顾文章 [13] 中的一些定义.

定义 5.8 (AP 三元组)**.** 设 $u, v \in F[n]$, $w \in F(n)$. 如果他们满足下列条件:

1. $\gcd(u, v) = 1$;
2. u 关于 n 是无平移的;
3. w 关于 n 是平移既约的;
4. 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$, 有 $\gcd(u, \sigma^{-\ell}(\mathrm{num}(w))) = \gcd(u, \sigma^{\ell}(\mathrm{den}(w))) = 1$.

我们把 (u, v, w) 称为 *Abramov–Petkovšek 三元组*, 简称 *AP 三元组*.

定义 5.9 (超几何可加)**.** 对于 $F(n)$ 上的超几何项 h, 如果存在 g 使得 $h = \Delta_n(g)$, 那么我们称 h 为超几何可加的.

注意到如果上述定义中 g 存在, 那么它必然与 h 相似.

定义 5.10 (关于 n 的加法分解). 设 h 属于 $\mathcal{H}(a,b)$, 这里 $a, b \in F(n)$. h 的关于 n 的加法分解为如下形式

$$h = \Delta_n(h_1) + h_2,$$

其中 h_1 和 h_2 是超指数-超几何的, 并且 h_2 或则等于 0 或则

$$h_2 \in \frac{v}{u} \cdot \mathcal{H}(a_2, b_2), \quad \text{其中 } a_2 \in F(n) \text{ 且} (u, v, b_2) \text{ 是AP 三元组.}$$

这样的分解被称为是完全的 (complete) 如果 h 的超几何可加性蕴含 $h_2 = 0$.

注 6. 事实上, 后面讨论中我们并不需要关于 n 的完全加法分解. 根据 [67, 命题 5.6.2] 中的相同的论证方式, h_1 和 h_2 都与 h 相似.

5.5.2.1 Abramov–Petkovšek 算法

我们回顾文章 [11, 13] 中的关于 n 的加法分解算法. 把超指数-超几何函数 $h \in \mathcal{H}(a,b)$ 看作 σ-商为 $b \in F(n)$ 的超几何项. 令 $(K, S) \in F(n) \times F(n)$ 为 b 的严格 SRNF, 即K 是关于 n 平移既约的且

$$b = K \cdot \frac{\sigma(S)}{S},$$

其中 $\gcd(\mathrm{num}(K), \sigma(\mathrm{den}(S)) \cdot \mathrm{num}(S)) = \gcd(\mathrm{den}(K), \sigma(\mathrm{num}(S)) \cdot \mathrm{den}(S)) = 1$.

由 b 的有理正规形式, 我们可以导出 h 的乘性分解, 即

$$h = S \cdot \tilde{h}, \quad \text{其中 } \tilde{h} \in \mathcal{H}\left(a - \frac{\delta(S)}{S}, K\right).$$

下面就是 Abramov–Petkovšek 约化, 由 [13, 引理 9] 可知, 存在 $S_1 \in F(n)$ 使得

$$S = \sigma(S_1)K - S_1 + \frac{v}{u \cdot (\sigma^{-1}(k_1))^i \cdot k_2^j}, \tag{5.14}$$

其中 $i, j \in \{0, 1\}$, k_1 且 k_2 分别为 K 的分子和分母, 且 (u, v, K) 是 AP 三元组. 因为 $S_n(\tilde{h}) = K\tilde{h}$, S 在 (5.14) 中的分解进一步得出

$$h = \Delta_n(S_1\tilde{h}) + \frac{v}{u \cdot (\sigma^{-1}(k_1))^i \cdot k_2^j}\,\tilde{h}.$$

为了得到 h 的加法分解, 我们仍需判断

$$h_2 = \frac{v}{u \cdot (\sigma^{-1}(k_1))^i \cdot k_2^j}\,\tilde{h} \tag{5.15}$$

是否是超几何可加的. 一个必要条件如下:

引理 5.13 (Abramov–Petkovšek, 2002). *如果在 (5.15) 中的 h_2 是超几何可加的, 那么 u 属于 F.*

证明. 证明见 [13, 定理 11]. ∎

假定 u 属于 F. 那么文章 [13, 定理 11] 表明接下来我们只要判断一阶差分方程

$$\frac{v}{u} = K\frac{w}{\sigma(w)} \cdot S_n(z) - z, \quad 其中\ w = (\sigma^{-1}(k_1))^i \cdot k_2^j, \tag{5.16}$$

是否有 $F[n]$ 中的多项式解, 这进一步转化为求解 F 上的线性系统. 如果存在 (5.16) 的多项式解 $p \in F[n]$, 那么设 $h_1 = (S_1 + p/w)\tilde{h}$ 和 $h_2 = 0$. 否则 h 的加法分解为

$$h = D_x(h_1) + h_2, \quad 其中\ h_1 = S_1\tilde{h}\ 且\ h_2 = \frac{v}{u \cdot w}\tilde{h}.$$

5.5.2.2 从标准表示中计算关于 n 的加法分解

设 $(f(x,n), \alpha(n), \beta(x), \gamma(x))$ 为 $h \in \mathcal{H}(a,b)$ 的标准表示. 我们说明如何由 h 的标准表示得到它的关于 n 的加法分解.

下个引理把 h 的 σ-商 b 的严格 SRNF 和它的标准表示联系起来.

引理 5.14. *设 $(f(x,n), \beta(x), \gamma(x), \alpha(n))$ 为超指数-超几何函数 $h \in \mathcal{H}(a,b)$ 的标准表示. 如果 $(\tilde{K}, \tilde{S})$ 是 $\alpha(n)$ 的关于 n 的严格 SRNF, 那么 $(\beta\tilde{K}, f\tilde{S})$ 是 h 的 σ-商 b 的严格 SRNF.*

证明. 因为 $(\tilde{K}, \tilde{S})$ 是 $\alpha(n)$ 的严格 SRNF, $\alpha = \tilde{K}\sigma(\tilde{S})/\tilde{S}$. 于是

$$b = \frac{\sigma(h)}{h} = \beta\alpha\frac{\sigma(f)}{f} = \beta\left(\tilde{K}\frac{\sigma(\tilde{S})}{\tilde{S}}\right)\frac{\sigma(f)}{f} = \beta\tilde{K} \cdot \frac{\sigma(f\tilde{S})}{f\tilde{S}}.$$

这里乘积 $\beta\tilde{K}$ 是关于 n 平移既约的, 因为 $\tilde{K}$ 是平移既约的且 β 属于 $k(x)$. 记 $K = k_1/k_2$ 和 $S = s_1/s_2$ 满足在 $k[x,n]$ 中 $\gcd(k_1,k_2) = \gcd(s_1,s_2) = 1$. 剩下来的任务是验证 GCD 条件

$$\gcd(k_1, \sigma(s_2)s_1) = \gcd(k_2, \sigma(s_1)s_2) = 1 \tag{5.17}$$

其中 (K, S) 满足 $K = \beta\tilde{K}$ 且 $S = f\tilde{S}$. 因为 $\beta \in k(x)$ 和 $\tilde{K} \in k(n)$, 我们有

$$k_1 = \mathrm{num}(\beta) \cdot \mathrm{num}(\tilde{K}) \quad 且 \quad k_2 = \mathrm{den}(\beta) \cdot \mathrm{den}(\tilde{K}).$$

同样地因为 $\tilde{S} \in k(n)$ 和 f 有平凡的分离部分, 我们有

$$s_1 = \operatorname{num}(f) \cdot \operatorname{num}(\tilde{S}), \quad 且 \quad s_2 = \operatorname{den}(f) \cdot \operatorname{den}(\tilde{S}).$$

因为 $(\tilde{K}, \tilde{S})$ 是严格 SRNF, 且在 $k[n]$ 中的任意非零多项式与 $\operatorname{num}(f)$ 和 $\operatorname{den}(f)$ 都是互素的，所以条件 (5.17) 成立. 证毕. ∎

我们将 Abramov–Petkovšek 算法应用于具有标准表示的超指数-超几何函数上，并得到关于 n 的加法分解的特殊形式.

