

§1 自由模的泛性质 (universal property).

设 M 为自由 R -模, S 为 M 的一组基. 设 M' 为任 R -模且 S' 为 M' 的任子集. 则映射 $\phi: S \rightarrow S'$ 总可以唯一地扩充成 M 到 M' 的 R -模同态.

证明: $\forall x \in M$, 存在有限个元素 $u_1, \dots, u_n \in S$ 使得

$$x = \sum_{i=1}^n a_i u_i \quad \text{且该表示法是唯一的.}$$

定义映射 $\bar{\phi}: M \rightarrow M'$ 满足 $\bar{\phi}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi(u_i)$

该映射由 ϕ 所唯一确定. 下面验证 $\bar{\phi}$ 为 R -模同态:

$$\forall x = \sum_{u \in S} a_u \cdot u \text{ 和 } y = \sum_{u \in S} b_u \cdot u, \text{ 其中 } a_u, b_u \text{ 只对有限个 } u \in S \text{ 非零}$$

$$\text{则有 } x+y = \sum_{u \in S} (a_u + b_u) \cdot u.$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\phi}(x+y) &= \bar{\phi}\left(\sum_{u \in S} (a_u + b_u) \cdot u\right) = \sum_{u \in S} (a_u + b_u) \phi(u) = \sum_{u \in S} a_u \phi(u) + \sum_{u \in S} b_u \phi(u) \\ &= \bar{\phi}(x) + \bar{\phi}(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \forall r \in R, \quad \bar{\phi}(rx) &= \bar{\phi}\left(\sum_{u \in S} (ra_u) \cdot u\right) = \sum_{u \in S} (ra_u) \phi(u) = r \sum_{u \in S} a_u \phi(u) \\ &= r \bar{\phi}(x). \end{aligned}$$

则 $\bar{\phi}$ 为 M 到 M' 的 R -模同态.

命题 2 设 M 为 R -模. 如果 M 中存在一组生成元 S 满足: 对任 R -模 M' 及其子集 S' , 映射 $\phi: S \rightarrow S'$ 皆可唯一地扩充成 M 到 M' 的 R -模同态, 则 M 为自由模且 S 为 M 的一组基.

证明: 取 M' 为自由模且 S' 为 M' 的一组基. 由于映射 $\phi: S \rightarrow S'$ 可唯一地扩充到 $M \rightarrow M'$ 的 R -模同态. 则 $\forall x \in M$, 设



$$x = \sum_{u \in S} a_u \cdot u = \sum_{u \in S} \tilde{a}_u \cdot u$$

为 x 的两种表示式, 则 $\bar{\phi}(x) = \bar{\phi}(\sum_{u \in S} a_u \cdot u) = \bar{\phi}(\sum_{u \in S} \tilde{a}_u \cdot u)$

$$\Rightarrow \sum_{u \in S} a_u \phi(u) = \sum_{u \in S} \tilde{a}_u \phi(u)$$

因为 $\phi(u) \in S'$ 且 S' 为 M' 的一组基, 所以有 $a_u = \tilde{a}_u \quad \forall u \in S$

即 $x \in M$ 关于生成元集表示式唯一, 则 S 为 M 的一组基.

定理 3. 设 M 为 R -模且 S 为 M 的一组基, 则 $M \cong R^{(S)}$

证明: 回顾 $R^{(S)}$ 的定义:

$$R^{(S)} = \{ f: S \rightarrow R \mid f \text{ 只在 } S \text{ 的有限个元素处取值非零} \}$$

$$R^{(S)} \text{ 的一组基为: } \Delta = \{ \delta_s: S \rightarrow R \mid \delta_s(x) = \begin{cases} 1_R & \text{if } x=s \\ 0_R & \text{if } x \neq s \end{cases} \}$$

$$\forall f \in R^{(S)}, f = \sum_{s \in S} c_s \cdot \delta_s, \quad c_s \text{ 只在有限个 } s \in S \text{ 处取值非零.}$$

