系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
32(8) (2012, 8), 1019–1032

多变元 q- 超几何项的乘法分解*

陈 绍 示
(北卡罗莱纳州立大学数学系，罗利 27695)

冯 如 勇 付 国 锋 康 劲
(中国科学院数学与系统科学研究院数学机械化重点实验室， 北京 100190)

摘要 将 Ore-Sato 定理的 q- 模拟由非混合情形推广到混合情形，证明了可驯条件下，混合 q- 超几何项可以分解为有理函数与 q- 阶乘项的乘积.

关键词 q- 超几何项， q- 阶乘项，乘法分解，结构定理.

MR(2000) 主题分类号 33C70, 33F10

1 引 言

超几何项在组合数学与特殊函数理论中起着重要的作用. 20 世纪 30 年代， Ore 在文献 [1] 中给出了两个变元的相容有理函数的结构刻画. 随后， Sato 在 60 年代刻画了多个变元情形 (文献 [2]). 根据他们的结果，即 Ore-Sato 定理，我们得到多变元超几何项的乘法分解. 即每一个超几何项可以写成一个有理函数和一些阶乘项的乘积. 但是他们的工作当时并不为人所熟知，后来侯庆虎 [3−4] 以及 Abramov 和 Petkovšek[5] 分别在 2001 年和 2002 年又重新发现并证明了该结论. Ore-Sato 定理的一个重要应用是证明 Zeilberger 算法的终止性. 例如 Abramov 在 [6] 中导出的 Zeilberger 算法的终止条件就依赖于 Ore-Sato 定理.

q- 超几何项是超几何项的 q- 模拟. Gel'fand, Graev 和 Retakh 在文献 [7] 中描述了 q- 差分情形下的 Ore-Sato 定理，但并未给出具体证明. 陈永川，侯庆虎，穆彦平在文献 [8] 中利用 Ore-Sato 定理的 q- 模拟导出了 q- 差分情形下的 Zeilberger 算法终止性条件.

在 q- 差分情形中，如果 q- 平移算子只是关于同一基底作平移，我们称之为非混合情形. 如果 q- 平移算子可以对不同基底作平移，则称之为混合情形. Gel'fand 等人给出的 q- 模拟是非混合情形的 q- 模拟.

* 美国国家自然科学基金 (CCF-1017217)，国家自然科学基金青年基金 (10901156) 和国家自然科学基金 (60821002/F02) 资助课题.

收稿日期： 2011-12-29, 收到修改稿日期： 2012-06-08.

本文研究混合情形下 Ore–Sato 定理的 q- 模拟，内容安排如下：第 2 节将严格地构造一个 q- 差分域，它是 q- 超几何项的基域；第 3 节介绍 q- 超几何项及其相容条件的定义，并引入可驯的概念；第 4 节引入了平移群及其在有理函数上的作用；第 5 节介绍群环、余圈和余边缘等概念；第 6 节证明了可驯的混合情形下，任一 q- 超几何项可以分解为有理函数和 q- 阶乘项乘积的形式，并刻画了 q- 阶乘项的结构，这是本文的主要贡献.

在本文中， $R^{\times}$ 表示环 R 中非零元素组成的集合.

2 q- 差分域

令 C 是特征为零的代数闭域， $q_1, q_2, \cdots, q_n \in C^{\times}$ 不是单位根， $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 是 C 上的恒等映射. 考虑如下的偏差分方程组

$$\tau_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\tau_n \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

由于该方程组的系数矩阵关于乘法是交换的，从而满足文献 [9] 中所列出的矩阵相容条件，由文献 [9] 中定理 1 可知，在 C 的某一 Picard-Vessiot 环 R 中存在上述方程组的非零解，记为 $(q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n})^{\mathrm{T}}$，其中 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 k 上代数无关的 n 个未定元. 再由文献 [9] 中的定理 2 可得如下结论

1) $C \subset R$;

2) τ_i 可扩展为 $R \to R$ 的单同态，且 $\tau_i\left(q_i^{y_i}\right) = q_i^{y_i+1}$，其中 $1 \le i \le n$;

3) 设 $r \in R$，对于 $i = 1, 2, \cdots, n$ 等式 $\tau_i(r) = r$ 都成立当且仅当 $r \in C$;

4) $q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}$ 在 R 中可逆.

引理 2.1 $q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}$ 在 C 上代数无关.

证 假设 $q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}$ 在 C 上代数相关，即它们满足某一个系数在 C 上的非零多项式. 不妨假设出现单项式最少的多项式为

$$\sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n \in \mathbb{N}} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} q_1^{i_1 y_1} q_2^{i_2 y_2} \cdots q_n^{i_n y_n} = 0, \tag{1}$$

其中 $a_{i_1 i_2 \cdots i_n} \in C^{\times}$. 由于 $q_i^{y_i}$ 在扩环中是可逆的，上述方程的左边至少有两项.

不妨假设式 (1) 左边出现的 $q_1^{y_1}$ 的次数不全相同，那么上述方程可改写为

$$\sum_{j=0}^{\ell} b_j(q_2^{y_2}, q_3^{y_3}, \cdots, q_n^{y_n})\, q_1^{jy_1} = 0, \tag{2}$$

其中 $\ell > 0$, $b_j \in C[q_2^{y_2}, q_3^{y_3}, \cdots, q_n^{y_n}]$, 且 $b_\ell \neq 0$. 将算子 τ_1 作用在式 (2) 上可得

$$\sum_{j=0}^{\ell} q_1^j\, b_j(q_2^{y_2}, q_3^{y_3}, \cdots, q_n^{y_n})\, q_1^{jy_1} = 0, \tag{3}$$

那么方程 (2) 乘以 q_1^ℓ 与方程 (3) 的差为

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} \left(q_1^\ell - q_1^j\right) b_j(q_2^{y_2}, q_3^{y_3}, \cdots, q_n^{y_n})\, q_1^{jy_1} = 0. \tag{4}$$

因为 q_1 不是单位根，所以，对于 $j = 0, 1, \cdots, \ell - 1$, $q_1^\ell \neq q_1^j$. 从而式 (4) 的左边系数不全为零，即： $q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}$ 满足项数更少的方程，这与式 (1) 的项数最少矛盾. 由此推出 $q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}$ 在 C 上代数无关.

由引理 2.1 可知， $C(q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n})$ 是一个良定义的有理函数域，记为 F. 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, τ_i 为 F 上的自同构，它将 $q_i^{y_i}$ 映为 $q_i^{y_i+1}$ 并且保持其余的 $q_j^{y_j}$ 不变，我们称 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 为 F 上的 q- 平移算子，$(F, \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$ 构成一个 q- 差分域.

设 $c \in F$. 如果 $\tau_i(c) = c$ 对于所有满足 $1 \le i \le n$ 的 i 都成立，那么我们称 c 为常数. 下面我们确定 F 中的常数.

