抽象代数 II 模论第二讲 授课时间：2019年9月26日

讲义-①

§1 模的同态及同态定理

<u>定义1.1</u> 设 M, M' 为 R-模，若存在 $\eta: M \to M'$ 满足：

1) η 是群同态：$\eta(x+y) = \eta(x) + \eta(y)$，$\forall x, y \in M$

2) $\eta(ax) = a\eta(x)$，$\forall a \in R, x \in M$

则称映射 η 为 M 到 M' 的模同态或 R-同态。若 η 为双射，则称 η 为模同构。

<u>FACT 1.1</u> 设 $\eta: M \to M'$ 为 R-模同态且 η 为双射，则 η^{-1} 也为模同态。

证明：$\forall x', y' \in M'$，因为 η 为双射，所以存在唯一 $x, y \in M$ 使得 $x' = \eta(x)$ 且 $y' = \eta(y)$。则

① $\eta^{-1}(x'+y') = \eta^{-1}(\eta(x)+\eta(y)) = \eta^{-1}(\eta(x+y)) = x+y$

$= \eta^{-1}(x') + \eta^{-1}(y')$

② $\eta^{-1}(ax') = \eta^{-1}(a\eta(x)) = \eta^{-1}(\eta(ax)) = ax = a\eta^{-1}(x')$.

模同态基本定理：设 $\eta: M \to M'$ 为模同态，则 $\ker(\eta)$ 和 $\eta(M)$ 分别为 M 和 M' 的子模，且 $\bar{\eta}: M/\ker(\eta) \to \eta(M)$，$\bar{x} = x + \ker(\eta) \mapsto \eta(x)$ 为模同构。

证明：由 $\bar{\eta}$ 的定义可知，$\bar{\eta}$ 为双射，只需证明 $\bar{\eta}$ 为模同态：$\forall \bar{x}, \bar{y} \in M/\ker(\eta)$，

① $\bar{\eta}(\bar{x}+\bar{y}) = \bar{\eta}(\overline{x+y}) = \eta(x+y) = \eta(x)+\eta(y) = \bar{\eta}(\bar{x}) + \bar{\eta}(\bar{y})$

② $\bar{\eta}(r\bar{x}) = \bar{\eta}(\overline{rx}) = \eta(rx) = r\eta(x) = r\bar{\eta}(\bar{x})$.

定理1. 设 $\eta: M \to M'$ 为满的模同态. 令

$$S = \left\{ H \subseteq M \;\middle|\; \begin{array}{l} H\text{为}M\text{的子模} \\ \text{且包含 } \ker(\eta) \end{array} \right\},$$

$$S' = \{ H' \subseteq M' \mid H'\text{为}M'\text{的子模} \}.$$

则 $\bar{\eta}: S \to S'$, $H \mapsto \eta(H)$ 为 S 到 S' 的双射.

证明. H 为 M 的子模, η 为 M 到 M' 的同态, 可以验证 $\eta(H)$ 为 M' 的子模. 所以 $\bar{\eta}$ 的定义是合理的.

单射性: 设 $H_1, H_2 \in S$. 若 $\bar{\eta}(H_1) = \bar{\eta}(H_2)$, i.e. $\eta(H_1) = \eta(H_2)$.

$\forall x_1 \in H_1$, $\exists x_2 \in H_2$ s.t. $\eta(x_1) = \eta(x_2) \Rightarrow \eta(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker(\eta) \subseteq H_2 \Rightarrow x_1 \in H_2 \Rightarrow H_1 \subseteq H_2$

对称地可以证明 $H_2 \subseteq H_1$, 所以有 $H_1 = H_2$. 即 $\bar{\eta}$ 为单射

满射性: 对 $\forall H' \in S'$, 只需证明 $\bar{\eta}^{-1}(H') \in S$.

由于 $0' \in H'$, 则 $\ker(\eta) = \eta^{-1}(0) \Rightarrow \ker(\eta) \subseteq \bar{\eta}^{-1}(H')$.