定理 5.15. *设 $(f(x,n), \beta(x), \gamma(x), \alpha(n))$ 为超指数-超几何函数 $h \in \mathcal{H}(a,b)$ 的标准表示. 那么存在 $\tilde{\gamma}(x) \in k(x)$, $\tilde{\alpha} \in k(n)$, 和超指数-超几何函数 h_1 使得*

$$h - \Delta_n(h_1) \in \frac{v}{u} \cdot \mathcal{H}\left(\tilde{\gamma} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta}, \beta\tilde{\alpha}\right)$$

其中 $u, v \in k(x)[n]$ 且 $(u, v, \beta\tilde{\alpha})$ 是 AP 三元组.

证明. 由引理 5.14, h 的 σ-商 b 有严格 SRNF (K, S) 形式为

$$\left(\beta\tilde{K}, f\tilde{S}\right),$$

其中 $(\tilde{K}, \tilde{S})$ 为 $\alpha(n)$ 的严格 SRNF. 这导出 h 的乘性分解,

$$h = S\tilde{h}, \quad 其中\ \tilde{h} \in \mathcal{H}(\gamma + n\frac{\delta(\beta)}{\beta}, K).$$

记 $K = k_1/k_2$ and $S = s_1/s_2$ 满足在 $k[x,n]$ 中 $\gcd(k_1,k_2) = \gcd(s_1,s_2) = 1$. 现在, 运用 Abramov–Petkovšek 约化 [13] 把 S 分解为

$$S = \delta(S_1)K - S_1 + \frac{v}{u(\sigma^{-1}(k_1))^i k_2^j},$$

其中 $i, j \in \{0, 1\}$, $S_1 \in k(x,n)$ 和 (u, v, K) 是 AP 三元组. 于是

$$h = \Delta_n(S_1\tilde{h}) + \frac{v}{u(\sigma^{-1}(k_1))^i k_2^j}\tilde{h}.$$

令 $T = (\sigma^{-1}(k_1))^i k_2^j \in k[x,n]$. 注意到 $K = \beta(x)\tilde{K}(n)$ 的变元是分开的. 所以多项式 T 在 $k[x,n]$ 中是分离的. 由引理 5.3, 我们有

$$\frac{v}{u \cdot T}\tilde{h} \in \frac{v}{u \cdot T}\mathcal{H}(\gamma + n\frac{\delta(\beta)}{\beta}, K) = \frac{v}{u}\mathcal{H}\left(\gamma + n\frac{\delta(\beta)}{\beta} - \frac{\delta(T)}{T}, K\frac{T}{\sigma(T)}\right).$$

令 $h_1 = S_1\tilde{h}$, $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\delta(T)}{T}$, 和 $\tilde{\alpha} = \tilde{K}\frac{T}{\sigma(T)}$. 因为 T 是分离的, $\gamma \in k(x)$, 且 $\tilde{K} \in k(n)$, 我们得到 $\tilde{\gamma} \in k(x)$ 且 $\tilde{\alpha} \in k(n)$ 成立. 下面只要证明 $(u, v, \beta\tilde{\alpha})$ 是 AP 三元组.

我们只需要验证定义 5.8 中的最后两个条件. 因为 $i, j \in \{0, 1\}$, $\beta\tilde{\alpha}$ 属于集合

$$\left\{\frac{k_1}{k_2}, \frac{\sigma^{-1}(k_1)}{k_2}, \frac{k_1}{\sigma(k_2)}, \frac{\sigma^{-1}(k_1)}{\sigma(k_2)}\right\}.$$

且 $K = k_1/k_2$ 是平移既约的，所以 $\beta\tilde{\alpha}$ 是平移既约的. 注意到 $\beta\tilde{\alpha}$ 的分子和分母是只是 K 的分子分母的平移. 所以最后的 GCD 条件由 u 和 k_1, k_2 的相应性质得到. ∎

注 7. 关于 n 的加法分解可以基于文章 [13] 中的算法 `dterm` 来计算.

5.5.3 算子作用下的加法分解

在这节中，我们分别将 $k(x)\langle D_x\rangle$ 和 $k(n)\langle S_n\rangle$ 中算子作用到超指数-超几何函数关于 n 和 x 的加法分解上去，并证明这种特殊作用和分解本身过程是可交换的. 为此，我们先准备一些简单的引理.

引理 5.16. *设 u 和 v 在 $k(x)[n]$ 中并且 w 是 u^m 的因子，其中 $m \in \mathbb{N}$. 则*

(i) 如果 u 是关于 n 无平移的，那么 w 也如此;

(ii) 对任何 $i \in \mathbb{Z}$, 如果 $\gcd(u, \sigma^i(v)) = 1$，那么 $\gcd(w, \sigma^i(v)) = 1$.

证明. 由定义，一个 $k(x)[n]$ 中的多项式是关于 n 无平移的当且仅当任意该多项式的两不同根相差都不是整数 [2]. 由此事实便导出结论 (i). 对任何 $i \in \mathbb{Z}$，如果 $\gcd(u, \sigma^i(v)) = 1$, 则对所有 $m \in \mathbb{N}$，$\gcd(u^m, \sigma^i(v)) = 1$，这导出 $\gcd(w, \sigma^i(v)) = 1$. 所以结论 (ii) 也成立. ∎

命题 5.17. *与定理 5.12 中的记号一样, 假定 $h_2 = h - D_x(h_1)$, 且 L 属于 $k(n)\langle S_n\rangle$ 满足 $L(h_2)$ 非零. 令*

$$A_2 = \tilde{\gamma} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta} - \rho\frac{\delta(\mathrm{den}(\beta))}{\mathrm{den}(\beta)} \quad 和 \quad B_2 = \beta\alpha,$$

其中 ρ 表示 L 的次数. 那么

$$L(h_2) \in \frac{V}{U}\mathcal{H}(A_2, B_2)$$

其中 $U, V \in k(n)[x]$, 且 $(U,\ V,\ A_2)$ 是一个 GLL 三元组.

证明. 令 $a_2 = \tilde{\gamma} + n\delta(\beta)/\beta$. 得到 $A_2 = a_2 - \rho\delta(\operatorname{den}(\beta))/\operatorname{den}(\beta)$. 根据定理 5.12, $h_2 \in \frac{v}{u} \cdot \mathcal{H}\left(a_2,\, B_2\right)$. 通过简单计算

$$L(h_2) = \frac{v'}{u' \operatorname{den}(\beta)^{\rho}} \cdot \mathcal{H}\left(a_2,\, B_2\right),$$

其中 $v' \in k(n)[x]$ 和 u' 是 u, $S_n(u)$, $\ldots$, $S_n^{\rho}(u)$ 在 $k(n)[x]$ 中的最小公倍数. 因为 u 关于 x 是无平方的, 所以它的任何平移也都是无平方的. 因此, u' 是关于 x 是无平方的. 令

$$U = \operatorname{den}(v'/u') \quad \text{且} \quad V = \operatorname{num}(v'/u').$$

那么 $L(h_2) = (V/U) \cdot \mathcal{H}(A_2, B_2)$.

下面只要证明 (U, V, A_2) 是 GLL 三元组. 首先, 按照定义 U 和 V 是互素的. 其次, 因为 u' 关于 x 是无平方的, 所以 U 关于 x 是无平方的. 注意到 $\operatorname{den}(\beta)\operatorname{num}(\beta)$ 的无平方部分是 $\delta(\beta)/\beta$ 的分母, 同时 $\operatorname{den}(\beta)$ 的无平方部分是 $\rho\delta(\operatorname{den}(\beta))/\operatorname{den}(\beta)$ 的分母, 它整除前面一个分母. 由此观察, 下面我们可以应用引理 5.10. 由引理 5.10 (ii) 得出, A_2 是微分既约的因为 $\tilde{\gamma}$ 是微分既约的.