如果 $f = cq_1^{i_1y_1} q_2^{i_2y_2} \cdots q_n^{i_ny_n}$, 其中 $c \in C$ 且 $i_1, i_2, \cdots, i_n \in \mathbb{N}$, 则称 f 为单项式. 进一步，如果 $i_1, i_2, \cdots, i_n \in \mathbb{Z}$, 则称它为 Laurent 单项式.

引理 2.2 设 $f \in C[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$. 如果 $\tau_1^{\ell_1}\tau_2^{\ell_2}\cdots\tau_n^{\ell_n}(f) = c\,f$, 其中 $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n \in \mathbb{Z}$, $c \in C$, 那么对于 f 中出现的任意单项式 A 都有 $\tau_1^{\ell_1}\tau_2^{\ell_2}\cdots\tau_n^{\ell_n}(A) = c\,A$.

证 设 $f = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$, 其中 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 是 f 中出现的彼此不同的单项式. 根据 τ_i 的定义， $\tau_1^{\ell_1}\tau_2^{\ell_2}\cdots\tau_n^{\ell_n}(A_i) = c_i\,A_i$, 其中 $c_i \in C$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

因为 $\tau_1^{\ell_1}\tau_2^{\ell_2}\cdots\tau_n^{\ell_n}(f) = c\,f$, 所以

$$(c - c_1)A_1 + (c - c_2)A_2 + \cdots + (c - c_s)A_s = 0.$$

从而对于 $i = 1, 2, \cdots, s$, 有 $c = c_i$, 即 $\tau_1^{\ell_1}\tau_2^{\ell_2}\cdots\tau_n^{\ell_n}(A_i) = c\,A_i$.

下面引理说明非零有理函数的所有 q- 差商都是常数等价于它是 Laurent 单项式.

引理 2.3 设 $f \in F^\times$. 则 $\frac{\tau_i(f)}{f} \in C$ 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都成立当且仅当 f 是 Laurent 单项式.

证 (充分性) 如果 f 是 Laurent 单项式，设 $f = cq_1^{i_1y_1} q_2^{i_2y_2} \cdots q_n^{i_ny_n}$, 其中 $c \in C$, $i_1, i_2, \cdots, i_n \in \mathbb{Z}$, 直接计算可得 $\frac{\tau_i(f)}{f} \in C$.

(必要性) 假设 $\frac{\tau_i(f)}{f} \in C$ 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都成立.

首先我们考虑 f 是 $C\left[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}\right]$ 中多项式的情形. 如果 f 不是单项式, 不妨设 f 中出现如下两个不同的单项式

$$A = q_1^{iy_1} A' \quad 和 \quad B = q_1^{jy_1} B',$$

其中 $i > 0, i \neq j$, A', B' 不为零且不含有变元 $q_1^{y_1}$. 由于存在 $c \in C$ 使得 $\tau_1(f) = cf$, 则由引理 2.2 可知, $\tau_1(A) = cA$, $\tau_1(B) = cB$. 另一方面, 我们有 $\tau_1(A) = q_1^i A$, $\tau_1(B) = q_1^j B$. 因此, $q_1^i = q_1^j$. 从而 q_1 是单位根, 这与前面关于 q_1 的假设矛盾. 因此 f 是单项式.

下面考虑有理函数情形. 设 $f = \frac{P}{Q}$, 其中 $P, Q \in C[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$ 并且互素. 由 $\frac{\tau_i(f)}{f} \in C$, 可知存在 $c_i \in C$ 使得 $\tau_i(P)Q = c_i\tau_i(Q)P$. 所以, $P \mid \tau_i(P)$ 且 $Q \mid \tau_i(Q)$. 又因为 τ_i 不会改变多项式的次数, 所以 $\frac{\tau_i(P)}{P}$ 和 $\frac{\tau_i(Q)}{Q}$ 都在 C 中. 由多项式情形可知, P 和 Q 均为单项式. 从而, f 是 Laurent 单项式.

引理 2.4 设 $f \in F^\times$. 如果对于某个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\frac{\tau_i(f)}{f} \in C$, 那么存在 $m_i \in \mathbb{Z}$ 使得 $\frac{\tau_i(f)}{f} = q_i^{m_i}$.

证 只需把 f 看成关于 $q_i^{y_i}$ 的一元有理函数, 由上述引理可知, f 是关于 $q_i^{y_i}$ 的 Laurent 单项式, 其系数所在的域为

$$C\left(q_1^{y_1}, q_3^{y_3}, \cdots, q_{i-1}^{y_{i-1}}, q_{i+1}^{y_{i+1}}, q_{i+2}^{y_{i+2}}, \cdots, q_n^{y_n}\right).$$

于是, $\frac{\tau_i(f)}{f}$ 一定是 q_i 的某个幂次.

基于引理 2.3, 可以证明所有的常数都包含在 C 中.

命题 2.5 F 中的元素是常数当且仅当它在 C 中.

证 显然, C 中的所有元素均为常数. 现在假设 f 是 F 中的常数. 那么 $\tau_i(f) = f$ 对所有满足 $1 \leq i \leq n$ 的 i 成立. 由引理 2.3 可知

$$f = cq_1^{i_1y_1} q_2^{i_2y_2} \cdots q_n^{i_ny_n},$$

对某个 $c \in C$ 和某组 $i_1, i_2, \cdots, i_n \in \mathbb{Z}$ 成立. 如果 $i_1 \neq 0$, 那么 $\tau_1(f) = q_1^{i_1} f$. 所以 $q^{i_1} = 1$, 与 q 不是单位根矛盾. 即 $i_1 = 0$. 同理, 我们可以证明 $i_2 = i_3 = \cdots = i_n = 0$. 所以 $f = c$.

3 *q*- 超几何项及其相容条件

环 E 称为 F 的 q- 差分环扩张, 如果满足下列条件

1) $F \subset E$;

2) F 中的 q- 平移算子 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 可以扩展为 E 上的单同态;

3) 扩展后的单同态两两交换.

定义 3.1 令 H 为 E 中的可逆元, 如果存在 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in F$ 使得

$$\frac{\tau_1(H)}{H} = f_1,\ \frac{\tau_2(H)}{H} = f_2, \cdots, \frac{\tau_n(H)}{H} = f_n,$$

则称 H 为 F 上的一个 q- 超几何项, 有理函数 f_i 称为 H 关于 τ_i 的 q- 差商. 进一步, 如果 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n$, 我们称该 q- 超几何项是非混合的, 否则称为混合的.

下面，我们给出一组有理函数关于 q- 平移算子 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 的相容性定义.

定义 3.2 令 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 为非零的有理函数. 如果

$$\frac{\tau_i(f_j)}{f_j} = \frac{\tau_j(f_i)}{f_i} \tag{5}$$

对于所有满足 $1 \leq i < j \leq n$ 的 i, j 都成立，则称它们为相容的.