$\bar{\eta}^{-1}(H') = \eta^{-1}(H')$ 为 M 的子模: ① $x, y \in \eta^{-1}(H') \Rightarrow \eta(x), \eta(y) \in H'$

$\Rightarrow \eta(x+y) \in H' \Rightarrow x+y \in \eta^{-1}(H')$

② $\forall r \in R$, $x \in \eta^{-1}(H') \Rightarrow \eta(x) \in H'$

$\Rightarrow r\eta(x) \in H' \Rightarrow \eta(rx) \in H'$

$\Rightarrow rx \in \eta^{-1}(H')$

于是 $\bar{\eta}^{-1}(H')$ 为 S 中元素, 即 $\bar{\eta}$ 为满射.

定理（第三同态定理）

设 $\eta: M \to M'$ 为 R-模同态，H 为包含 $\ker(\eta)$ 的子模，则

$$\bar{\eta}: M/H \to \eta(M)/\eta(H) \text{ 为模同构}$$

$$x+H \longmapsto \eta(x)+\eta(H) \quad \forall x \in M$$

进一步有，$M/H \cong (M/N)/(H/N)$，其中 $N=\ker(\eta)$.

<u>证明</u>

$$M \xrightarrow{\eta} \eta(M) \xrightarrow{\pi_{\eta(H)}} \eta(M)/\eta(H)$$

$$x \longmapsto \eta(x) \longmapsto \eta(x)+\eta(H)$$

$\tilde{\eta}: M \to \eta(M)/\eta(H)$ 为满同态，因为 η 与 π 均为满同态

$$x \longmapsto \eta(x)+\eta(H)$$

$\tilde{\eta}(x) = 0+\eta(H) \Rightarrow \eta(x) \in \eta(H) \Rightarrow \exists y \in H \text{ s.t. } \eta(x)=\eta(y)$

$\Rightarrow \eta(x-y)=0 \Rightarrow x-y \in \ker(\eta) \subseteq H \Rightarrow x \in H$

$\Rightarrow \ker(\tilde{\eta}) \subseteq H$

另一方面，$\forall x \in H$，$\tilde{\eta}(x) = \eta(x)+\eta(H) = \eta(H) = \bar{0} \Rightarrow H \subseteq \ker(\tilde{\eta})$

则有 $\ker(\tilde{\eta}) = H$. 由模同态基本定理，$\bar{\eta}: M/H \to \eta(M)/\eta(H)$ 为模同构.

进一步有：

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[rr, bend right, "\Phi"'] & M/N \arrow[r, "\pi_{H/N}"] & (M/N)/(H/N) \end{tikzcd}$$

$\Phi: M \to (M/N)/(H/N)$ 为满同态.

$$x \longmapsto (x+N)+H/N$$

由模同态基本定理可知

$$M/H \cong (M/N)/(H/N).$$

$\Phi(x) = x+N+H/N = 0+H/N$

$\Rightarrow x+N \in H/N \Rightarrow x \in H$

$\Rightarrow \ker(\Phi) \subseteq H$

$\forall x \in H$，$\Phi(x) = x+N+H/N = 0+H/N$

$\Rightarrow H \subseteq \ker(\Phi)$

定理（第三同构定理）

设 H,N 为 R-模 M 的两个子模，则有

$$(H+N)/N \cong H/(H\cap N)$$

而且映射 $x+N \longmapsto x+(H\cap N)$ 为模同构

证明：
$$\eta: H \xrightarrow{i} H+N \xrightarrow{\pi} (H+N)/N \quad \text{为满同态}$$
$$x \longmapsto x \longmapsto x+N$$