最后我们验证 U 和 $\operatorname{den}(A_2)$ 在 $k(n)$ 上是互素的. 由引理 5.10 (i) 可知, $\operatorname{den}(a_2) = \operatorname{den}(A_2)$. 因为 (u, v, a_2) 是 GLL 三元组, 所以 $\gcd(u, \operatorname{den}(a_2)) = 1$. 又因为 $\operatorname{den}(a_2) \in k[x]$, 所以对所有 $i \in \mathbb{N}$,

$$\gcd\left(S_n^i(u), \operatorname{den}(a_2)\right) = 1$$

因此, $\gcd(u', \operatorname{den}(a_2) = 1$. 于是得到结论 $\gcd(U, \operatorname{den}(a_2)) = 1$, 即 $\gcd(U, \operatorname{den}(A_2)) = 1$. ∎

命题 5.18. *与定理 5.15 中的记号一样, 假定 $h_2 = h - \Delta_n(h_1)$, 且 L 属于 $k(x)\langle D_x\rangle$ 满足 $L(h_2)$ 非零. 记*

$$A_2 = \tilde{\gamma} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta} \quad \text{和} \quad B_2 = \beta\tilde{\alpha}.$$

那么

$$L(h_2) \in \frac{V}{U} \cdot \mathcal{H}\left(A_2,\, B_2\right)$$

其中 $U, V \in k(x)[n]$, 且 (U, V, B_2) 是 AP 三元组.

证明. 通过直接的计算可以导出 $L(h_2) = (V/U) \cdot \mathcal{H}(A_2, B_2)$ 其中 $U, V \in k(x)[n]$ 满足 $\gcd(U, V) = 1$. 由定理 5.15可知, 多项式 $\mathrm{den}(A_2)$ 在 $k[x]$ 中. 因此 $U \in k(x)[n]$ 是 u 的某幂次的因子. 由引理 5.16, (U, V, B_2) 是 AP 三元组因为 (u, v, B_2) 是 AP 三元组. ∎

5.6 两个存在准则

由文章 [84] 中的基本定理 (Fundamental theorem) 可知正则超指数-超几何函数总存在差和算子. 然而正则性只是充分条件. 例如, 有理函数 $f = 1/(x+n)^2$ 是非正则的, 但是因为 $f = D_x(-1/(x+n))$, 它仍然有关于 x 的差和算子. 另一方面例子 5.2 说明并非所有的超指数-超几何函数都有差和算子. 在本节中, 我们在给出差和算子存在的充分必要条件.

定理 5.19. *设 h 为 $k(x, n)$ 上的超指数-超几何函数且 $h = D_x(h_1) + h_2$ 为 h 的关于 x 的加法分解. 那么 h 有关于 n 的差和算子当且仅当 h_2 或者为零或者是正则的.*

定理 5.20. *设 h 为 $k(x, n)$ 上的超指数-超几何函数且 $h = \Delta_n(h_1) + h_2$ 为 h 的关于 n 的加法分解. 那么 h 有关于 x 的差和算子当且仅当 h_2 或者为零或者是正则的.*

定理的证明分成两部分: 一部分是关于必要性, 另外一部分是关于充分性.

5.6.1 从存在性到正则性

下面的引理说明 h 的存在性问题等价于 h_2 的存在性问题. 证明采用了与 [9, 第 3 页] 中相同的论证.

引理 5.21. *令 h, h_1 和 h_2 为序列环 $\mathcal{S}$ 中的超指数-超几何函数.*

(*i*) *假定 $h = D_x(h_1) + h_2$. 那么 h 有关于 x 的差和算子当且仅当 h_2 有关于 x 的差和算子.*

(*ii*) *假定 $h = \Delta_n(h_1) + h_2$. 那么 h 有关于 n 的差和算子当且仅当 h_2 有关于 n 的差和算子.*

此外, h 关于 x (关于 n) 的差和算子就是 h_2 关于 x (关于 n) 的差和算子.

证明. 由 $L(n,S_n)\in k(n)\langle S_n\rangle$ 和 D_x 的交换性, 我们有等式

$$L(n,S_n)(h)=D_x(g)\quad\Leftrightarrow\quad L(n,S_n)(h_2)=D_x(g-L(h_1)).$$

这就证明了第一个论断. 同样地, 第二个论断可以由 $L(x,D_x)\in k(x)\langle D_x\rangle$ 和 Δ_n 的交换性得到. ∎

5.6.1.1 定理 5.19 必要条件的证明

证明. 假定 h 有关于 x 的差和算子, 且 h_2 非零. 我们目标是证明 h_2 是正则的. 由定理 5.12,

$$h_2=\frac{v}{u}H\quad \text{对某一 } H\in\mathcal{H}(a_2,b_2)\,,$$

其中 $b_2=\beta(x)\alpha(n)$, 且 (u,v,a_2) 是 GLL 三元组. 不失一般性, 我们进一步假定 u 属于 $k[x,n]$. 为了证明 h_2 是正则的, 只要证明 u 是分离的. 令 $L\in k(n)\langle S_n\rangle$ 是 h 的关于 x 的差和算子. 由引理 5.21, L 也是 h_2 的关于 x 的差和算子. 那么存在超指数-超几何函数 g 使得

$$L(h_2)=L\left(\frac{v}{u}H\right).$$

因为 b_2 是分离的, 直接计算得到

$$L(h_2)=M\left(\frac{v}{u}\right)H \tag{5.18}$$

其中 $M\in k(n,x)\langle S_n\rangle$ 是分零算子且它的系数是分离的. 另一方面, 命题 5.17 蕴含

$$L(h_2)\in\frac{V}{U}\mathcal{H}(A_2,B_2). \tag{5.19}$$

其中 U 和 V 都属于 $k(x)[n]$, 且 (U,V,A_2) 是 GLL 三元组. 因为 $L(h)$ 和 $D_x(L(h_1))$ 都是超指数可积的, 所以 $L(h_2)$ 也是超指数可积的. 由引理 5.9 知 U 与 x 无关.

根据命题 5.17, $A_2=a_2-\rho\delta(\operatorname{den}(\beta))/\operatorname{den}(\beta)$ 且 $B_2=b_2$, 其中 ρ 表示 L 的阶数. 由 (5.19) 和 $\operatorname{den}(\beta)\in k[x]$ 得出

$$L(h_2)\in\frac{V}{U\operatorname{den}(\beta)^\rho}\mathcal{H}(a_2,b_2),$$

再加上 (5.18) 和 $\mathcal{H}(a_2,b_2)=\{cH\mid c\in k\}$, 可知

$$M\left(\frac{v}{u}\right)=\frac{cV}{U\operatorname{den}(\beta)^\rho}\quad\text{对某一 } c\in k.$$

因此存在非零算子 $M' \in k[x,n]\langle S_n\rangle$ 并首系数属于 $k[n]$ 和有理函数 $g \in k(x)$ 满足 $M'(gv/u)$ 属于 $k[x,n]$. 由引理 5.5 知 u 是分离的, 因此 h_2 是正则的. ∎

5.6.1.2 定理 5.20 的必要条件的证明

证明. 假定 h 有关于 n 的差和算子, 且 h_2 是非零的. 我们要证明 h_2 是正则的. 根据定理 5.15,

$$h_2 = \frac{v}{u}H \quad 对某一 h \in \mathcal{H}\left(a_2, b_2\right),$$

其中 $a_2 = \tilde{\gamma} + n\frac{\delta(\beta)}{\beta}$ 对于 $\tilde{\gamma} \in k(x)$, 且 (u, v, b_2) 是 AP 三元组. 不失一般性, 我们进一步假定 u 属于 $k[x,n]$. 为了证明 h_2 是正则的, 只要证明 u 是分离的.

令 $L \in k(x)\langle D_x\rangle$ 为 h 的关于 n 的差和算子. 由引理 5.21, L 也是 h_2 的关于 n 的差和算子. 那么存在超指数-超几何函数 g 使得

$$L(h_2) = L\left(\frac{v}{u}H\right).$$

对所有 $i \in \mathbb{N}$. 令 f_i 是 $k(x,n)$ 中的有理函数满足

$$D_x^i(H) = f_i H.$$

因为 $\mathrm{den}(a_2)$ 属于 $k[x]$, 所以 $\mathrm{den}(f_i)$ 属于 $k[x]$. 根据 Leibniz 公式, 存在 $M_i \in k(x)[n]\langle D_x\rangle$ 满足

$$D_x^i(h_2) = M_i\left(\frac{v}{u}\right)H.$$

不仅如此, M_i 的首系数属于 k. 因而, 存在 $M \in k(x)[n]\langle D_x\rangle$ 并其首系数属于 $k(x)$ 满足

$$L(h_2) = M\left(\frac{v}{u}\right)H. \tag{5.20}$$

另一方面, 命题 5.18 和 $\mathcal{H}(a_2, b_2) = \{cH \mid c \in k\}$ 导出,

$$L(h_2) = \frac{V}{U}H. \tag{5.21}$$

其中 U 和 V 属于 $k(x)[n]$, 且 (U, V, b_2) 是 AP 三元组. 因为 $L(h)$ 和 $L(h_1)$ 都是超几何可加的, 所以 $L(h_2)$ 也是超几何可加的. 由引理 5.13 知, U 与 n 无关.