对于 F 上的 q- 超几何项 H 而言，由于 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 的复合运算两两交换，因此可验证 H 的 q- 差商是相容的. 另一方面，给定一组相容的有理函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$, 由文献 [9] 中定理 2 可知, 存在 F 的某一扩环 E, 使得 E 包含一个 q- 超几何项, 其 q- 差商分别为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$.

在本文中，我们将要证明任给 q- 超几何项，可以分解为有理函数和 q- 阶乘项的乘积. 其中， q- 阶乘项是指一类特殊的 q- 超几何项，它的 q- 差商为若干个 q- 整线性多项式的乘积. 文献 [7–8] 已经刻画了该结论的非混合情形. 本文的贡献是将非混合情形的结论推广至混合情形.

为了刻画混合情形的 q- 超几何项的乘法分解，我们需要对 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 再加以限制. 设 $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ 为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个分拆，并且 S_ℓ 对于 $\ell = 1, 2, \cdots, k$ 都满足：$i, j \in S_\ell$ 当且仅当 $q_i = q_j$, 我们称该分拆为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的下标分拆. 如果 $i \in S_\ell$, 令 $p_\ell = q_i$, 称 p_ℓ 为 S_ℓ 的代表元. 显然，所有的代表元即为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 中所有不相同的元素.

定义 3.3 对于代表元 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的幂乘而言，如果

$$\prod_{\ell=1}^{k} p_l^{m_\ell} = 1 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = \cdots = m_k = 0,$$

则称此时的 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是可驯的.

显然， $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是可驯的意味着它们都不是单位根. 进一步，如果 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是可驯的，则称 q- 差分域 F 为可驯的，否则称 F 为非可驯的.

下文中，我们总假设 F 是可驯的.

4 q- 平移群及其作用

设 $\Xi = \{\tau_1^{\ell_1}\tau_2^{\ell_2}\cdots\tau_n^{\ell_n} \,|\, \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 在复合运算下生成的群. 因为 q- 平移算子可交换，所以 Ξ 是阿贝尔群. 在不会出现混淆的情况下，将 Ξ 的单位元记为 1. 进一步有如下结论成立.

引理 4.1 群 Ξ 是由 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 生成的自由群.

证　设 $\tau = \tau_1^{\ell_1}\tau_2^{\ell_2}\cdots\tau_n^{\ell_n}$ 为 Ξ 中元素. 如果 $\tau = 1$, 那么

$$\tau\left(q_i^{y_i}\right) = q_i^{\ell_i + y_i} = q_i^{y_i}.$$

从而， $q_i^{\ell_i} = 1$. 由于 q_i 不是单位根，所以 $\ell_i = 0$. 从而，单位元 1 在群 Ξ 中的表示是唯一的，所以 Ξ 是自由群.

由有限生成阿贝尔群结构定理可知， Ξ 的任意子群都是有限生成的自由阿贝尔群.

设 $f \in F, \tau \in \Xi$. 我们将 $\tau(f)$ 记作 f^τ. 容易验证 $(\cdot)^\tau$ 诱导出 Ξ 在 F 上的一个群作用. 对于 $F^\times$ 中元素 f, 定义集合

$$\Xi_f = \left\{\tau \in \Xi \left| \frac{f^\tau}{f} \in C \right.\right\}.$$

可以验证 Ξ_f 是 Ξ 的子群，我们称 Ξ_f 为 f 的迷向子群.

利用迷向子群，可以将引理 2.3 重述为

引理 4.2 迷向子群 Ξ_f 等于 Ξ 当且仅当 f 是一个 Laurent 单项式.

给定多项式 $h \in C[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$, 下面引理刻画 Ξ_h 中的元素.

引理 4.3 令 $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ 为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的下标分拆,并且 $h \in C[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$ 不是单项式. 设

$$A = aq_1^{i_1 y_1} q_2^{i_2 y_2} \cdots q_n^{i_n y_n}, \quad B = bq_1^{j_1 y_1} q_2^{j_2 y_2} \cdots q_n^{j_n y_n}$$

为 h 中出现的任意两个单项式，其中 $a, b \in C^\times$, 且 $\tau = \tau_1^{\ell_1} \tau_2^{\ell_2} \cdots \tau_n^{\ell_n}$. 那么 $\tau \in \Xi_h$ 当且仅当对每一个 $t \in \{1, 2, \cdots, k\}$ 都有

$$\sum_{s \in S_t} \ell_s (i_s - j_s) = 0.$$

证 由 τ 的定义可知

$$\frac{A^\tau}{A} = q_1^{\ell_1 i_1} q_1^{\ell_2 i_2} \cdots q_n^{\ell_n i_n} \quad 和 \quad \frac{B^\tau}{B} = q_1^{\ell_1 j_1} q_2^{\ell_2 j_2} \cdots q_n^{\ell_n j_n}.$$

由此可知， $\frac{h^\tau}{h} \in C$ 当且仅当对于 h 中出现的任意两个单项式 A, B 有 $\frac{A^\tau}{A} = \frac{B^\tau}{B}$, 即

$$q_1^{\ell_1(i_1 - j_1)} q_2^{\ell_2(i_2 - j_2)} \cdots q_n^{\ell_n(i_n - j_n)} = 1.$$

上面的式子等价于

$$\prod_{t=1}^{k} p_t^{\sum\limits_{s \in S_t} \ell_s (i_s - j_s)} = 1.$$

由于 F 是可驯的，它又等价于

$$\sum_{s \in S_t} \ell_s (i_s - j_s) = 0 \quad 对所有的\ t \in \{1, 2, \cdots, k\}\ 成立.$$

下面的定理是这一节的主要结果.

定理 4.4 如果 $h \in C[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$ 不是单项式，那么商群 Ξ/Ξ_h 是有限生成自由阿贝尔群.

证 首先，由 Ξ 是一个有限生成的阿贝尔群可知， Ξ/Ξ_h 是一个有限生成的阿贝尔群. 下面还需证明 Ξ/Ξ_h 是自由的. 根据有限生成阿贝尔群的结构定理，只需证明 Ξ/Ξ_h 是无扭的. 假设 $\tau \in \Xi$ 使得 $\tau\Xi_h$ 是 Ξ/Ξ_h 中一个非平凡的扭元，那么存在一个非零整数 d 使得 $\tau^d \in \Xi_h$. 设 $\tau = \tau_1^{\ell_1} \tau_2^{\ell_2} \cdots \tau_n^{\ell_n}$ 且 $A = aq_1^{i_1 y_1} q_2^{i_2 y_2} \cdots q_n^{i_n y_n}$, $B = bq_1^{j_1 y_1} q_2^{j_2 y_2} \cdots q_n^{j_n y_n}$ 是 h 中出现的任意两个不同的单项式. 由引理 4.3 可知,

$$\sum_{s \in S_t} d\ell_s (i_s - j_s) = 0, \quad t \in \{1, 2, \cdots, k\}.$$

因为 d 不为 0, 所以

$$\sum_{s\in S_t} \ell_s(i_s-j_s)=0, \quad t\in\{1,2,\cdots,k\}.$$

由引理 4.3, $\tau\in\Xi_h$, 从而有 $\tau\Xi_h=\Xi_h$, 矛盾.