并且 $\ker(\eta)=H\cap N \Rightarrow H/(H\cap N) \cong (H+N)/N$

推论（线性空间的维数公式）

设 W,U 为线性空间 V 的子空间且 $\dim(V)<+\infty$，则有

$$\dim(W+U)+\dim(W\cap U)=\dim(W)+\dim(V).$$

证明：因为 $(W+U)/U \cong W/(W\cap N)$，则有

$$\dim\left((W+U)/U\right) = \dim\left(W/W\cap N\right)$$

$$\Rightarrow \dim(W+U)-\dim(U) = \dim(W)-\dim(W\cap N)$$

$$\Rightarrow \dim(W+U)+\dim(W\cap W) = \dim(W)+\dim(U).$$

群作用与环作用（R-模结构）：

定义：设 G 为群，X 为非空集合。G 在 X 上的作用为映射：

$$\phi: G\times X \longrightarrow X$$
$$(g,x) \longmapsto g\cdot x$$

满足如下性质：1) $\phi(e,x)=x,\ \forall x\in X$ $\quad(e\cdot x=x\ \ \forall x\in X)$

2) $\phi(g_1,\phi(g_2,x))=\phi(g_1g_2,x),\ \forall g_1,g_2\in G,\ x\in X$

$\quad((g_1g_2)\cdot x=g_1\cdot(g_2\cdot x),\ \forall g_1,g_2\in G,\ x\in X)$

设 $S(X)$ 为 X 上所有可逆变换(双射)构成的全体，称为 X 的全变换群. 若 G 作用于 X，则可诱导出群同态：

$$\eta: G\to S(X)$$

$\forall g\in G$，定义 $\eta(g): X\to X,\ x\mapsto g\cdot x$ $\qquad$ $\eta(g^{-1})$ 为 $\eta(g)$ 的逆映射

$\forall x\in X$

$$\eta(g_1g_2)(x)=(g_1g_2)\cdot x=g_1\cdot(g_2\cdot x)=g_1\cdot(\eta(g_2)(x))=\eta(g_1)(\eta(g_2)(x))=(\eta(g_1)\cdot\eta(g_2))(x)$$

即有 $\eta(g_1\cdot g_2)=\eta(g_1)\cdot\eta(g_2)$.

另一方面，若 $\eta: G\to S(X)$ 为群同态，则可定义 G 在 X 上作用为

$$\phi: G\times X\longrightarrow X,\quad (g,x)\longmapsto \eta(g)(x)$$

当 $\mathrm{Ker}(\eta)=\{e\}$ 时，称群作用为忠实的(faithful).

R-模结构 (环作用)

设 R 为含幺环. M 为交换群. 考虑 M 的全部自同态构成的集合，记为 $\mathrm{End}(M)$. 在 $\mathrm{End}(M)$ 上定义环结构：

$\forall \eta,\xi\in\mathrm{End}(M)$，$\eta+\xi: M\to M$，$(\eta+\xi)(x)=\eta(x)+\xi(x)$ $\qquad$ 则 $(\mathrm{End}(M),+)$ 为交换群.

η 与 ξ 的乘法为映射的复合；满足结合律.

分配律：$\forall\ \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in End(M)$

$\forall x \in M$,
$$\begin{aligned}(\eta_1(\eta_2+\eta_3))(x) &= \eta_1((\eta_2+\eta_3)(x)) \\ &= \eta_1(\eta_2(x)+\eta_3(x)) \\ &= \eta_1\eta_2(x) + \eta_1\eta_3(x) \\ &= (\eta_1\eta_2+\eta_1\eta_3)(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \eta_1(\eta_2+\eta_3) = \eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3$$

另一分配律验证类似. 则 $(End(M), +, \cdot)$ 为环. 称为 M 的自同态环. 下面来说明 R-模结构中环作用与 R 到 $End(M)$ 的环同态相对应.

设 M 为 R-模. 即 R 在 M 上作用：
$$\phi: R\times M \longrightarrow M,\quad (r, x) \longmapsto r\cdot x$$

满足：$\forall r_1, r_2 \in R,\ x, y \in M$

1) $(r_1+r_2)(x) = r_1\cdot x + r_2\cdot x$

2) $r_1(x+y) = r_1 x + r_1 y$

3) $(r_1 r_2)(x) = r_1(r_2\cdot x)$

由环作用可以诱导出环同态 $\phi: R \longrightarrow End(M)$

$\forall r\in R$, 定义 $\phi(r): M \longrightarrow M,\ x \longmapsto r\cdot x$, 则 $\phi(r)$ 为 M 的自同态（验证一下）

另一方面，设 $\phi: R \longrightarrow End(M)$ 为环同态，则可定义 R 在 M 上作用为：
$$\eta: R\times M \longrightarrow M,\quad (r, x) \longmapsto \phi(r)(x)$$
可以验证 η 满足环作用三条性质

§2. 循环模与自由模.