定义映射 $\phi: S \rightarrow \Delta$, 由自由模的性质 ϕ 可扩充为 $M \rightarrow R^{(S)}$ 的 R -模同态 $\bar{\phi}$

显然 ϕ 为满射. 下证 $\bar{\phi}$ 为单射: $\forall x = \sum_{s \in S} a_s \cdot s$

$$\text{若 } \bar{\phi}(x) = 0 \Rightarrow \sum_{s \in S} a_s \cdot \delta_s = 0 \quad \text{因为 } \{\delta_s \mid s \in S\} \text{ 为基}$$

$$\Rightarrow a_s = 0 \quad \forall s \in S. \Rightarrow x = 0$$

Remark 若 S 为有限集合且 $n = |S|$, 则 $M \cong R^{(n)}$

§2. 自由模的秩

设 R 为含么环. M 为 R -模, S 为 M 的一组生成元集合. I 为 R 的理想 (双边)

$$IS = \left\{ \sum_i a_i x_i \mid \begin{array}{l} a_i \in I \\ x_i \in S \end{array} \right\}$$

则 IS 为 M 的子模



设 S' 为 M 的另一组生成元集, 下证 $IS = IS'$.

$$\forall y \in S', y = \sum_i b_i x_i, \text{ 其中 } b_i \in R, x_i \in S.$$

$$\forall a \in I, ay = \sum_i (ab_i)x_i \quad a \in I \Rightarrow ab_i \in I \Rightarrow ay \in IS$$

即有 $IS' \subseteq IS$. 同样的证明可得 $IS \subseteq IS'$

所以 $IS = IS'$.

引理4 设 M 为自由 R -模且 S 为 M 的一组基. 设 I 为 R 的理想.

令 $N = IS$. 则商模 M/N 可看成 $\bar{R} = R/I$ -模, 而且 M/N 是 $\bar{R}$ 上自由模 $\bar{S} = \{ \bar{x} = x + N \mid x \in S \}$ 为 M/N 的一组基.

证明: $\bar{M} = M/N$, $\bar{R}$ 在 $\bar{M}$ 上作用定义为: $N = IS = IM$

$$\bar{r} \cdot \bar{x} = \overline{rx}$$

$$\text{验证: } (r+I)(x+N) = rx + N$$

$$\forall a \in I, a(x+N) = ax + N = N \Rightarrow I\bar{M} = \{ \bar{0} \}$$

$$\forall y \in N, (r+I)y \subseteq N \text{ 因为 } N \text{ 为 } M \text{ 的子模.}$$

则 $\bar{M}$ 为 $\bar{R}$ -模.

$$\forall \bar{y} \in \bar{M}, y = \sum_{u \in S} a_u \cdot s, a_u \in R$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \sum_{u \in S} \bar{a}_u \cdot \bar{s} \Rightarrow \bar{S} \text{ 为 } \bar{M} \text{ 的生成集}$$

下证 $\bar{S}$ 为 $\bar{M}$ 的一组基: 设 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 为 $\bar{S}$ 中一组元, 若

$$\bar{a}_1 \bar{x}_1 + \dots + \bar{a}_n \bar{x}_n = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n} = \bar{0} \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \in N$$

由于 $x_1, \dots, x_n$ 为 M 的一组线性无关元, $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \sum_{r_i \in I, s_i \in S} r_i s_i$

$$\Leftrightarrow a_i \in I \quad \forall i=1, \dots, n$$

所以 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ 线性无关

$$\Leftrightarrow \bar{a}_i = \bar{0} \quad \forall i=1, \dots, n$$

则 $\bar{S}$ 为 $\bar{M}$ 的一组基.



定理 5. 设 R 为交换环. 且 M 为自由 R -模. 则 M 的任意两组基底有相同的基数.