今后，当给定多项式 h, 我们将 Ξ 中元素 τ 在 Ξ/Ξ_h 中的象记作 $\overline{\tau}$.

推论 4.5 设 $h\in C[q_1^{y_1},q_2^{y_2},\cdots,q_n^{y_n}]$ 不是单项式. 假设 $\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_r$ 构成自由群 Ξ/Ξ_h 的一组基， $\sigma_{r+1},\sigma_{r+2},\cdots,\sigma_m\in\Xi$ 构成 Ξ_h 的一组基. 那么 $m=n$ 且 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 是 Ξ 的一组基.

证 对于任意 $\sigma\in\Xi$, 存在 $i_1,i_2,\cdots,i_r\in\mathbb{Z}$ 使得 $\overline{\sigma}=\overline{\sigma}_1^{i_1}\overline{\sigma}_2^{i_2}\cdots\overline{\sigma}_r^{i_r}$. 因此，存在 $\tau\in\Xi_h$ 使得 $\sigma=\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{i_2}\cdots\sigma_\ell^{i_\ell}\tau$. 所以 σ 可由 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 表示. 下面证明 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 是无关的. 假设

$$\sigma_1^{j_1}\sigma_2^{j_2}\cdots\sigma_r^{j_r}\sigma_{r+1}^{j_{r+1}}\cdots\sigma_m^{j_m}=1,$$

于是有 $\overline{\sigma}_1^{j_1}\overline{\sigma}_2^{j_2}\cdots\overline{\sigma}_r^{j_r}=1$. 从而， $j_1=j_2=\cdots=j_r=0$, 进一步还有， $j_{r+1}=j_{r+2}=\cdots=j_m=0$. 又因为 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 也是构成 Ξ 的一组基，所以 $m=n$.

上面推论说明了 Ξ/Ξ_h 同构于由 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 生成 Ξ 的某个子群. 固定这组基. 设 $\tau\in\Xi$, 则存在唯一的一组整数 $d_1,d_2,\cdots,d_r$ 使得 $\overline{\tau}=\overline{\sigma}_1^{d_1}\overline{\sigma}_2^{d_2}\cdots\overline{\sigma}_r^{d_r}$. 定义 $\overline{\tau}$ 在 F 中元素 f 的作用为

$$f^{\overline{\tau}}=f^{\left(\sigma_1^{d_1}\sigma_2^{d_2}\cdots\sigma_r^{d_r}\right)}. \tag{6}$$

于是得到 Ξ/Ξ_h 在 F 上的一个群作用. 我们称该作用是由 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 诱导的. 由 Ξ_h 的定义可知,

$$\frac{h^{\tau}}{h^{\overline{\tau}}}\in C. \tag{7}$$

由定理 4.4 知，如果 $h\in C[q_1^{y_1},q_2^{y_2},\cdots,q_n^{y_n}]$ 不是单项式，则商群 Ξ/Ξ_h 同构于 $\mathbb{Z}^m$, 其中 m 为某个正整数. 我们称 m 为 h 的秩，称 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$ 为与 h 相关的一组基. 为了定义的完整性，我们将非零单项式的秩定义为零，因为此时 Ξ/Ξ_h 是平凡的.

5 群环、余圈和余边缘

为了刻画关于群作用的相容条件，我们介绍与 q- 平移群 Ξ 相关的几个概念：群环、余圈以及余边缘.

下面描述群 Ξ 在 $F^\times$ 上的作用如何诱导群环 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 在 $F^\times$ 上的作用. 如果 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 是自由阿贝尔群 Ξ 的一组基，那么 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 可以看作 $\mathbb{Z}$ 上关于 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 的 Laurent 多项式环. 设 $\Xi=m_1\sigma_1+m_2\sigma_2+\cdots+m_t\sigma_t$, 其中 $m_i\in\mathbb{Z}$, $\sigma_i\in\Xi$, 那么 Ξ 在 $F^\times$ 中元素 f 上的作用定义为

$$f^{\Xi}=(f^{\sigma_1})^{m_1}(f^{\sigma_2})^{m_2}\cdots(f^{\sigma_t})^{m_t}. \tag{8}$$

进一步，定义

$$\Gamma_f=\left\{\Xi\in\mathbb{Z}[\Xi]\mid f^{\Xi}\in C\right\}.$$

容易验证 Γ_f 是群环 $\mathbb{Z}[\Xi]$ 的理想.

设 $h \in C[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$ 且不是单项式. 由定理 4.4 可知，$\varXi/\varXi_h$ 是自由群. 从而 $\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 可看作 $\mathbb{Z}$ 上的 Laurent 多项式环. $\varXi$ 到商群 $\varXi/\varXi_h$ 的自然投射诱导 $\mathbb{Z}[\varXi]$ 到 $\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 环同态 π_h, 易知 π_h 是满射. 给定多项式 h, Laurent 多项式环 $\mathbb{Z}[\varXi]$ 中元素 $\varXi$ 在环同态 π 的作用下的像记为 $\overline{\varXi}$. 固定与 h 相关的 $\varXi/\varXi_h$ 的一组基. 那么这组基诱导商群 $\varXi/\varXi_h$ 在 F 上的作用 (详见式 (6) 中定义的作用). 按照式 (8) 中定义, 商群 $\varXi/\varXi_h$ 的作用诱导 Laurent 多项式环 $\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 在 $F^{\times}$ 上的作用. 具体的作用如下所述. 设 $\overline{\varXi} = m_1\overline{\sigma}_1 + m_2\overline{\sigma}_2 + \cdots + m_t\overline{\sigma}_t \in \mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 以及 $f \in F^{\times}$. 定义

$$f^{\overline{\varXi}} = \left(f^{\overline{\sigma}_1}\right)^{m_1} \left(f^{\overline{\sigma}_2}\right)^{m_2} \cdots \left(f^{\overline{\sigma}_t}\right)^{m_t}. \tag{9}$$

由式 (7), (8) 以及 (9) 可知

$$\text{对于所有的 } \varXi \in \mathbb{Z}[\varXi] \text{ 都有,} \quad \frac{h^{\varXi}}{h^{\overline{\varXi}}} \in C. \tag{10}$$

下面的命题说明，如果 h 是不可约多项式，那么 $\mathbb{Z}[\varXi]/\varGamma_h \simeq \mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$.