比较 (5.20) 和 (5.21), 得到 $M(v/u) = V/U$ 属于 $k(x)[n]$. 存在非零算子 $M' \in k[x,n]\langle D_x\rangle$ 并其首系数属于 $k[x]$ 满足 $M'(v/u)$ 属于 $k[x,n]$. 由引理 5.5 知, u 是分离的, 所以 h_2 是正则的. ∎

5.6.2 从正则性到存在性

Wilf 和 Zeilberger 给出了正则的多变元超几何项的差和算子存在性的证明 [84, 定理 3.1], 并提示他们的论证方法对于连续-离散的情形仍然有效. 下面我们将给出详细的证明.

定理 5.22. *如果 $h(x,n)$ 是 $k(x,n)$ 上的正则超指数-超几何函数, 那么 h 有关于 n 的和关于 x 的差和算子.*

5.6.2.1 预备引理

在证明定理之前我们先来看一些引理.

引理 5.23. *令 $h(x,n) \in \mathcal{H}(a,b)$ 为 $k(x,n)$ 上的超指数-超几何函数.*

(i) 如果 h 有关于 n 的差和算子, 那么对任一满足 $\Delta_n(H)=0$ 的超指数-超几何函数 H, 乘积 $H(x)h(x,n)$ 也有关于 n 的差和算子.

(ii) 如果 h 有关于 x 的差和算子, 那么任一满足 $\Delta_x(H)=0$ 的超指数-超几何函数 H, 乘积 $H(n)h(x,n)$ 也有关于 x 的差和算子.

证明. 令 H 为 $\mathcal{H}(a,1)$ 中非零元素. 那么由可积条件 (5.1), a 属于 $k(x)$. 可以直接验证 $HD_x(h)=(D_x-a)h$, 再加上简单的归纳得到,

$$HD_x^i(h)=(D_x-a)^i(Hh) \quad \text{对所有 } i\in\mathbb{N}.$$

设 $L\in k(x)\langle D_x\rangle$ 为 h 的差和算子. 根据上面的等式,

$$HL(h)=M(Hh)$$

其中 M 由将 L 中 D_x^i 替换成 $(D_x-a)^i$ 得到. 因为存在超指数-超几何函数 g 满足 $L(h)=\Delta_n(g)$ 且 $\Delta_n(H)=0$, 上面的等式蕴含着

$$M(Hh)=H\Delta_n(g)=\Delta_n(Hg).$$

于是证明了第一个论断.

为了证明第二个断言, 记 H 为 $\mathcal{H}(0,b)$ 的非零元素. 那么由可积条件 (5.1), b 属于 $k(n)$. 因为 $HS_n(h)=S_n(Hh)/b$, 我们有对所有 $i\in\mathbb{N}$,

$$HS_n^i(h)=b_iS_n^i(Hh) \quad \text{对某一 } b_i\in k(n).$$

设 $L \in k(n)\langle S_n\rangle$ 为 h 的差和算子. 由上面等式,

$$HL(h) = M(Hh)$$

其中 M 由将 L 中 S_n^i 替换成 $b_i S_n^i$ 得到. 因为存在超指数-超几何函数 g 满足 $L(h) = D_x(g)$ 且 $D_x(H) = 0$, 上面等式蕴含着

$$M(Hh) = HD_x(g) = D_x(Hg).$$

这也就证明了第二个论断. ∎

引理 5.24. *令 h_1 和 h_2 为 $k(x,n)$ 上的两个相似的超指数-超几何函数. 令 $\mathbb{V}_n$ 为由 $\{\Delta_n^i(h_j) \,|\, i \in \mathbb{N}, j \in \{1,2\}\}$ 在 $k(x)$ 上张成的线性空间, 且 $\mathbb{V}_x$ 为由 $\{D_x^i(h_j) \,|\, i \in \mathbb{N}, j \in \{1,2\}\}$ 在 $k(n)$ 上张成的线性空间.*

1. *如果 h_1 和 h_2 都有关于 n 的差和算子, 那么 $\mathbb{V}_n$ 中的任意非零元素有关于 n 的差和算子.*

2. *如果 h_1 和 h_2 都有关于 x 的差和算子, 那么 $\mathbb{V}_x$ 中的任意非零元素有关于 x 的差和算子.*

证明. 假定 $L_j(h_j) = \Delta_n(g_j)$ 对非零元素 $L_j \in k(x)\langle D_x\rangle$ 和超指数-超几何函数 g_j, 其中 $j = 1, 2$. 那么

$$L_j(\Delta_n^i(h_j)) = \Delta_n(\Delta_n^i(g_j)).$$

因此 $\{\Delta_n^i(h_j) \,|\, i \in \mathbb{N}, j \in \{1,2\}\}$ 的任意元素有差和算子. 如果 T_1 和 T_2 有关于 n 的差和算子, 它们的和是非零的并且也有关于 n 的差和算子, 并可以通过 T_1 和 T_2 的左最小公倍数得到. 由引理 5.23 (i) 可以得到第一个断言. 第二个断言可以同样证明. ∎

在文章 [84] 的基本定理证明中, Wilf 和 Zeilberger 忽视了一种情况: 非零 m-无关 (m-free) 的算子 $P(n, S_n, S_m) \in k(n)\langle S_n, S_m\rangle$ 被 $S_m - 1$ 除的余式可能为零. Wegschaider 使用“非交换技巧”处理了这种情况. 此处我们将应用 Wegschaider 技巧以及它的微分推广从 x-无关的或者 n-无关的算子出发, 构造关于 n 或关于 x 的差和算子.

引理 5.25 (Wegschaider 技巧)**.** *设 h 为 $k(x,n)$ 上的超指数-超几何函数函数.*

(i) 如果存在非零算子 $A \in k(x)\langle S_n, D_x\rangle$ 使得 $A(h) = 0$, 那么 h 有关于 n 的差和算子.

(ii) 如果存在非零算子 $A \in k(n)\langle S_n, D_x\rangle$ 使得 $A(h) = 0$, 那么 h 有关于 x 的差和算子.

证明. 假定存在非零算子 A 属于 $k(x)\langle S_n, D_x\rangle$ 满足 $A(h) = 0$. 因为 $\Delta_n = S_n - 1$, 所以 $A = \Delta_n^m (L(x, D_x) + \Delta_n M)$, 其中 m 属于 $\mathbb{N}$, L 是 $k(x)\langle D_x\rangle$ 中的非零算子并且 M 属于 $k(x)\langle S_n, D_x\rangle$. 由与 [83, 定理 3.2] 相似的论证, 存在 $w \in k(n)$ 和 $r \in k$ 满足 $r \neq 0$ 使得

$$w\Delta_n^m = \Delta_n Q + r \tag{5.22}$$

其中 $Q \in k(n)\langle S_n\rangle$. 例如我们取 $w = n^m$, 那么 $r = (-1)^m m!$. 使用事实 $r\Delta_n = \Delta_n r$ 和 (5.22), 得到

$$\frac{w}{r} A = L + \Delta_n N \quad 对某一 N \in k(x, n)\langle D_x, S_n\rangle.$$

因此 L 是 h 的关于 n 的差和算子.

第二个断言可以由相似证明得到. 类比 (5.22), 我们要找到 $w \in k(x)$ 和 $r \in k \setminus \{0\}$ 满足

$$wD_x^m = D_x Q + r$$

其中 $Q \in k(x)\langle D_x\rangle$. 比如我们取 $w = x^m$, 那么 $r = (-1)^m m!$. ∎

5.6.2.2 定理 5.22 的证明

我们下面给出定理 5.22 的证明.

