

作业题 (=)

1) 设 F 为域且 $\text{char}(F) = p \neq 0$. 则 $\forall a, b \in F$, 都有

$$(a+b)^{p^m} = a^{p^m} + b^{p^m}, \text{ 其中 } m \in \mathbb{N}.$$

2) 设 E 为 F 的扩域且 $\alpha, \beta \in E$ 为 F 上代数元, 则 $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$ 皆为 F 上代数元

3) 设 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 且 $F = \mathbb{Q}(\alpha)$. 计算 $\beta = \frac{1}{1+\alpha}$ 的逆元素 (在 F 上)

4) 设 A 为 $n \times n$ 整数矩阵 ($A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$). 证明

$$\mathbb{Z}(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{Z}^n \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0} \}$$

构成一个 $\mathbb{Z}$ -模.

5) 证明: 设 $\{N_i\}_{i \in I}$ 为 R -模 M 的子模, 则

$N = \bigcap_{i \in I} N_i$ 仍为 M 的 R -子模.

6) 证明 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$ -模, 并且存在有限个 $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ 使得 $\mathbb{Q} = \langle r_1, \dots, r_n \rangle_{\mathbb{Z}}$.