现在我们开始讨论一类比较特殊的模.

定义. 设 M 为 R 模, 若存在 $x\in M$ 使得 $M=R\cdot x=\{rx \mid r\in R\}$
(即 M 由元素 x 生成)
则称 M 为循环 R-模.

例子 ① 循环群 $\langle a\rangle$ 也是交换的, 则可以看成 $\mathbb{Z}$-模, 即为循环 $\mathbb{Z}$-模
② 含幺环 R 看成自身的模, 也是循环模, 因为 $R=R\cdot 1$, 1 为 R 的单位元.

设 M 为 R-模, $x\in M$, 考虑映射 $\phi_x: R\to R\cdot x$
$r\mapsto r\cdot x$

该映射为 R-模同态. 且 $\ker(\phi_x)=\{r\in R \mid r\cdot x=0\}$ 为 R 的左理想

称之为元素 x 的零化理想或零化子 (annihilator), 记为 $\mathrm{ann}_R(x)$.

若 ϕ_x 为满射, 则有 $R\cdot x\cong R/\mathrm{ann}_R(x)$

例子 ① 设 G 为交换群, 则 G 可以看成 $\mathbb{Z}$-模. $\forall g\in G$,

$$\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}}(g)=\{n\in\mathbb{Z} \mid g^n=e\}$$

由于 $\mathbb{Z}$ 为 PID, 则有 $\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}}(g)=(m)$, m 为满足 $g^m=0$ 的最小非负整数

即 m 为元素 g 的阶数 (order). 所以我们也称 $\mathrm{ann}_{\mathbb{Z}}(g)$ 为 g 的阶理想 (order ideal)

② 设 R 为含幺环. $\forall r\in R$, $\mathrm{ann}_R(r)=\{s\in R \mid s\cdot r=0\}$

即 s 为 r 的左零因子.

定义. 设 M 为 R-模, 称集合 $\mathrm{ann}_R(M)=\{r\in R \mid r\cdot x=0\ \forall x\in M\}$
为 M 的零化(左)理想或零化子 (annihilator)

Remark. ① $\mathrm{ann}_R(M) = \bigcap_{x\in M} \mathrm{ann}_R(x)$

② 除了 M 为零模外，R 的单位元不在 $\mathrm{ann}_R(M)$ 中

③ 设 $M \neq (0)$，可以规定 $R/\mathrm{ann}_R(M)$ 在 M 上作用为：$\forall\ \bar{a} = a + \mathrm{ann}_R(M) \in R/\mathrm{ann}_R(M)$

$$\bar{a}\cdot x = a\cdot x \quad \forall x \in M$$

则 M 可以看成 $R/\mathrm{ann}_R(M)$ -模.

例 8 设 V 为域 F 上线性空间，$\mathcal{A}: V \to V$ 为线性变换. 则 V 可以看成 $F[x]$-模. 对 $\vec{v} \in V$，$\mathrm{ann}_{F[x]}(\vec{v}) = \{ f \in F[x] \mid f(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0} \}$ 为 $F[x]$ 的理想. 则有 $\mathrm{ann}_{F[x]}(\vec{v}) = (m(x))$，则称 $m(x)$ 为向量 $\vec{v}$ 的极小多项式. 当 $d = \deg_x(m) > 0$ 时，$m(x)\cdot\vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^d(\vec{v})$ 线性相关，且 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 线性无关.