证明. 设 h 为 $k(x, n)$ 上的超指数-超几何函数函数, 并且其标准表示为

$$(p(x, n),\ \beta(x),\ \gamma(x),\ \alpha(n)),$$

其中 $p \in k[x, n]$, $\beta, \gamma \in k(x)$, 且 $\alpha \in k(n)$. 把 p 写成 $\sum_{i=0}^m p_i(x) n^i$ 其中 $p_i \in k[x]$ 可以得到

$$h = \sum_{i=0}^m \beta(x)^n G_i H_i \tag{5.23}$$

其中 $G_i \in \mathcal{H}\left(\gamma(x) + \frac{\delta(p_i)}{p_i}, 1\right)$ 且 $H_i \in \mathcal{H}\left(0, \alpha(n)\frac{\sigma(n^i)}{n^i}\right)$.

我们首先证明 h 有关于 n 的差和算子. 注意到 (5.23) 中的每个 G_i 有 σ-商等于 1. 由引理 5.23 和 5.24, 只要证明超几何函数 $\hat{h} \in \beta(x)^n \cdot \mathcal{H}(0, g(n))$ 其中 $g \in k(n)$ 有关于 n 的差和算子. 令 $s = \mathrm{num}(\beta)$, $t = \mathrm{den}(\beta)$, $a = \mathrm{num}(g)$ 和 $b = \mathrm{den}(g)$. 而且令 $v = \mathrm{num}(\delta(\beta)/\beta)$ 和 $w = \mathrm{den}(\delta(\beta)/\beta)$. 通过直接计算得到 $\hat{h}$ 的 δ-商和 σ-商比分别为

$$\frac{nv}{w} \quad \text{和} \quad \frac{sa}{tb}.$$

注意 s, t, v, w 属于 $k[x]$, 且 a, b 属于 $k[n]$.

我们断言存在非零算子 A 属于 $k(x)\langle S_n, D_x\rangle$ 使得 $A(\hat{h}) = 0$. 这个断言可以由文章 [60] 中的维数分析技巧得出. 若此断言成立, 那么第一个论断可以由引理 5.25 得到.

令 $\mathcal{F}_N$ 为由 $\{S_n^i D_x^j | i + j \leq N\}$ 在 $k(x)$ 上张成的线性子空间. 用 μ 表示 a 和 b 关于 n 的最大次数, 且令

$$\mathcal{W}_N = \mathrm{span}_{k(x)} \left\{ \frac{n^i \hat{h}}{b(n+N-1)\cdots b(n)} \,|\, i \leq (\mu+1)N \right\}.$$

对 i 和 j 简单归纳得到

$$S_n^i D_x^j(\hat{h}) = \frac{q(n,x)\hat{h}}{b(n+i-1)\cdots b(n)}, \text{ 其中 } \deg_n(q) \leq i\mu + j.$$

如果 $i + j \leq N$, 那么 $S_n^i D_x^j(\hat{h})$ 属于 $\mathcal{W}_N$. 相同的, 存在从 $\mathcal{F}_N$ 到 $\mathcal{W}_N$ 的 $k(x)$- 线性映射 ϕ_N, 所有 $L \in \mathcal{F}_N$, ϕ_N 把 L 映射到 $L(\hat{h})$. 因为 $\mathcal{F}_N$ 在 $k(x)$ 上的维数是 $\binom{N+2}{2}$, 而 $\mathcal{W}_N$ 的维数是 $(\mu+1)N+1$, 当 N 足够大时, ϕ_N 的核是非平凡的. 核中任何非零元把 $\hat{h}$ 化为零. 于是断言得到证明.

其次我们要证明 h 有关于 x 的差和算子. 注意到 (5.23) 中的每个 $\mathcal{H}\left(0, \alpha(n)\frac{\sigma(n^i)}{n^i}\right)$ 的 δ-商等于零. 由引理 5.23 和 5.24, 只要证明形式为

$$\hat{h} = \beta(x)^n \cdot \mathcal{H}(g(x), 1) \quad \text{其中} g \in k(x)$$

的超指数-超几何函数 $\hat{h}(x,n)$ 有关于 x 的差和算子. 令 $s = \mathrm{num}(\beta)$, $t = \mathrm{den}(\beta)$,

$$v = \mathrm{num}\left(n\frac{\delta(\beta)}{\beta} + g\right) \quad \text{且} \quad w = \mathrm{den}\left(n\frac{\delta(\beta)}{\beta} + g\right).$$

通过直接的计算可以得到 $\hat{h}$ 的 δ-商和 σ-商分别为

$$\frac{v(x,n)}{w(x)} \quad \text{和} \quad \frac{s(x)}{t(x)}.$$

注意到 s, t 和 w 都属于 $k[x]$ 且 v 属于 $k[x,n]$ 满足 $\deg_n(v) = 1$.

我们断言存在非零算子 A in $k(n)\langle S_n, D_x\rangle$ 使得 $A(\hat{h}) = 0$. 若此断言成立, 那么由引理 5.25 可以得到第二个论断.

按照上面类似的论证, 我们考虑由 $\{S_n^i D_x^j | i+j \le N\}$ 在 $k(n)$ 上张成的线性子空间 $\mathcal{F}_N$. 令 μ 表示 s, t, v 和 w 关于 x 的最大次数, 且令

$$\mathcal{W}_N = \mathrm{span}_{k(n)} \left\{ \frac{x^i \hat{h}}{(tw)^N} \,|\, i \le 2\mu N \right\}.$$

对 i 和 j 简单归纳得到

$$S_n^i D_x^j(\hat{h}) = \frac{q(n,x)}{t^i w^j}\hat{h}, \text{ 其中 } \deg_x(q) \le (i+j)\mu.$$

因此 $S_n^i D_x^j(\hat{h})$ 属于 $\mathcal{W}_N$ 若 $i+j \le N$. 类似的存在从 $\mathcal{F}_N$ 到 $\mathcal{W}_N$ 的 $k(n)$- 线性映射 ϕ_N, 对所有 $L \in \mathcal{F}_N$, ϕ_N 把 L 映射到 $L(\hat{h})$. 因为 $\mathcal{F}_N$ 在 $k(n)$ 上的维数是 $\binom{N+2}{2}$, 而 $\mathcal{W}_N$ 的维数是 $2\mu N + 1$, 当 N 充分大的时候, ϕ_N 的核是非平凡的. 核中任何非零元素把 $\hat{h}$ 化为零. 于是证明了断言. ∎

第六章　结论与展望

6.1　结论

本文在实践和理论两方面对 Zeilberger 方法进行了研究.

在实践方面, 我们提出了基于 Hermite 约化来构造双变元有理函数的极小差和算子的新算法. 并且, 我们对经典的 Almkvist–Zeilberger 算法做了一些改进. 在计算机代数系统 Maple 上, 我们实现了这些算法, 并做成软件包 RationalCT.

在理论方面, 为了研究关于完整超指数-超几何函数的 Wilf–Zeilberger 猜想的一般情形, 我们证明了任一多变元超指数-超几何函数都可以分解成有理函数, 幂函数, 超指数函数和超几何项的乘积, 这是双变元混合情形时由冯如勇，Singer 和吴敏证明的一个结果的推广. 进一步的, 结合关于多变元超指数函数的 Christopher 定理和关于多变元超几何项的 Ore–Sato 定理, 我们给出了多变元超指数-超几何函数的结构定理. 基于结构定理和加法分解, 我们给出了判定双变元超指数-超几何函数是否存在差和算子的两个准则, 即 Zeilberger 方法在微分-差分混合情形下的终止条件.

6.2　进一步工作的展望

相对于 Zeilberger 方法研究的整体而言, 本论文所涉及到的仅是冰山一角. 所以, 未来的道路还很遥远. 与本文紧密相关的进一步课题主要是如下四方面:

6.2.1　算法实现

我们已经在计算机代数系统 Maple 上实现了第三章中的算法 HermiteTelescoping 和算法 RationalAZ. 我们进一步将实现工作是: 设计出从给定算子商出发, 计算多变元超指数-超几何函数的分解和判定差和算子的存在性的程序.