命题 5.1 设 h 是 $C[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$ 中的多项式以及 π 是 $\varXi$ 到 $\varXi/\varXi_h$ 的自然投射诱导的 $\mathbb{Z}[\varXi]$ 到 $\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 的环同态. 如果 h 不可约，那么 $\ker(\pi) = \varGamma_h$.

证 如果 $h = q_i^{y_i}$, 那么 $\varXi = \varXi_h$. 从而 $\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h] = \mathbb{Z}$. 注意到在此情形下， $\tau_1 - 1, \tau_2 - 1, \cdots, \tau_n - 1$ 是 $\varGamma_h$ 的一组生成元. 所以命题成立.

设 h 不是单项式. 如果 $\varXi \in \ker(\pi)$, 那么 $h^{\overline{\varXi}} = 1$. 由式 (10) 可知， $h^{\varXi} \in C$, 从而 $\varXi \in \varGamma_h$. 另一方向，如果 $\varXi \in \varGamma_h$, 那么 $h^{\varXi} \in C$. 由式 (10) 可知， $h^{\overline{\varXi}} \in C$. 下面证明 $\overline{\varXi} = 0$.

如果 $\overline{\varXi} \neq 0$, 那么存在非零整数 $m_1, m_2, \cdots, m_t$ 和 $\varXi/\varXi_h$ 中两两不同的元素 $\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \cdots, \overline{\sigma}_t$ 使得 $\overline{\varXi} = m_1\overline{\sigma}_1 + m_2\overline{\sigma}_2 + \cdots + m_t\overline{\sigma}_t$. 因此,

$$\left(h^{\overline{\sigma}_1}\right)^{m_1} \left(h^{\overline{\sigma}_2}\right)^{m_2} \cdots \left(h^{\overline{\sigma}_t}\right)^{m_t} \in C.$$

因为 $h^{\overline{\sigma}_i}$ 不可约，所以 $h^{\overline{\sigma}} \in C$ 意味着存在整数 i, j, 其中 $1 \le i < j \le t$, 使得 $h^{\overline{\sigma}_i}/h^{\overline{\sigma}_j} \in C$, 即， $h^{\overline{\sigma}_i\overline{\sigma}_j^{-1}}/h \in C$. 由式 (7) 可知， $\frac{h^{\sigma_i\sigma_j^{-1}}}{h} \in C$. 再根据 $\varXi_h$ 的定义，则有 $\sigma_i\sigma_j^{-1} \in \varXi_h$. 从而 $\overline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_j$, 矛盾.

设 h 是 $C[{q_1}^{y_1}, {q_2}^{y_2}, \cdots, {q_n}^{y_n}]$ 中的多项式. 如果映射 $\phi: \varXi \longrightarrow \mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 对于所有 $\sigma, \tau \in \varXi$ 满足

$$\phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma) + \overline{\sigma}\phi(\tau),$$

则称映射 ϕ 为余圈 (cocycle). 进一步，如果存在公共的 $\overline{\varpi} \in \mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 使得

$$\text{对于所有的 } \sigma \in \varXi \text{ 都有} \quad \phi(\sigma) = (1 - \overline{\sigma})\overline{\varpi},$$

则称映射 ϕ 为余边缘 (coboundary). 容易验证余边缘一定是余圈. 反之未必成立. 下面证明，当 $\varXi/\varXi_h$ 不是循环群时，反方向也成立.

定理 5.2 设 $h \in C[q_1^{y_1}, q_2^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$. 若 h 的秩大于 1, 则由 $\varXi$ 到 $\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 的余圈一定是余边缘.

证 设 $\phi: \varXi \to \mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 是余圈. 那么对于所有的 $\sigma, \tau \in \varXi$ 有,

$$\phi(\sigma\tau) = \phi(\sigma) + \overline{\sigma}\phi(\tau) = \phi(\tau) + \overline{\tau}\phi(\sigma).$$

从而，

$$(1-\overline{\sigma})\phi(\tau)=(1-\overline{\tau})\phi(\sigma). \tag{11}$$

设 $\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_r$ 是自由阿贝尔群 $\varXi/\varXi_h$ 的一组基.那么 $\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 可看作 $\mathbb{Z}$ 上关于 $\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\cdots,\overline{\sigma}_r$ 的 Laurent 多项式环. 因为 h 的秩大于 1, 所以 $r>1$. 则有

$$(1-\overline{\sigma}_1)\phi(\sigma_2)=(1-\overline{\sigma}_2)\phi(\sigma_1).$$

又因为 $1-\overline{\sigma}_1$ 和 $1-\overline{\sigma_2}$ 不可约且互素，所以存在 $\overline{\omega}\in\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 使得

$$\phi(\sigma_1)=(1-\overline{\sigma_1})\overline{\omega}.$$

由式 (11) 可知，对于任意的 $\sigma\in\varXi$ 有

$$(1-\overline{\sigma}_1)\phi(\sigma)=(1-\overline{\sigma})\phi(\sigma_1)=(1-\overline{\sigma})(1-\overline{\sigma}_1)\overline{\omega}.$$

因为 $\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 是整环，所以

$$\phi(\sigma)=(1-\overline{\sigma})\overline{\omega}.$$

从而，映射 ϕ 是余边缘.

6 q- 超几何项的结构

设 g,h 是 $C[q_1^{y_1},q_2^{y_2},\cdots,q_n^{y_n}]$ 中的两个不可约多项式. 如果存在 $\tau\in\varXi$ 使得 $\frac{g^\tau}{h}\in C$, 则称 g 等价于 h, 记为 $g\sim h$. 容易验证 $\sim$ 是等价关系. 进而，如果 $g\sim h$, 则迷向子群 $\varXi_g$ 与 $\varXi_h$ 相同.

如果非零多项式 h 整除非零有理函数 f 的分子或者分母，则称 h 是 f 的因子.