证明: 设 S_1, S_2 为 M 的两组基底, 由 R 为含么交换环, 则 R 存在极大理想 I . 由引理 4 可知, $N = IS_1 = IS_2$. 令 $\bar{R} = R/I$ (为域) 则

$\bar{M} = M/N$ 是域 $\bar{R}$ 上的自由模且 $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ 为 $\bar{M}$ 的基底. 此时, $\bar{M}$ 为 $\bar{R}$ 上线性空间. 则由线性空间的性质, 任意两组基底的基数相同. 则

$$|S_1| = |\bar{S}_1| = |\bar{S}_2| = |S_2|.$$

定义 6. (自由模的秩)

设 R 为交换环. M 为自由 R -模. 则 M 的任一组基底的基数称为 M 的秩, 记为 $\text{rank}(M)$. 规定零模的秩为 0.

推论 7. 设 R 为交换环. 若 $R^{(m)} \subseteq R^{(n)}$, 则 $m = n$.

环上自由模与域上线性空间的一些区别

① 单个非零元素不一定是线性无关

$R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $R^{(2)} = R \times R$ 是自由 R -模

$\vec{e}_1 = (1, 0)$ $\vec{e}_2 = (0, 1)$ 为 $R^{(2)}$ 的一组基

但 $\vec{x} = (2, 2)$ 为非零元素. 但是 $3 \cdot \vec{x} = (0, 0)$

即 $\vec{x}$ 在 R 上线性相关. 但是 $(2, 3)$ 是线性无关的.

② 真子模的秩可能等于模本身的秩

$\mathbb{Z}$ 看成 $\mathbb{Z}$ -模. $2\mathbb{Z}$ 为 $\mathbb{Z}$ 的子模, 也是自由的. 且秩为 1. 但是 $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}^{(2)} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $\vec{e}_1 = (1, 0)$ $\vec{e}_2 = (0, 1)$ $\vec{x}_1 = 2\vec{e}_1$ $\vec{x}_2 = 3\vec{e}_2$

$N = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ 为真子模且 $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ 线性无关. $\text{rank}(N) = 2$.



③ 自由模的模不一定是自由的. $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$M = R^{(2)} = R \times R \quad \vec{e}_1 = (\overline{1}, \overline{0}) \quad \vec{e}_2 = (\overline{0}, \overline{1}) \quad \text{令 } \vec{y} = \overline{2}\vec{e}_1 + \overline{2}\vec{e}_2$$

$N = \langle \vec{y} \rangle = \{ \overline{0}, \vec{y}, 2\vec{y} \}$ 不是自由 R -模; 否则 $N \cong R^{(n)}$, $i \in \{1, 2\}$

即 $|N| = 6$ 或 12 , 矛盾!

§3 模的直和

定义 7 设 $M_1, \dots, M_r$ 为 R -模. $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$ 为加法群 $M_1, \dots, M_r$ 的直和, 规定 R 在 M 上作用如下: $\forall a \in R, (x_1, \dots, x_r) \in M$,

$$a(x_1, \dots, x_r) = (ax_1, \dots, ax_r)$$

则 M 成为一个 (左) R -模. M 称为 $M_1, \dots, M_r$ 的直和, 仍记为 $\bigoplus_{i=1}^r M_i$

考虑子模 $M_i' = \{ (0, \dots, \overset{i\text{位置}}{x_i}, \dots, 0) \mid x_i \in M_i \}$ 则 $M_i' \cong M_i$ 且同构

映射为 $x_i \mapsto (0, \dots, x_i, \dots, 0)$

► 直和的性质

定理 8 设 M 和 N 为 R -模, 且 $M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$. 如果存在同态

$$\varphi_i: M_i' \rightarrow N \quad (i=1, \dots, r)$$

则 $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ 可以唯一地开拓成同态 $\varphi: M \rightarrow N$ 使得

$$\varphi(x_i') = \varphi_i(x_i') \quad i=1, \dots, r$$

证明: **唯一性** 如果 φ 存在, 则

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, \dots, x_r)) &= \varphi(x_1' + \dots + x_r') = \varphi(x_1') + \dots + \varphi(x_r') \\ &= \varphi_1(x_1') + \dots + \varphi_r(x_r') \end{aligned}$$

因而 φ 由 φ_i 唯一决定.