6.2.2　基于 Hermite 约化算法的推广

在文中, 我们已经介绍了 Hermite 约化在超指数-超几何情形的推广, 即 Geddes-Le-Li 算法与 Abramov-Petkovšek 算法. 自然的问题是能否将基于 Hermite 约化算法从双变元有理函数推广到超指数-超几何函数, 并更加有效的构造其极小差和算子. 在有理情形时, 差和算子是通过寻找一列具有公共分母的真分式在 $k(x)$ 上的线性关系而得到. 但是, 在超指数-超几何情形这种线性关系的寻找可能需要求解一阶微分或差分方程. 所以, 进一步的工作是寻找有效得到或则避免计算线性关系的方法.

6.2.3 Wilf–Zeilberger 猜想的混合情形

到目前为止，猜想的一般情形，即混合连续-离散情形，还没有得到解决. 我们希望第四章中关于多变元超指数-超几何函数的结构定理会在进一步工作中起到作用. 根据 Payne [65] 和 Abramov–Petkovšek [12, 14] 对猜想在离散情形时的证明思路，很关键一步是确定猜想是不是对有理函数成立. 为此, 我们的进一步工作是证明如下猜想.

猜想 6.1. 设 $f(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 是 $k(\mathbf{t},\mathbf{x})$ 中的有理函数. 那么 f 是完整的当且仅当 f 的分母分裂成如下形式

$$A(\mathbf{t})\prod_{\ell=1}^{L}(v_\ell\cdot\mathbf{x}+\lambda_\ell)$$

其中 $A\in k[\mathbf{t}]$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_L\in\bar{k}$, $v_\ell\in\mathbb{Z}^n$ 多所有满足 $1\le\ell\le L$ 的 ℓ 成立, 且 $v_\ell\cdot\mathbf{x}$ 代表向量 v_ℓ 和 $\mathbf{x}$ 的内积.

6.2.4 Zeilberger 方法的终止条件的统一化

如果区分普通差分与 q-差分, 那么对双变元函数存在九类差和算子, 即相应的有九种关于 Zeilberger 方法的终止性问题. 在表格 6.1 中, 我们列出解决的 (标记为 ✓)与未解决的 (标记为 ?) 终止性问题. 这里q-平移算子 Q_n 定义为 $Q_n(f(n))=f(qn)$, 对所有关于 Q_n 作用良定义的函数. 为了研究表格 6.1 中未

(L,g)	D_y	S_n-1	Q_n-1
$L(x,D_x)$	✓	✓	?
$L(n,S_n)$	✓	✓	?
$L(n,Q_n)$	?	?	✓

表 6.1: 解决的与未解决的终止性问题

解决的情形, 我们需要首先得到九种情形下的相应的结构定理. 并且, 我们希望能找到一种统一处理这九种情形的一般方法.

参考文献

[1] Niels Henrik Abel. *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel. Tome II.* Imprimerie de Grøndahl & Son, Christiania, 1981. Contenant les mémoirs posthumes d'Abel. [Containing the posthumous memoirs of Abel], Edited and with notes by L. Sylow and S. Lie.

[2] Sergei A. Abramov. The rational component of the solution of a first order linear recurrence relation with rational right hand side. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 15(4):1035–1039, 1090, 1975.

[3] Sergei A. Abramov. Rational solutions of linear differential and difference equations with polynomial coefficients. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 29(6):7–12, 1989.

[4] Sergei A. Abramov. Rational solutions of linear difference and q-difference equations with polynomial coefficients. In *ISSAC '95: Proceedings of the 1995 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 285–289, New York, NY, USA, 1995. ACM.

[5] Sergei A. Abramov. Applicability of Zeilberger's algorithm to hypergeometric terms. In *ISSAC'02: Proceedings of the 2002 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 1–7, New York, 2002. ACM.

[6] Sergei A. Abramov. When does Zeilberger's algorithm succeed? *Adv. in Appl. Math.*, 30(3):424–441, 2003.

[7] Sergei A. Abramov, Jacques J. Carette, Keith O. Geddes, and Ha Quang Le. Telescoping in the context of symbolic summation in Maple. *J. Symbolic Comput.*, 38(4):1303–1326, 2004.

[8] Sergei A. Abramov and K. Yu Kvansenko. Fast algorithms to search for the rational solutions of linear differential equations with polynomial coefficients.

In *ISSAC '91: Proceedings of the 1991 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 267–270, New York, NY, USA, 1991. ACM.

[9] Sergei A. Abramov and Ha Quang Le. A criterion for the applicability of Zeilberger's algorithm to rational functions. *Discrete Math.*, 259(1-3):1–17, 2002.

[10] Sergei A. Abramov, Ha Quang Le, and Marko Petkovšek. Rational canonical forms and efficient representations of hypergeometric terms. In *ISSAC'03: Proceedings of the 2003 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 7–14, New York, 2003. ACM.

[11] Sergei A. Abramov and Marko Petkovšek. Minimal decomposition of indefinite hypergeometric sums. In *ISSAC'01: Proceedings of the 2001 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 7–14 (electronic), New York, 2001. ACM.

[12] Sergei A. Abramov and Marko Petkovšek. Proof of a conjecture of Wilf and Zeilberger, 2001. Preprints Series of the Institute of Mathematics, Physics and Mechanics 39(748)(2001), Ljubljana, March 9, 2001.

[13] Sergei A. Abramov and Marko Petkovšek. Rational normal forms and minimal decompositions of hypergeometric terms. *J. Symbolic Comput.*, 33(5):521–543, 2002.

[14] Sergei A. Abramov and Marko Petkovšek. On the structure of multivariate hypergeometric terms. *Adv. Appl. Math.*, 29(3):386–411, 2002.

[15] Gert Almkvist and Doron Zeilberger. The method of differentiating under the integral sign. *J. Symb. Comput.*, 10:571–591, 1990.

[16] Joseph Bernšteĭn. Modules over a ring of differential operators. An investigation of the fundamental solutions of equations with constant coefficients. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 5(2):1–16, 1971.

[17] Alin Bostan, Shaoshi Chen, Frédéric Chyzak, and Ziming Li. Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions. In *ISSAC '10: Proceedings of the 2010 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 203–210, New York, NY, USA, 2010. ACM.

[18] Alin Bostan, Frédéric Chyzak, Bruno Salvy, Grégoire Lecerf, and Éric Schost. Differential equations for algebraic functions. In *ISSAC'07: Proceedings of the 2007 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 25–32. ACM, New York, 2007.

[19] Manuel Bronstein. *Symbolic Integration I: Transcendental functions*, volume 1 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2005.

[20] Manuel Bronstein, Ziming Li, and Min Wu. Picard–Vessiot extensions for linear functional systems. In *ISSAC '05: Proceedings of the 2005 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 68–75, New York, USA, 2005. ACM.

[21] Dominique Cerveau and Jean-François Mattei. *Formes intégrables holomorphes singulières*, volume 97 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1982. With an English summary.

[22] Shaoshi Chen and Ziming Li. A multiplicative form of multivariate hyperexponential-hypergeometric functions, 2010. MM-Res. Preprints (2010) No. 29, 25-35.

[23] William Y. C. Chen, Qing-Hu Hou, and Yan-Ping Mu. Applicability of the q-analogue of Zeilberger's algorithm. *J. Symbolic Comput.*, 39(2):155–170, 2005.

[24] Colin Christopher. Liouvillian first integrals of second order polynomial differential equations. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 49, 7 pp. (electronic), 1999.

[25] David Volfovich Chudnovsky and Gregory Volfovich Chudnovsky. On expansion of algebraic functions in power and Puiseux series. I. *J. Complexity*, 2(4):271–294, 1986.

[26] David Volfovich Chudnovsky and Gregory Volfovich Chudnovsky. On expansion of algebraic functions in power and Puiseux series. II. *J. Complexity*, 3(1):1–25, 1987.

[27] Frédéric Chyzak. *Fonctions holonomes en calcul formel*. PhD thesis, École polytechnique, Paris, France, 1998. INRIA, TU 0531. 227 pages.

