

作业题-6

1. 设 M 为主理想整环 R 上循环模. 证明 M 的所有子模都是循环的.

2. 设 p 为 PID R 中素元, M 为 R 上有限生成模且 $\text{ann}_R(M) = (p)$.

则 ① $R/(p)$ 为域且 M 可以看作域 $R/(p)$ 上的模. (验证良定义: $\bar{r} \cdot x = r \cdot x \quad \forall \bar{r} \in R/(p), x \in M$)

② 证明: M 的第一标准分解: $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$

中有 $\text{ann}_R(M_i) = (p)$, 且 M_i 看成域 $R/(p)$ 上线性空间的维数为 1, $r = \dim_{R/(p)}(M)$, 即 M 看成域 $R/(p)$ 上线性空间的维数. (由此可知, r 由 M 所唯一决定)

3. 设 M 为 PID R 上有限生成的扭模. 设 M 的第一标准分解

$$\text{为 } M = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j_i=1}^{r_i} N_{i,j_i}, \quad \text{ann}_R(N_{i,j_i}) = (p_i^{n_{ij_i}}) \\ (i=1, \dots, s, j_i=1, \dots, r_i)$$

① 证明: $\forall q \in \{p_1, \dots, p_s\}$, 我们有 (不妨设 $q = p_i$)

$$M/qM \cong N_{i,1}/qN_{i,1} \oplus \dots \oplus N_{i,r_i}/qN_{i,r_i}$$

其中 $N_{i,j_i}/qN_{i,j_i}$ 为域 $R/(q)$ 上-维线性空间且 M/qM 看成域 $R/(q)$ 上线性空间的维数为 r_i (由此可知, r_i 由 M 所唯一决定)

② 证明: $\forall k \in \mathbb{N}$, $p_i^k M / p_i^{k+1} M$ 可以看成域 $R/(p_i)$ 上

$$\text{的线性空间, 并且 } p_i^k M / p_i^{k+1} M \cong p_i^k N_{i,1} / p_i^{k+1} N_{i,1} \oplus \dots \oplus p_i^k N_{i,r_i} / p_i^{k+1} N_{i,r_i}$$



$\frac{P_i^k M}{P_i^{k+1} M}$ 作为域 $R/(P_i)$ 上线性空间的基表为元素组

$$p_i^{n_{i,1}}, \dots, p_i^{n_{i,r_i}}$$

中 p_i^t ($t \geq k+1$) 的个数 (提示: 证明 $k \geq n_{i,j_i}$ 时, $\frac{P_i^k N_{i,j_i}}{P_i^{k+1} N_{i,j_i}} = \{0\}$, 否则为域 $R/(P_i)$ 上一维线性空间)

③ 设 N 为 M 的循环子模且 $\text{ann}_R(N) = (P^n)$, 则 $N \cong R/(P^n)$.

(利用②)

④ 证明: 设 $\lambda_{i,k} = \dim_{R/(P_i)} \left(\frac{P_i^k M}{P_i^{k+1} M} \right)$

则

$$n_{i,j_i} = \#_{\geq 0} \{ \lambda_{i,k-j_i+1} \mid k \in \mathbb{N} \}, \quad j_i = 1, \dots, r_i$$

$\#_{\geq 0}(A)$ 表示集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 中非零元素的个数

(由此可知, 元素组 $\{p_i^{n_{i,j_i}}\}$ 由 M 所唯一决定)

由上作也是很容易证明, PID R 上有限生成模的分解形式中元素组 $p_i^{n_{i,1}}, \dots, p_i^{n_{i,r_i}}$ 由 M 所唯一决定, 这证明了分解形式的唯一性. 但是请注意 N_{i,j_i} 这些子模是不唯一的.

