抽象代数作业(7)

1. 设G为阿贝尔群，则G可以看成$\mathbb{Z}$-模，其上$\mathbb{Z}$-作用定义为：

$$n\cdot g = g^n \quad \forall n\in\mathbb{Z},\ g\in G.$$

(i) 证明：$|G|$有限 $\Leftrightarrow$ G为有限生成$\mathbb{Z}$扭模

设G为有限生成阿贝尔群，则由$\mathbb{Z}$-模的分解定理，G可分解为

$G = G_0 \oplus G_1$，其中G_0为G的扭模，G_1为G的自由子模.

(ii) 证明：$|G_0|$有限，$|G|$无限

设 $n=|G_0| = p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$，其中$p_i$为素数. 于是

$$M(n)=\{g\in G \mid n\cdot g=e\} = G$$

因此 $M(n) = G = M(p_1^{m_1}) \oplus \cdots \oplus M(p_s^{m_s})$

(iii) 证明 G的p_i-分量 $M(p_i^{m_i})$ 为G的西罗p_i-子群且是唯一的Sylow p_i-子群.

进一步将每个$M(p_i^{m_i})$分解成一些循环p-子群的直和. 则得到如下定理（有限生成阿贝尔群的结构）

设G为有限生成阿贝尔群. 则G可分解为r个无限循环群与若干个有限循环p-子群的直和. 这些有限循环p-子群的阶数 $p_i^{e_{ij}}$, $i=1,2,\dots,t$, $j=1,2,\dots,r_i$ 构成G的一组完全不变量，即两个有限生成阿贝尔群同构的充要条件是它们的不变量相同.

2. 试定出全部阶为392的交换群互不同构的类型

3. 设A为域F上n维线性空间V的线性变换. 证明：

V为一循环空间，即存在 $v\in V$ 使得 $V=\langle v, A(v), \dots, A^{n-1}(v)\rangle$

$\Leftrightarrow$ A的特征多项式与极小多项式相等

4. 设 $A\in M_n(\mathbb{C})$. 证明：

A相似于一对角矩阵 $\Leftrightarrow$ A的极小多项式只有单根

扫描全能王 创建