[28] Frédéric Chyzak. An extension of Zeilberger's fast algorithm to general holonomic functions. *Discrete Math.*, 217(1-3):115–134, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997).

[29] Frédéric Chyzak, Manuel Kauers, and Bruno Salvy. A non-holonomic systems approach to special function identities. In *ISSAC '09: Proceedings of the 2009 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 111–118, New York, NY, USA, 2009. ACM.

[30] Frédéric Chyzak and Bruno Salvy. Non-commutative elimination in Ore algebras proves multivariate identities. *J. Symbolic Comput.*, 26(2):187–227, 1998.

[31] Richard M. Cohn. *Difference algebra*. Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydeny, 1965.

[32] Louis Comtet. Calcul pratique des coefficients de Taylor d'une fonction algébrique. *Enseignement Math. (2)*, 10:267–270, 1964.

[33] Olivier Cormier, Michael F. Singer, Barry M. Trager, and Felix Ulmer. Linear differential operators for polynomial equations. *J. Symbolic Comput.*, 34(5):355–398, 2002.

[34] S. C. Coutinho. *A primer of algebraic D-modules*, volume 33 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[35] James Harold Davenport. *On the integration of algebraic functions*, volume 102 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[36] James Harold Davenport. The Risch differential equation problem. *SIAM J. Comput.*, 15(4):903–918, 1986.

[37] Mary Celine Fasenmyer. Some generalized hypergeometric polynomials. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:806–812, 1947.

[38] Ruyong Feng. A note on the Galois group of linear differential-difference equations, 2010. MM-Res. Preprints (2010) No. 29, 1–8.

[39] Ruyong Feng, Michael F. Singer, and Min Wu. An algorithm to compute Liouvillian solutions of prime order linear difference-differential equations. *J. Symb. Comput.*, 45(3):306–323, 2010.

[40] Ruyong Feng, Michael F. Singer, and Min Wu. Liouvillian solutions of linear difference-differential equations. *J. Symbolic Comput.*, 45(3):287–305, 2010.

[41] Revaz Valer'yanovich Gamkrelidze, editor. *Analysis. I*, volume 13 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1989. Integral representations and asymptotic methods, A translation of Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya, Tom 13, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986, Translation by D. Newton, Translation edited by R. V. Gamkrelidze.

[42] Keith O. Geddes, Stephanie R. Czapor, and George Labahn. *Algorithms for Computer Algebra*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1992.

[43] Keith O. Geddes and Ha Quang Le. An algorithm to compute the minimal telescopers for rational functions (differential-integral case). In *Mathematical Software*, pages 453–463. WSP, 2002.

[44] Keith O. Geddes, Ha Quang Le, and Ziming Li. Differential rational normal forms and a reduction algorithm for hyperexponential func. In *ISSAC'04: Proceedings of the 2004 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 183–190, New York, USA, 2004. ACM.

[45] Jürgen Gerhard. *Modular Algorithms in Symbolic Summation and Symbolic Integration (LNCS).* SpringerVerlag, 2004.

[46] R. William Gosper, Jr. Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 75(1):40–42, 1978.

[47] Charles Hermite. Sur l'intégration des fractions rationnelles. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)*, 1:215–218, 1872.

[48] Ellis Horowitz. Algorithms for partial fraction decomposition and rational function integration. In *SYMSAC'71*, pages 441–457, New York, USA, 1971. ACM.

[49] Qing-Hu Hou. *Algebraic Method in Combinatorics.* PhD thesis, Nankai University, Tianjin, China, 2001.

[50] Qing-Hu Hou. k-free recurrences of double hypergeometric terms. *Adv. in Appl. Math.*, 32(3):468–484, 2004.

[51] Irving Kaplansky. *An introduction to differential algebra.* Actualités Sci. Ind., No. 1251 = Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, No. 5. Hermann, Paris, 1957.

[52] Michael Karr. Summation in finite terms. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 28(2):305–350, 1981.

[53] Michael Karr. Theory of summation in finite terms. *J. Symbolic Comput.*, 1(3):303–315, 1985.

[54] Wolfram Koepf. *Hypergeometric summation.* Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1998. An algorithmic approach to summation and special function identities.

[55] Ellis R. Kolchin. *Differential algebra and algebraic groups.* Academic Press, New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, Vol. 54.

[56] George Labahn and Ziming Li. Hyperexponential solutions of finite-rank ideals in orthogonal Ore rings. In *ISSAC'04: Proceedings of the 2004 international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 213–220. ACM, New York, 2004.

[57] Ha Quang Le. On the differential-integral analogue of Zeilberger's algorithm to rational functions. In *Computer mathematics (Chiang Mai, 2000)*, volume 8 of *Lecture Notes Ser. Comput.*, pages 204–213. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.

[58] Ha Quang Le. On the q-analogue of Zeilberger's algorithm to rational functions. *Program. Comput. Softw.*, 27(1):35–42, 2001.

[59] Ziming Li and Dabin Zheng. Determining whether a multivariate hyperexponential function is algebraic. *J. Syst. Sci. Complex.*, 19(3):352–364, 2006.

[60] Leonard M. Lipshitz. The diagonal of a D-finite power series is D-finite. *J. Algebra*, 113(2):373–378, 1988.

[61] Oystein Ore. Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 9(4):311–326, 1930.

[62] Mikhail Vasil'evich Ostrogradskiĭ. De l'intégration des fractions rationnelles. *Bull. de la classe physico-mathématique de l'Acad. Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 4:145–167, 286–300, 1845.

[63] Peter Paule. Greatest factorial factorization and symbolic summation. *J. Symb. Comput.*, 20(3):235–268, 1995.

[64] Peter Paule and Markus Schorn. A Mathematica version of Zeilberger's algorithm for proving binomial coefficient identities. *J. Symbolic Comput.*, 20(5-6):673–698, 1995. Symbolic computation in combinatorics Δ_1 (Ithaca, NY, 1993).

[65] Garth Hampton Payne. *Multivariate Hypergeometric Terms*. PhD thesis, Pennsylvania State University, Pennsylvania, USA, 1997.

[66] Robin Pemantle and Mark C. Wilson. Twenty combinatorial examples of asymptotics derived from multivariate generating functions. *SIAM Rev.*, 50(2):199–272, 2008.

[67] Marko Petkovšek, Herbert S. Wilf, and Doron Zeilberger. $A = B$. A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1996. With a foreword by Donald E. Knuth.

[68] Roberto Pirastu and Volker Strehl. Rational summation and Gosper-Petkovšek representation. *J. Symbolic Comput.*, 20(5-6):617–635, 1995. Symbolic computation in combinatorics (Ithaca, NY, 1993).

[69] Alexander Raichev and Mark C. Wilson. A new method for computing asymptotics of diagonal coefficients of multivariate generating functions. In *2007 Conference on Analysis of Algorithms, AofA 07*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AH, pages 439–449. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2007.

[70] Robert H. Risch. The problem of integration in finite terms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 139:167–189, 1969.

[71] Robert H. Risch. The solution of the problem of integration in finite terms. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76:605–608, 1970.

[72] Joseph Fels Ritt. *Integration in Finite Terms. Liouville's Theory of Elementary Methods.* Columbia University Press, New York, N. Y., 1948.

[73] Joseph Fels Ritt. *Differential Algebra.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIII. American Mathematical Society, New York, N. Y., 1950.

[74] Michael Rothstein. A new algorithms for integration of exponential and logarithmic functions. In *Proceedings of the 1977 MACSYMA Users Conference (Berkeley, CA)*, pages 263–274, Washington DC, 1977. NASA.

[75] Mikio Sato. Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)—the English translation of Sato's lecture from Shintani's note. *Nagoya Math. J.*,

120:1–34, 1990. Notes by Takuro Shintani, Translated from the Japanese by Masakazu Muro.

[76] Michael F. Singer. Liouvillian first integrals of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 333(2):673–688, 1992.

[77] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. CUP, 1999.

[78] Nobuki Takayama. An approach to the zero recognition problem by Buchberger algorithm. *J. Symbolic Comput.*, 14(2-3):265–282, 1992.

