

模论

§1. 模的定义与基本性质

§1.1 模论时常被称为环上的线性代数。交换群, 环与线性空间都是特殊的模。模是代数学中一个最基本的概念之一。

线性代数主要研究线性方程组及其解的结构。我们从讨论在环中解线性方程开始引入模的基本概念:

设 $a, b \in \mathbb{Z}$, 考虑方程: $ax + by = 0$

记 $S(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid ax + by = 0\}$ 所有整数解全体。

① $S(a, b)$ 关于(向量)加法构成交换群。即 $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S(a, b)$
 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in S(a, b)$ 。

② $\forall r \in \mathbb{Z}, (x_0, y_0) \in S(a, b)$, 都有 $(rx_0, ry_0) \in S(a, b)$ 。

③ 设 $g = \gcd(a, b)$, 则 $a = \bar{a}g, b = \bar{b}g$ 。易知 $(\bar{b}, -\bar{a}) \in S(a, b)$

下面证明 $S(a, b) = \mathbb{Z} \cdot (\bar{b}, -\bar{a}) = \{(r\bar{b}, -r\bar{a}) \mid r \in \mathbb{Z}\}$ 。只需证明

$\forall (x_0, y_0) \in S(a, b)$, 都有 $x_0 = r\bar{b}$ 且 $y_0 = -r\bar{a}$ for some $r \in \mathbb{Z}$ 。

$$ax_0 + by_0 = 0 \Rightarrow \bar{a}x_0 + \bar{b}y_0 = 0 \Rightarrow \bar{a}x_0 = -\bar{b}y_0$$

$$\text{由于 } \gcd(\bar{a}, \bar{b}) = 1, \bar{a} \mid -\bar{b}y_0 \Rightarrow \bar{a} \mid y_0 \text{ 且 } \bar{b} \mid x_0 \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = r\bar{b} \\ y_0 = -r\bar{a} \end{matrix}$$

更一般地, 我们考虑方程组: $AX = 0$, 其中 $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$

对 所有 $X \in \mathbb{Z}^n$ 。该解集的结构便是 $\mathbb{Z}$ -模的典型例子。



定义. 设 R 为含幺环, M 为交换群. 若存在映射 (称为 R 在 M 上的作用)

$$\begin{aligned} R \times M &\rightarrow M \\ (a, x) &\mapsto ax \end{aligned}$$

- 满足下列条件:
- 1) $a \cdot (x+y) = ax + a \cdot y, \forall a \in R, x, y \in M$
 - 2) $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \forall a, b \in R, x \in M$
 - 3) $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x) \quad \forall a, b \in R, x \in M$
 - 4) $1 \cdot x = x$

则 M 称为环 R 上的左模或左 R -模. 类似我们可以定义右模或右 R -模.

注 设 M 是右 R -模, $\phi: R \rightarrow R'$ 为环的同构, 即 $\phi(ab) = \phi(b)\phi(a)$. 则我们可以把 M 看成左 R' -模. 令 $a' = \phi(a)$, 定义左模中作用:

$$a' \cdot x = x \cdot a$$

当 R 为交换环时, 左 R -模和右 R -模一致.

例子

- 1) 设 G 为交换群. 则 G 可以看成 $\mathbb{Z}$ -模. 设 $g \in G, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{定义: } n \cdot g = \underbrace{g + g + \dots + g}_n$$

交换群

则模的运算皆满足. (若 G 用乘法表示运算时, 定义 $n \cdot g = g^n$)

- 2) 设 $R = F$ 为域, $M = V$ 为 F 上的线性空间. R 在 M 上的作用为 F 元素与 V 中向量的数乘. 于是 V 就是左 F -模.

线性空间

因为 F 交换, V 同时也是右 F -模.

- 3) 设 R 为含幺环, $R_+ = (R, +)$ 为 R 的加法群. 规定 R 在 R_+ 上的作用, $a \in R, x \in R_+ \quad ax = a(x)$ (左乘 a)

则 R_+ 是左 R -模. 若规定 $xa = a_r(x)$ (右乘 x), 则 R_+ 为右 R -模.

环



4) 设 V 为域 F 上的线性空间. $A: V \rightarrow V$ 线性变换.

$R = F[x]$ 为域 F 上多项式环. $M = V$
 定义 $F[x]$ 在 V 上作用: 对 $f \in F[x], \vec{\alpha} \in V$

$$f(x) \cdot \vec{\alpha} = f(A)(\vec{\alpha})$$

注意 $f(A)$ 仍为 V 到 V 的线性映射. 设 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

$a_i \in F$ 则 $f(A) = a_0 \cdot E + a_1 A + \dots + a_n A^n$, E 为单位变换 (恒同)

$$f(x) \cdot \vec{\alpha} = f(A)(\vec{\alpha}) = a_0 \vec{\alpha} + a_1 A(\vec{\alpha}) + \dots + a_n A^n(\vec{\alpha})$$

(回顾线性变换的特征值与特征向量: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\vec{x}$ 特征向量, λ 特征值.)
 我们在研究有理数域上有限生成模的结构后, 将重点从模的向量
 研究线性变换对任意环的 Jordan 标准型.