对于 $F^\times$ 中的有理函数 f 而言，存在有限个非平凡且彼此不等价的不可约多项式 $h_1,h_2,\cdots,h_m$, 使得

$$f=h_1^{\varXi_1}h_2^{\varXi_2}\cdots h_m^{\varXi_m}, \tag{12}$$

其中 $\varXi_i\in\mathbb{Z}[\varXi]\setminus\varGamma_{h_i}$, $i=1,2,\cdots,m$. 我们称式 (12) 是 f 的 q- 平移齐次分解. 当式 (12) 成立时，对于 $i=1,2,\cdots,m$, f 有与 h_i 等价的不可约因子. 如果 $f=g_1^{\eta_1}g_2^{\eta_2}\cdots g_t^{\eta_t}$ 是 f 的另一个 q- 平移齐次分解，那么 $t=m$, 并且经过指标调整得， $h_1\sim g_1,h_2\sim g_2,\cdots,h_m\sim g_m$. 将 g_i 替换为 h_i, 则有

$$f={h_1}^{\zeta_1}{h_2}^{\zeta_2}\cdots{h_m}^{\zeta_m}.$$

对于 $i=1,2,\cdots,m$, $\varXi_i-\zeta_i\in\varGamma_{h_i}$. 上述结论可由多项式分解的唯一性验证. 根据命题 5.1, 式 (12) 可改写为

$$f=c\,h_1^{\overline{\varXi}_1}h_2^{\overline{\varXi}_2}\cdots h_m^{\overline{\varXi}_m}, \tag{13}$$

其中 $c\in C$, $\overline{\varXi_i}=\pi(\varXi_i)\in\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_{h_i}]$. 给定 f, $h_1,h_2,\cdots,h_m$, 由 $\pi_i(\varXi_i)=\pi_i(\zeta_i)$ 可知，式 (13) 中的 $\overline{\varXi}_i$ 是唯一确定的. 我们称 $\overline{\varXi}_i$ 是 f 关于 h_i 的 q- 平移赋值，记为 $\nu_{h_i}(f)$. 为方便表示，如果非平凡不可约多项式 h 的等价类中没有 f 的因子，则令 $\nu_h(f)$ 等于 0. 进一步可验证映射 $\nu_h: F^\times\to\mathbb{Z}[\varXi/\varXi_h]$ 满足如下结论

i) 对于所有的 $u,v\in F^{\times}$, $\nu_h(uv)=\nu_h(u)+\nu_h(v)$;

ii) 对于所有的 $\tau\in\Xi$ 和 $f\in F^{\times}$, $\nu_h(f^{\tau})=\overline{\tau}\nu_h(f)$, 其中 $\overline{\tau}$ 是 τ 在 Ξ/Ξ_h 中的自然同态像.

设 H 是 F 上的 q- 超几何项，定义映射

$$\begin{array}{cccc}\phi: & \Xi & \to & F^{\times}\\ & \sigma & \mapsto & \dfrac{H^{\sigma}}{H}.\end{array}$$

因为对于 $i=1,2,\cdots,m$ 都有 $\frac{H^{\tau_i}}{H}$ 属于 $F^{\times}$, 所以 $\frac{H^{\sigma}}{H}$ 属于 $F^{\times}$. 从而， ϕ 是良定义.

设 h 是 $C[q_1^{y_1},q_2^{y_2},\cdots,q_n^{y_n}]$ 中的不可约多项式．定义映射 $\phi_h=\nu_h\circ\phi$.

任给 $\sigma,\tau\in\Xi$. 由

$$\frac{H^{\sigma\tau}}{H}=\frac{H^{\sigma}}{H}\Big(\frac{H^{\tau}}{H}\Big)^{\sigma},$$

以及 ν_h 所满足的两个条件 i) 和 ii) 可知

$$\phi_h(\sigma\tau)=\phi_h(\sigma)+\overline{\sigma}\phi_h(\tau).$$

所以， ϕ_h 是余圈.

设 $f_i=\frac{H^{\tau_i}}{H}$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$. 设 $\nu_h(f_i)=\overline{\Xi}_i$ 并且 $\{\overline{\Xi}_1,\overline{\Xi}_2,\cdots,\overline{\Xi}_n\}$ 中至少有一个非零元素，换言之， $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 中有与 h 等价的不可约因子．进一步，假设 h 的秩大于 1. 由定理 5.2 知，余圈 ϕ_h 是余边缘，即：存在公共的 $\varpi\in\mathbb{Z}[\Xi/\Xi_h]$ 使得对于 $\sigma\in\Xi$ 都有 $\phi_h(\sigma)=(1-\overline{\sigma})\varpi$. 再由映射 ϕ_h 的定义可知，

$$\phi_h(\tau_i)=\nu_h\Big(\frac{H^{\tau_i}}{H}\Big)=\overline{\Xi}_i=(1-\overline{\tau}_i)\varpi,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

令 $r=h^{-\varpi}$. 那么对于 $i=1,2,\cdots,n$ 有， $h^{\overline{\Xi}_i}=\frac{r^{\overline{\tau}_i}}{r}$. 令 $G=\frac{H}{r}$. 则

$$\nu_h\Big(\frac{G^{\tau_i}}{G}\Big)=\nu_h\Big(\frac{H^{\tau_i}}{H}\Big)-\nu_h\Big(\frac{r^{\tau_i}}{r}\Big)=\overline{\Xi}_i-(1-\overline{\tau}_i)\overline{\varpi}=0.$$

这样我们就证明了如下引理.

引理 6.1 设 $C[q_1^{y_1},q_2^{y_2},\cdots,q_n^{y_n}]$ 中不可约多项式 h 的秩大于 1, 那么 q- 超几何项 H 可以分解为

$$H=rG,$$

其中 $r\in F^{\times}$, G 是 q- 超几何项并且对于 $i=1,2,\cdots,n$, $\nu_h\big(\frac{G^{\tau_i}}{G}\big)$ 等于 0.

定义 6.2 如果 q- 超几何项的 q- 差商不含秩大于 1 的因子，则称该 q- 超几何项为 q- 阶乘项.

将引理 6.1 应用于 H 的 q- 差商的差分齐次分解中每个秩大于 1 的不可约因子，得到如下定理.

定理 6.3 设 H 是 q- 超几何项. 那么存在有理函数 $f\in F^{\times}$ 和 q- 阶乘项 T 使得 $H=fT$.

下面我们描述 q- 阶乘项的结构. 设 h 是 $C[q_1^{y_1}, q_1^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]^{\times}$ 中的非零多项式. 如果 h 的秩是零，那么 h 是单项式. 如果 h 的秩的为 1, 那么存在群同构 $\overline{\psi}_h : \Xi/\Xi_h \to \mathbb{Z}$. 结合 Ξ 到 Ξ/Ξ_h 的自然投射，我们得到满射 $\psi_h : \Xi \to \mathbb{Z}$. 进一步，设

$$d_i = \psi_h(\tau_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

易知，所有的 d_i 都是整数. 由 ψ_h 是群同态可知，

$$\psi_h\left(\tau_1^{\ell_1}\tau_2^{\ell_2}\cdots\tau_n^{\ell_n}\right) = d_1\ell_1 + d_2\ell_2 + \cdots + d_n\ell_n. \tag{14}$$

设 $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ 是 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的下标分拆.

引理 6.4 设 h 是 $C[q_1^{y_1}, q_1^{y_2}, \cdots, q_n^{y_n}]$ 中秩为 1 的多项式. 则存在 Laurent 单项式 g, 唯一的整数 $t \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 以及单变元多项式 $P \in C[z]$ 使得

$$h = gP\left(q^{\sum_{s\in S_t} d_s y_s}\right),$$

其中 q 是 S_t 的代表元， $d_s = \psi_h(\tau_s)$.

