

抽象代数作业题 (1)

① 等价关系与偏序关系

(1.1) 设 R 为含么交换环. R 中元素 a, b 称为相伴 如果存在 R 中可逆元 u 使得 $a = ub$, 记为 $a \sim b$. 证明相伴关系为等价关系.

(1.2) 整数 24 的所有真因子集合 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ 关于整除关系构成偏序集. 找出该集合中的极大元, 极小元. 该集合中是否有最大元与最小元?

(1.3) 证明任何有限偏序集必有极大元与极小元.

② 群

(2.1) 设 R 为含么交换环. 证明 R 中所有可逆元构成群 (关于乘法).

(2.2) 描述所有可能的 4 阶群.

(2.3) 设 G'' 为群 G 的换位子群. 则 G/G'' 为交换群. (给出证明)

(2.4) 证明阶数为 24 的群不一定是单群. (提示: 参考课本 82 页关于 72 阶群的例子)

③ 环

(3.1) 证明多项式环 $\mathbb{R}[x, y]$ 中理想 $\langle x, y \rangle$ 不是主理想 (由此可知 UFD 不一定是 PID)

(3.2) 证明在环 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ 中 $3, 2+\sqrt{5}, 2-\sqrt{5}$ 皆为不可约元 (由此可知 $9 = 3^2 = (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})$, 3 不是素元)