5) 设 $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}^n$, 规定 R 在 $\mathbb{Z}^n$ 上作用为: $\forall r \in \mathbb{Z}$,

$$\vec{\alpha} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad r \cdot \vec{\alpha} = (ra_1, \dots, ra_n) \in \mathbb{Z}^n$$

则 $\mathbb{Z}^n$ 成为 $\mathbb{Z}$ -模.

§1.2 模的基本性质: 以后我们讨论的 R -模皆为左 R -模.

设 R 为含幺环. M 为左 R -模, 则

① $a \cdot 0 = 0$

$$a \cdot (0) = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$$

② $a \cdot (-x) = -a \cdot x$

$$0 = a \cdot (0) = a \cdot (x + (-x)) = a \cdot x + a \cdot (-x) \Rightarrow a \cdot (-x) = -a \cdot x$$

类似地证明. ③ $0 \cdot x = 0, (-a) \cdot x = -(a \cdot x)$

④ $a \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a \cdot x_i \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x$



定义 设 M 为 R -模且
 设 M 的一个非空子集 N 满足如下条件:

1) N 为 M 的子群

2) 吸收律 (R 作用不变): $\forall a \in R, y \in N$ 都有 $ay \in N$

则称 N 为 M 的 子模, $\{0\}$ 与 M 本身称为 M 的平凡子模.

- 例子
- ① M 为 F 上线性空间时, M 的子模与 V 的子线性空间一致
 - ② 设 M 为交换群. 则 M 的任一子群都是子模. 反之亦然为子模
 - ③ 环 R 看成 R -模的子模即为 R 的 (左) 理想.
 - ④ 设 W 为 $F[x]$ -模 V 的子模, 则 $\forall f \in F[x], x \in W$ 都有 $f(x) \cdot x \in W$. 取 $f = x$, 则有 W 为 A 不变子空间, 反之, 任一 A 不变子空间都是 V 的子模.

性质 1 设 $\{N_i\}_{i \in I}$ 为 R -模 M 的一族子模, 则 $\bigcap_{i \in I} N_i$ 仍为 M 的子模

证明: $\forall x, y \in \bigcap_{i \in I} N_i \Rightarrow \forall i \in I, x, y \in N_i$
 $\Rightarrow \forall i \in I, x \pm y \in N_i$
 $\Rightarrow x \pm y \in \bigcap_{i \in I} N_i$
 $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} N_i$ 为 M 的子群

$\forall a \in R, x \in \bigcap_{i \in I} N_i \Rightarrow \forall i \in I, x \in N_i \Rightarrow \forall i \in I, ax \in N_i$
 $\Rightarrow ax \in \bigcap_{i \in I} N_i$

所以 $\bigcap_{i \in I} N_i$ 为 M 的子模



定义 设 S 为 R -模 M 的子集. 包含 S 的 M 的所有子模的交, 称为 M 中由 S 生成的子模, 记为 $\langle S \rangle_M$. 事实上. (右子模)

$$\langle S \rangle_M = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i x_i \mid a_i \in R, x_i \in S \right\}$$

若 M 中存在有限个元素 $a_1, \dots, a_n$ 使得 $M = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. 则称 M 为有限生成子模. 若 $n=1$, 则称 M 为循环 R -模

设 N_1, N_2 为 M 的子模. 定义 N_1 与 N_2 的和为 $N_1 + N_2 = \{ x+y \mid x \in N_1, y \in N_2 \}$

例 2 $S(a, b) = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid ax+by=0 \}$ 为 $\mathbb{Z}^2$ 的子模

其生成元为 $S(a, b) = \langle (b, -a) \rangle$ $g = \gcd(a, b)$
 $a = g \cdot \bar{a}, b = g \cdot \bar{b}$

定义 设 N 为 R -模 M 的子模. N 称为 M 的子模为正规子模. 则可作商模 $\bar{M} = M/N$, 仍称为子模. 规定 R 在 $\bar{M}$ 上作用: $a \in R, \bar{x} \in \bar{M}, a \cdot \bar{x} = \overline{ax}$ (即 $a \cdot (x+N) = (ax)+N$)

证明 $\bar{x} \in x+N, \bar{x}-x \in N \Rightarrow a(\bar{x}-x) \in N$

$$\Rightarrow a \cdot (x+N) = (a\bar{x})+N = (ax)+N$$

可验证 $\bar{M}$ 关于上述定义的作用为 R -模, 称为 M 对 N 的商模

例 2 设 W 为 A -双模 (见 1.1). 则 W 可视为 V 上的 $F[x]$ -子模

从 $A: V \rightarrow V$ 出发, 可定义 A 交换. $\bar{A}: V/W \rightarrow V/W$

可验证该交换为良定义, 并且是 V/W 上的线性变换. $x+W \mapsto Ax+W$