证　由推论 4.5 可知，存在 Ξ_h 的一组基 $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_n$ 使得 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 是 Ξ 的一组基，其中 $\psi_h(\sigma_1) = 1$. 对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, 设 $\sigma_i = \tau_1^{m_{i1}}\tau_2^{m_{i2}}\cdots\tau_n^{m_{in}}$. 因为 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ 和 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 都是 Ξ 的基，所以矩阵 $M = (m_{ji})_{1\le j\le n, 1\le i\le n}$ 是可逆的. 令 $d_i = \psi_h(\tau_i)$. 又因为 $\psi_h(\sigma_1) = 1$, $\psi_h(\sigma_2) = \psi_h(\sigma_3) = \cdots \psi_h(\sigma_n) = 0$, 所以由式 (14) 可知

$$\boldsymbol{u}M = (1, 0, \cdots, 0), \quad \text{其中 } \boldsymbol{u} = (d_1, d_2, \cdots, d_n). \tag{15}$$

设 N 是删除 M 第一列后所得矩阵. 我们用 $\ker(N)$ 表示 N 的左核. 由式 (15) 可知， $\boldsymbol{u}$ 是 $\ker(N)$ 中的非零向量，并且

$$\gcd(d_1, d_2, \cdots, d_n) = 1. \tag{16}$$

设 $A = aq_1^{i_1y_1}q_2^{i_2y_2}\cdots q_n^{i_ny_n}$ 是 h 中的某一单项式， $B = bq_1^{j_1y_1}q_2^{j_2y_2}\cdots q_n^{i_ny_n}$ 是 h 中不等于 A 的另一单项式，其中 $a, b \in C^{\times}$. 不失一般性，我们进一步假设 $i_1 \ne j_1$, $1 \in S_1$ 且 $S_1 = \{1, 2, \cdots, \ell\}$. 由引理 4.3 可知， $\boldsymbol{v} = (i_1 - j_1, i_2 - j_2, \cdots, i_\ell - j_\ell, 0, 0, \cdots, 0)$ 是 $\ker(N)$ 中的非零向量. 因为 M 满秩，所以 N 的秩为 $m-1$. 因此， $\ker(N)$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上向量空间的维数为 1, 这意味着 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性相关. 从而 $d_{\ell+1} = d_{\ell+2} = \cdots = d_n = 0$, 并且

$$\boldsymbol{u} = (d_1, d_2, \cdots, d_\ell, 0, 0, \cdots, 0) \tag{17}$$

是 $\ker(N)$ 作为 $\mathbb{Q}$ 上向量空间的一组基.

设 $E = eq_1^{k_1y_1}q_2^{k_2y_2}\cdots q_n^{k_ny_n}$ 是 h 中出现的的任意单项式，其中 $e \in C^{\times}$. 那么

$$\boldsymbol{w} = (i_1 - k_1, i_2 - k_2, \cdots, i_n - k_n)$$

属于 $\ker(N)$. 因为 $\boldsymbol{u}$ 是 $\ker(N)$ 的基，所以存在 $r_E \in \mathbb{Q}$ 使得 $\boldsymbol{w} = r_E\boldsymbol{u}$. 事实上，由式 (16) 可知， $r_E \in \mathbb{Z}$. 从而

$$k_s = i_s - r_E d_s,\ s = 1, 2, \cdots, \ell, \quad \text{和} \quad k_t = i_t,\ t = \ell+1, \ell+2, \cdots, n. \tag{18}$$

设 q 是 S_1 的代表元. 令

$$D=q^{d_1y_1+d_2y_2+\cdots+d_\ell y_\ell},\quad U=q^{i_1y_1+i_2y_2+\cdots+i_\ell y_\ell}\quad 和\quad V=q_{\ell+1}^{i_{\ell+1}y_{\ell+1}}q_{\ell+2}^{i_{\ell+2}y_{\ell+2}}\cdots q_n^{i_ny_n}.$$

则 $E=eUD^{-r_E}V$. 因为 U 和 V 不依赖于 E, 所以 $\frac{h}{UV}$ 是 C 上关于 D 的单变元 Laurent 多项式 L. 从而存在整数 a 和单变元多项式 $P\in C[z]$ 使得 $L=D^aP(D)$. 所以 $h=(UVD^a)P(D)$. 令 $g=UVD^a$, 引理成立.

需要注意的是上述定理中的 h 未必是不可约多项式. 下面定义 q- 整线性多项式.

定义 6.5 对于多项式 $g\in C\left[q_1^{y_1},q_1^{y_2},\cdots,q_n^{y_n}\right]$ 而言, 如果存在整数 $t\in\{1,2,\cdots,k\}$, 两个整线性多项式 $\sum\limits_{s\in S_t}i_sy_s$ 和 $\sum\limits_{s\in S_t}j_sy_s$, 其中 $i_s,j_s\in\mathbb{Z}$, 以及单变元多项式 $P\in C[z]$ 使得

$$g=q^{\sum\limits_{s\in S_t}i_sy_s}P\left(q^{\sum\limits_{s\in S_t}j_sy_s}\right),$$

其中 q 是 S_t 的代表元, 我们称 g 是 q- 整线性的.

定理 6.6 如果 G 是 q- 阶乘项. 那么 G 的所有 q- 差商的不可约因子都是 q- 整线性的.

证 设 h 是 G 的任意一个 q- 差商的不可约因子. 由定义 6.2 可知, h 的秩是 0 或者 1. 如果 h 的秩为 0, 那么存在 $c\in C^\times$ 和 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $h=cq_i^{y_i}$. 如果 h 的秩为 1, 那么, 由引理 6.4 可知, 存在 $t\in\{1,2,\cdots,k\}$ 使得

$$h=MP\left(q^{\sum\limits_{s\in S_t}j_sy_s}\right),$$

其中 M 是 $q_1^{y_1},q_2^{y_2},\cdots,q_n^{y_n}$ 的 Laurent 单项式, $P\in C[z]$, q 是 S_t 的代表元, 以及 $j_s\in\mathbb{Z}$. 因为 h 不可约, 所以 M 只是关于 $\{q_j^{y_j}:j\in S_t\}$ 的 Laurent 单项式. 从而, h 是 q- 整线性的.

定义 6.7 设 $f\in F$. 如果存在 $t\in\{1,2,\cdots,k\}$ 使得 $f\in C\left(q_i^{y_i}:i\in S_t\right)$, 我们称 f 只与 S_t 相关.

设 G 是 q- 阶乘项, 由 q- 整线性的定义以及定理 6.6 可知,

$$f_i=\frac{G^{\tau_i}}{G}=f_{i1}\,f_{i2}\cdots f_{ik},\tag{19}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$, 并且对于 $j=1,2,\cdots,k$, f_{ij} 只与 S_j 相关. 进一步, 我们有如下结论.