[79] Barry M. Trager. Algebraic factoring and rational function integration. In *SYMSAC'76: Proceedings of the Third ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 219–226, New York, NY, USA, 1976. ACM.

[80] Marius van der Put and Michael F. Singer. *Galois theory of linear differential equations*, volume 328 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[81] Pierre Verbaeten. The automatic construction of pure recurrence relations. *SIGSAM Bull.*, 8(3):96–98, 1974.

[82] Joachim von zur Gathen and Jürgen Gerhard. *Modern Computer Algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2003.

[83] Kurt Wegschaider. Computer generated proofs of binomial multi-sum identities. Master's thesis, RISC, J. Kepler University, May 1997.

[84] Herbert S. Wilf and Doron Zeilberger. An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities. *Invent. Math.*, 108(3):575–633, 1992.

[85] Min Wu. *On Solutions of Linear Functional Systems and Factorization of Modules over Laurent-Ore Algebras*. PhD thesis, Chinese Academy of

Sciences and Université de Nice-Sophia Antipolis, Beijing, China and Nice, France, 2005.

[86] Doron Zeilberger. A holonomic systems approach to special functions identities. *J. Comput. Appl. Math.*, 32:321–368, 1990.

[87] Doron Zeilberger. The method of creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, 11(3):195–204, 1991.

[88] Henryk Zoladek. The extended monodromy group and Liouvillian first integrals. *J. Dynam. Control Systems*, 4(1):1–28, 1998.

发表文章目录

[1] Alin Bostan, Shaoshi Chen, Frederic Chyzak, and Ziming Li. Complexity of Creative Telescoping for Bivariate Rational Functions. In Stephen M. Watt, editor, *ISSAC 2010 Proc. 2010 Internat. Symp. Symbolic Algebraic Comput.*, New York, N. Y., 2010. ACM Press.

[2] Shaoshi Chen, Frédéric Chyzak, Ruyong Feng and Ziming Li. The Existence of Telescopers for Hyperexponential-Hypergeometric Functions. MM Research Preprints, KLMM, AMSS, Academia Sinica, Vol. 29, p. 239-267, July 2010. [未正式发表]

[3] Shaoshi Chen and Ziming Li. A Note on Ostrogradsky and Horowitz's Method. MM Research Preprints, KLMM, AMSS, Academia Sinica, Vol. 29, p. 36–47, July 2010. [未正式发表]

[4] Shaoshi Chen and Ziming Li. A Multiplicative Form of Multivariate Hyperexponential-Hypergeometric Functions. MM Research Preprints KLMM, AMSS, Academia Sinica, Vol. 29, p. 25–35, July 2010. [未正式发表]

[5] Shaoshi Chen, Ruyong Feng, Ziming Li and Huaifu Wang. An Exercise on Real Elementary Functions in the Book Symbolic Integration I (second edition). MM Research Preprints KLMM, AMSS, Academia Sinica, Vol. 26, p. 115–125, January 2008. [未正式发表]

简　　历

陈绍示，男，浙江温州人，1983 年出生。　E-mail: schen@amss.ac.cn

教育状况

2007.12–2011.2　中国科学院数学与系统科学研究院与巴黎综合理工学校 (Ecole Polytechnique) 中法联合培养博士。
方向：符号计算，导师：李子明与 Frédéric Chyzak。

2005.9–2007.12　中国科学院数学与系统科学研究院，系统所，硕博连读。
方向：符号计算，导师：李子明。

2001.9–2005.7　江苏大学，数学系，本科。

1998.9–2001.7　宜山高级中学。

参加学术会议情况

2010 年 8 月，参加国际组合复兴会议并做报告, 天津。

2010 年 7 月，参加国际符号和代数计算会议(ISSAC2010) 并做报告，德国慕尼黑。

2010 年 3 月，参加微分差分方程会议(FELIM2010) 并做报告，法国里摩日。

2009 年 7 月，参加国际符号和代数计算会议(ISSAC2009)，韩国首尔。

2009 年 5 月，参加国际数学机械化会议(ICMM2009)，北京。

2008 年 2 月，访问奥地利符号计算研究所(RISC) 并做报告, 奥地利林茨。

2007 年 7 月，参加国际形式幂级数和代数组合会议(FPSAC2007), 天津。

获奖经历

2008 年中国科学院数学与系统科学研究院三好学生。

2004 年江苏省数学建模竞赛一等奖。

致　谢

值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的各位老师、同学、朋友和家人致以衷心的感谢！

首先要特别感谢我的两位导师李子明研究员和 Frédéric Chyzak 博士！正是他们这三年来的悉心指导才有了现在这篇博士论文, 这里凝聚了你们的心血. 如果没有李老师不拘一格的将我招收入数学院学习, 我也不可能遇到我的妻子还有所里的知心朋友. 如果没有 Frédéric 帮我争取到在法国学习的机会, 我也不可能认识这么多异国他乡的老师和朋友. 我不会忘记和李老师一起熬夜工作的日子, 也不会忘记 Frédéric 无数次对我英语写作和发音给出的指正. 谢谢!

这三年来, 我要特别感谢中国科学院数学机械化重点实验室和法国国家自动化研究所给我提供的优越的学习, 科研环境. 感谢机械化中心的各位老师! 特别感谢吴文俊院士、高小山研究员、支丽红研究员、王定康副研究员、李洪波研究员. 从他们那里我学习到了很多的知识并且获得了很多的帮助. 尤其是周代珍老师, 无数次在生活和学业上给予的耐心的帮助. 谢谢! 感谢 Algorithms 项目组的各位老师! 特别感谢 Philippe Flajolet 院士, Bruno Salvy 研究员, Philippe Dumas 研究员, Alin Bostan 博士, Nicolas Broutin 博士, Thomas Feierl 博士. 通过和您们的讨论, 让我受益匪浅. 尤其是秘书 Virginie Collette 在生活上的帮助. 谢谢! 还要特别感谢数学与系统科学研究院和中科院研究生院的各位老师！他们的辛勤工作为我们创造了良好的学习和生活环境.

我还要感谢现在和曾经每天生活, 学习在一起的同学. 感谢机械化中心的罗勇师兄, 冯如勇师兄, 郑大彬师兄, 吴敏师姐, 袁春明师兄, 程进三师兄, 谢正师兄, 王灯山师兄, 沈亚良师兄, 周凯师兄, 王怀富师兄, 李家师姐, 刘姜师姐, 黄震宇同学, 李彬同学, 孙瑶同学, 曹源昊同学, 于彭同学, 周升田同学, 潘彦斌同学, 付国锋师弟, 孙东霞师妹、郭峰师弟, 赵尚威师妹, 李伟师妹, 张立先师妹, 戴照鹏师弟, 李子佳师弟, 康劲师弟等! 其中特别感谢冯如勇师兄, 王怀富师兄和付国锋师弟在我生活,学习上的良多帮助! 感谢 Algorithms 项目组的师弟 Marc Mezzarobba, Alexandre Benoit, Elie de Panafieu. 你们总能在我计算机出问题时, 在我为一个法语单词困惑时给予及时帮助. 还要感谢我的数学院同学, 尤其是室友吴刘臻, 唐舜, 孙志强, 好朋友程刚, 吴杰, 郑凯等. 我不会忘记同大家一

起度过的很多愉快的时光.

在学业上, 我还要感谢陆征一老师多年来的鼓励和支持! 感谢南开大学的陈永川教授, 侯庆虎教授, 辛国策老师. 特别是侯庆虎老师提供了论文中一些名词的合适翻译, 并在许多问题上进行了讨论, 让我获益良多. 还要感谢 Moulay Barkatou, Manuel Kauers 和 Peter Paule 给我的帮助和支持! 特别感谢 Manuel Kauers 给我提供了去 RISC 做博士后的机会!

感谢我的父母这二十多年来的养育之恩! 感谢我的所有家人对我学业的支持! 感谢我在巴黎的叔叔和阿姨们对我的照顾和鼓励! 最后我要感谢我的爱妻吴晓丽, 没有你的在生活上的照顾和在学业上的支持, 我不可能完成这篇博士论文. 是你对我的理解和关心让我顺利完成了这三年的学业.