

抽象代数 II. 作业题 (4).

1. 证明: $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$ -模, 它的任一有限生成的子模都是循环模. 由此证明, $\mathbb{Q}$ 不是一个自由 $\mathbb{Z}$ -模.
2. 设 R 为交换环. 证明 $\text{Hom}(R^{(m)}, R^{(n)}) = \{\phi: R^{(m)} \rightarrow R^{(n)} \mid \phi \text{ 为模同态}\}$ 可看成 R -模并且为自由模, 其秩为 $m \cdot n$.
3. 设 R 为交换环. 且 M 为自由 R -模. 若 $\text{rank}(M) = n$ 且 $A := \{a_1, \dots, a_n\}$ 为 M 的一组生成元集合. 证明 A 为 M 的一组基. (提示: 见讲义最后两页: -)
4. 设 M 为自由 R -模且 p 为 M 的一个直和项, 即存在 N 为 M 的子模使得 $M = p \oplus N$. 证明 p 为投射模.
5. 设 M 为一个有限生成 R -模 N 为一个子模. 证明: 若 N 是 M 的一个直和项, 则 N 也是有限生成的.
6. 任一 R -模都是某个自由 R -模的同态象, 即任一 R -模 M 都存在自由模 N 与模同态 $\phi: N \rightarrow M$ 且 ϕ 为满射 ($\text{Im}(\phi) = M$).