存在性 定义 $\varphi: M \rightarrow N$

$$\varphi((x_1, \dots, x_r)) = \varphi_1(x_1') + \dots + \varphi_r(x_r') \quad \forall (x_1, \dots, x_r) \in M$$



验证 φ 为模同态:

$$\begin{aligned}\varphi((x_i) + (y_i)) &= \varphi((x_i + y_i)) = \varphi_1(x'_1 + y'_1) + \dots + \varphi_r(x'_r + y'_r) \\ &= \varphi_1(x'_1) + \varphi_1(y'_1) + \dots + \varphi_r(x'_r) + \varphi_r(y'_r) \\ &\stackrel{\text{线性}}{=} \varphi_1(x'_1) + \dots + \varphi_r(x'_r) + \varphi_1(y'_1) + \dots + \varphi_r(y'_r) \\ &= \varphi((x_i)) + \varphi((y_i))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(a(x_i)) &= \varphi((ax_i)) = \varphi_1(ax'_1) + \dots + \varphi_r(ax'_r) \\ &= a\varphi_1(x'_1) + \dots + a\varphi_r(x'_r) \\ &= a(\varphi_1(x'_1) + \dots + \varphi_r(x'_r)) \\ &= a\varphi((x_i))\end{aligned} \quad \square$$

设 $M_1, \dots, M_r$ 为 R -模. 如果 $\forall i=1, \dots, r$, 满足

$$M_i \cap (M_1 + \dots + \hat{M}_i + \dots + M_r) = \{0\} \quad (*)$$

则称 $M_1, \dots, M_r$ 为 独立的. 由(*)可得:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_r = 0$$

定义 9. 设 $M_1, \dots, M_r$ 为 M 的 R -子模. 如果满足

$$1) \quad M = M_1 + \dots + M_r$$

$$2) \quad M_1, \dots, M_r \text{ 为独立的}$$

则 M 称为 $M_1, \dots, M_r$ 的 内直和, 记作 $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$

定理 10. 设 $M_1, \dots, M_r$ 为 M 的子模, 则 $M_1, \dots, M_r$ 的 外直和 与 内直和 同构. 并且

$$1) \quad M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r, \quad M_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} M_{ij} \Rightarrow M = \bigoplus_i \bigoplus_j M_{ij}$$

$$2) \quad M = \bigoplus_{i=1}^r N_i. \quad \text{令 } M_1 = N_1 + \dots + N_{s_1}, \quad M_2 = N_{s_1+1} + \dots + N_{s_2}, \quad \dots \\ M_t = N_{s_{t-1}+1} + \dots + N_r \quad \text{则 } M = \bigoplus_{j=1}^t M_j.$$



$$3) M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r, N = M_1 \oplus \dots \oplus M_s \quad (1 \leq s < r)$$

$$\text{则有 } M/N \cong M_{s+1} \oplus \dots \oplus M_r$$

§4. 投射模

定义 11. 设 P 为 R -模. 如果对任意 R -模 $M \subseteq N$ 及其满同态 $\eta: M \rightarrow N$ 都满足任意模同态 $\varphi: P \rightarrow N$ 恒可提升为模同态 $\psi: P \rightarrow M$ 使得 $\eta \circ \psi = \varphi$.