当 $\dim_F(V) < +\infty$ 时，对 $\forall\ \vec{v} \in V$，$\mathrm{ann}_R(\vec{v}) \neq (0)$，因为 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^r(\vec{v})$ 必线性相关，若 $r \geq \dim_F(V)$. 则 $\mathrm{ann}_R(\vec{v})$ 中含有非零多项式. 设 A 为线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一组基 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ 下的矩阵表示，则 $A \in F^{n\times n}$. 因为 $F^{n\times n}$ 作为 F-线性空间维数为 n^2，则 $I, A, A^2, \cdots, A^{n^2}$ 必然线性相关. 即存在非零多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n^2} x^{n^2}$ 使得 $f(\mathcal{A}) = f(A) = 0$，则有 $\forall\ \vec{v} \in V$ $f(x).(\vec{v}) = f(\mathcal{A})(\vec{v}) = 0(\vec{v}) = \vec{0}$. 所以 $f \in \mathrm{ann}_R(V)$. 即 $\mathrm{ann}_{F[x]}(V)$ 为非零理想. 事实上，由 Hamilton–Cayley 定理. A 的特征多项式（次数为 n）也在 $\mathrm{ann}_{F[x]}(V)$ 中.

自由模及其构造.

设 M 为 R-模. M 的任一有限子集 $S=\{x_1,\cdots,x_r\}$ 称为 R-线性相关的,如果存在不全为零 $a_1,\cdots,a_r\in R$,使得

$$a_1x_1+\cdots+a_rx_r=0.$$

如果满足:

$$a_1x_1+\cdots+a_rx_r=0 \Rightarrow a_1=a_2=\cdots=a_r=0$$

则称 $\{x_1,\cdots,x_r\}$ 线性无关.

M 的子集 S 称为线性无关的,如果 S 的任一有限子集都是线性无关的.

定义. 设 M 为 R-模,若存在 M 的子集 S 满足

1) $M=\langle S\rangle$,即 M 由 S 生成

2) S 为线性无关的

则称 S 为 M 的一组基. 若 M 存在一组基,则称 M 为自由 R-模.

例子 1) $R^n=R\times R\times\cdots\times R$ 作为 R-模为自由模. 且 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ 构成 R^n 的一组基.

$\vec{e}_i=(0,\cdots,\underset{i\text{位置}}{1},\cdots 0)$

2) 不是所有模都是自由的. 例如, 有限交换群作为 $\mathbb{Z}$-模不是自由模, 因为如果是自由 $\mathbb{Z}$-模, 则模的元素个数必为无限的

3) 线性空间作为域 F 上的模为自由模, 但是对线性变换 A 构成 $F[x]$-模可能不是自由的. 如有限维线性空间构成 $F[x]$-模不是自由的 $F[x]$-模.

自由模的构造：

设 R 为环，E 为任一非空集合，定义

$$R^{(E)} = \{ f: E \to R \mid f(x)=0 \text{ 除对有限个 } E \text{ 中元素 } x \text{ 外} \}$$

在 $R^{(E)}$ 上定义：$\forall f, g \in R^{(E)}$，$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$(rf)(x) = r \cdot f(x)$$

所以 $R^{(E)}$ 为 R-模。$\forall e \in E$，定义：$\forall x \in E$

$$\delta_e(x) = \begin{cases} 1_R & \text{if } x=e \\ 0_R & \text{if } x \neq e \end{cases}$$

则 $\delta_e \in R^{(E)}$ 且有 $\forall f \in R^{(E)}$，$f = \sum_{e\in E} c_e \cdot \delta_e$，

其中 $c_e \in R$ 且只在有限个元素 e 上非零。则有 $R^{(E)} = \langle \{\delta_e \mid e \in E\} \rangle$

另一方面，若有 $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{e_i} = 0$，$a_i \in R$，则 $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{e_i}(e_j) = a_j = 0$ $\forall j=1,\dots,n$

所以 $\{\delta_e \mid e\in E\}$ 为 R-线性无关的

则有 $\{\delta_e \mid e \in E\}$ 构成 $R^{(E)}$ 的一组基，所以 $R^{(E)}$ 为自由 R-模

特别地，$|E| = n$，则有 $R^{(E)} \cong R^n$。