命题 6.8 设 G 是 q- 阶乘项, $f_i=\frac{G^{\tau_i}}{G}$, 其中 $i=1,2,\cdots,n$. 如果 $i\in S_t$, 那么 f_i 只与 S_t 相关.

证 由式 (19) 知, 只要证明对于所有的 $\ell\neq t$, $f_{i\ell}\in C$ 即可.

设 $\ell\neq t$. 假设 j 是 S_ℓ 中任一整数. 由相容条件可知, $\frac{f_i^{\tau_j}}{f_i}=\frac{f_j^{\tau_i}}{f_j}$, 从而

$$\frac{f_{i\ell}^{\tau_j}}{f_{i\ell}}=\frac{f_{jt}^{\tau_i}}{f_{jt}}.$$

因为 $f_{i\ell}$ 只与 S_ℓ 相关, 所以 $\frac{f_{i\ell}^{\tau_j}}{f_{i\ell}}$ 只与 S_ℓ 相关. 同理可得, $\frac{f_{jt}^{\tau_j}}{f_{jt}}$ 只与 S_t 相关. 因为 $\ell\neq t$, 所以 S_ℓ 与 S_t 的交集为空集, 这意味着 $\frac{f_{i\ell}^{\tau_j}}{f_{i\ell}}\in C$. 由引理 2.4 知, 存在整数 $m_i,m_j\in\mathbb{Z}$ 使得

$$q_j^{m_j}=\frac{f_{i\ell}^{\tau_j}}{f_{i\ell}}=\frac{f_{it}^{\tau_i}}{f_{it}}=q_i^{m_i}.$$

因为 $j \notin S_t$, 所以 $m_i = m_j = 0$. 从而变量 $q_j^{y_j}$ 不会出现在 $f_{i\ell}$ 中. 又因为 j 是 S_ℓ 中的任意整数，所以 $f_{i\ell} \in C$.

由上述命题可得如下定理.

定理 6.9 混合的 q- 阶乘项 G 可以分解为非混合的 q- 阶乘项的乘积.

证　设 $f_i = \frac{G^{\tau_i}}{G}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ 为 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的下标分拆. 对 $t \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 令

$$\begin{cases} r_{ti} := f_i, & i \in S_t, \\ r_{ti} := 1, & i \notin S_t. \end{cases}$$

我们断言：对所有 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$\frac{r_{ti}^{\tau_j}}{r_{ti}} = \frac{r_{tj}^{\tau_i}}{r_{tj}}. \tag{20}$$

该断言证明如下. 如果 $i, j \notin S_t$, 则 $r_{ti} = r_{tj} = 1$. 于是式 (20) 成立. 如果 $i, j \in S_t$, 则由 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 相容得式 (20) 成立. 如果 $i \in S_t, j \notin S_t$, 由命题 6.8, r_{ti} 只与 S_t 相关，因为 $j \notin S_t$, 所以 $r_{ti}^{\tau_j} = r_{ti}$, 同理，$r_{tj}^{\tau_i} = r_{tj}$, 从而式 (20) 成立. 断言成立. 由此推出，$r_{t1}, r_{t2}, \cdots, r_{tn}$ 相容.

由文献 [9] 中定理 2 可知，存在 F 上的 q- 超几何项 G_t, 其 q- 差商分别为 $r_{t1}, r_{t2}, \cdots, r_{tn}$. 注意到 G_t 是非混合的 q- 阶乘项. 令

$$G' = \prod_{t=1}^{k} G_t.$$

容易验证 G 和 G' 的 q- 差商都相同. 于是 $G = cG'$, 其中 c 是一个常数.

Gel'fand 等人 [7] 与陈永川等人 [8] 已经刻画了非混合 q- 超几何项的乘法分解，那么根据定理 6.9, 可得混合 q- 超几何项的乘法分解.

参　考　文　献

[1] Ore O. Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. *J. Math. Pures Appl.*, 1930, **9**(4): 311–326.

[2] Sato M. Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part)-the English translation of Sato's lecture from Shintani's note. *Nagoya Math. J.*, 1990, **120**: 1–34. Notes by Takuro Shintani, Translated from the Japanese by Masakazu Muro.

[3] Hou Q. Algebraic Method in Combinatorics. PhD thesis, Nankai University, Tianjin, 2001.

[4] Hou Q. k-free recurrences of double hypergeometric terms. *Adv. in Appl. Math.*, 2004, **32**(3): 468–484.

[5] Abramov S A, Petkovšek M. On the structure of multivariate hypergeometric terms. *Adv. in Appl. Math.*, 2002, **29**(3): 386–411.

[6] Abramov S A. When does Zeilberger's algorithm succeed? *Adv. in Appl. Math.*, 2003, **30**(3): 424–441.

[7] Gel'fand I, Graev M, Retakh V. General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type. *Uspekhi Mat. Nauk* (*Russian*), *English translation in Russia Math Surveys*, 1992, **47**(4): 3–82.

[8] Chen W Y C, Hou Q H, Mu Y P. Applicability of the q-analogue of Zeilberger's algorithm. *J. Symbolic Comput.*, 2005, **39**(2): 155–170.

[9] Bronstein M, Li Z, Wu M. Picard–Vessiot extensions for linear functional systems. ISSAC '05 : Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, New York, USA, 2005.

[10] Almkvist G, Zeilberger D. The method of differentiating under the integral sign. *J. Symbolic Comput.*, 1990, **10**(6): 571–591.

[11] Chen S, Chyzak F, Feng R, Li Z. The existence of telescopers for hyperexponential-hypergeometric functions. *MM-Res. Preprints*, 2010, **29**: 239–267.

[12] Chen S, Feng R, Fu G, Li Z. On the structure of compatible rational functions. ISSAC '11 : Proceedings of the 2011 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ACM, New York, USA, 2011.

[13] Wilf H S, Zeilberger D. An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multisum/integral identities. *Invent. Math.*, 1992, **108**(3): 575–633.

[14] Zeilberger D. The method of creative telescoping. *J. Symbolic Comput.*, 1991, **11**(3): 195–204.

MULTIPLICATIVE DECOMPOSITIONS OF MULTIVARIATE q-HYPERGEOMETRIC TERMS

CHEN Shaoshi

(*Department of Mathematics, North Carolina State University, Raleigh* 27695)

FENG Ruyong FU Guofeng KANG Jin

(*Key Laboratory of Mathematics Mechanization, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190)

Abstract In this paper, we prove that a mixed q-hypergeometric term is a product of a rational function and a q-factorial term. This generalizes the q-analogue of the Ore-Sato theorem from unmixed hypergeometric terms to mixed ones.

Key words q-hypergeometric term, q-factorial term, multiplicative decomposition, structure theorem.