则称 P 为投射模 (projective module)

$$\begin{array}{ccc} & \psi & \downarrow \varphi \\ & \swarrow \searrow & \\ M & \xrightarrow{\eta} & N \rightarrow 0 \end{array}$$

性质 12. 投射 R -模 是 若干个自由 R -模的直和项

证明. 设 P 为投射 R -模. 且 S 为 P 的一组生成元. $R^{(S)}$ 为由 S 生成的自由 R -模. 则 $\eta: R^{(S)} \rightarrow P$ 为满同态

$$\sum c_e e \mapsto \sum c_e \cdot e$$

由于 P 为投射模, 则恒等映射 $\text{id}: P \rightarrow P$ 可

提升为模同态 $\psi: P \rightarrow R^{(S)}$ s.t. $\eta \circ \psi = \text{id}$

Claim 1. ψ 为单同态

$\forall x \in P$, 若 $\psi(x) = 0$, 则 $\eta\psi(x) = 0$

$$\eta \circ \psi(x) = \text{id}(x) = x \Rightarrow x = 0$$

则有 $P \cong \text{Im}(\psi)$

Claim 2. $R^{(S)} = \text{Im}(\psi) \oplus \ker(\eta)$

$$\forall x \in R^{(S)}, \text{ 令 } y = x - \psi(\eta(x))$$

$$\text{则有 } \eta(y) = \eta(x) - \eta(\psi(\eta(x))) = \eta(x) - \eta(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker(\eta)$$

$$\Rightarrow x \in \text{Im}(\psi) + \ker(\eta)$$

$$\begin{array}{ccc} & \psi & \downarrow \text{id} \\ & \swarrow \searrow & \\ R^{(S)} & \xrightarrow{\eta} & P \rightarrow 0 \end{array}$$



$$\forall x \in \text{Im}(\psi) \cap \ker(\eta)$$

即有 $\eta(x)=0$ 且 $x=\psi(y) \quad y \in P$

$$0 = \eta(x) = \eta(\psi(y)) = y \Rightarrow x = \psi(y) = 0$$

则有 $R^{(S)} = \text{Im}(\psi) \oplus \ker(\eta)$. (内直和)

则 $P \oplus \ker(\eta)$ 的外直和同构于 $R^{(S)}$, 即 P 为自由模的直和项.

定理 13. 自由模必为投射模.

证明: 设 F 为自由模, M, N 为任意 R 模且 $\eta: M \rightarrow N$ 为满同态. 下证: 任一模同态 $\varphi: F \rightarrow N$ 可提升为模同态

$$\psi: F \rightarrow M \text{ 使得 } \eta \circ \psi = \varphi.$$

设 $S = \{u_\lambda \mid \lambda \in I\}$ 为 F 的一组基

η 为满射, 每个 $\varphi(u_\lambda)$ 在 η 下有原象.

$$\forall \lambda \in I, \text{ 取定 } x_\lambda \in M \text{ 使得 } \eta(x_\lambda) = \varphi(u_\lambda), \lambda \in I$$

根据自由模的性质, 存在唯一模同态 $\psi: F \rightarrow M$ 使得

$$\psi(u_\lambda) = x_\lambda \quad (\lambda \in I)$$

$$\eta \circ \psi(u_\lambda) = \eta(\psi(u_\lambda)) = \eta(x_\lambda) = \varphi(u_\lambda) \quad \forall \lambda \in I$$

$$\Rightarrow \eta \circ \psi = \varphi.$$

(注) 投射模不一定为自由模. 例如 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
但是 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 不是自由 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ -模 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ -投射模

$$R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$$

一般地, 设 R, R_2 为非平凡环. $R = R_1 \oplus R_2$



$\pi_1: R \rightarrow R$ 为投影映射: $\pi_1(a, b) = (a, 0)$
 $\pi_2(a, b) = (0, b)$

则 R_1, R_2 可视为 R -模

定义 R 在 R_i 上作用为: $r \cdot x = \pi_i(r) \cdot x$

$$\text{即 } (a, b) \cdot x_1 = a \cdot x_1$$

$$(a, b) \cdot x_2 = b \cdot x_2$$

由此可知 R_1, R_2 皆为投影 R -模, 但是都不是自由 R -模

假如 R_1 为自由 R -模, 则存在一组基 $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq R_1$

$\forall i_0 \in I$, 因为 R_1, R_2 为非平凡含么环, 则 $1 \neq 0$, 所以 $(1, 0) \neq (1, 1)$

但是 $(1, 1) \cdot e_{i_0} = \pi_1(1, 1) e_{i_0} = 1 \cdot e_{i_0} = \pi_1(1, 0) e_{i_0} = (1, 0) \cdot e_{i_0}$

由此可知 $(1, 1) = (1, 0)$ (由基底的线性无关性), 矛盾!!!

5 模的同态环

设 M 为 R -模. $\text{End}_R(M) = \{\phi: M \rightarrow M \mid \phi \text{ 为 } R\text{-模同态}\}$

$(\text{End}_R(M), +, \cdot)$ 构成环, 称为 M 的同态环

下面我们来考虑交换环上自由模的同态环.

设 R 为含么交换环. M 为自由 R -模 $\text{rank}(M) = n$ 设 $\phi \in \text{End}_R(M)$. 则

$e_1, \dots, e_n$ 为 M 的一组基. 则 $\forall x \in M$, x 可唯一地表示

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, \text{ 于是 } \phi(x) = \phi(x_1 e_1) + \dots + \phi(x_n e_n) \\ = x_1 \phi(e_1) + \dots + x_n \phi(e_n)$$

ϕ 由 $e_1, \dots, e_n$ 在 ϕ 的象所唯一决定. 设

$$\phi(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j, \quad i=1, \dots, n$$

由 ϕ 确定 R 上 $n \times n$ 矩阵 $A = (a_{ji}) \in R^{n \times n}$, 反之设 $A \in R^{n \times n}$



① 定义 M 到自身的同态映射 ϕ_A . 用 $M_n(R)$ 表示全体 R 上 $n \times n$ 矩阵集合. 则有如下同构定理.

定理 14. 设 M 为秩为 n 的 R 上自由模. 则有 $\text{End}_n(R) \cong M_n(R)$
 且 R 为交换环

证明: 取 $e_1, \dots, e_n$ 为 M 的一组基. 定义映射: $\sigma: \text{End}_n(R) \rightarrow M_n(R)$

$$\forall \phi \in \text{End}_n(R), \phi(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j. \text{ 令 } \sigma(\phi) = (a_{ij}) \in M_n(R)$$

① σ 为双射. $\sigma^{-1}: M_n(R) \rightarrow \text{End}_n(R)$

$\forall A = (a_{ij}) \in M_n(R)$. 定义 R -模同态: $\phi_A: M \rightarrow M$

$$\phi_A(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j \in M_{e_1, \dots, e_n} \wedge$$

则 $\phi_A \in \text{End}_n(R)$ 且 $\sigma \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \sigma = \text{id}$.

② σ 为环同态: $\forall \phi_1, \phi_2 \in \text{End}_n(R)$. $\phi_1(e_i) = \sum a_{ji} e_j, \phi_2(e_i) = \sum b_{ji} e_j$
 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

$$\text{由定义可知: } (\phi_1 + \phi_2)(e_i) = \phi_1(e_i) + \phi_2(e_i) = \sum a_{ji} e_j + \sum b_{ji} e_j \\ = \sum (a_{ji} + b_{ji}) e_j$$

$$\Rightarrow \sigma(\phi_1 + \phi_2) = A + B = \sigma(\phi_1) + \sigma(\phi_2)$$

$$\sigma(\phi_1 \phi_2)(e_i) = \phi_1\left(\sum_{j=1}^n b_{ji} e_j\right) = \sum_{j=1}^n b_{ji} \phi_1(e_j) = \sum_{j=1}^n b_{ji} \sum_{l=1}^n a_{lj} e_l \\ = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ji} a_{lj}\right) e_l$$

$$C = (c_{ij}) = \left(\sum_{l=1}^n a_{li} b_{lj}\right) = AB$$

$$\Rightarrow \sigma(\phi_1 \phi_2) = AB = \sigma(\phi_1) \sigma(\phi_2)$$

下面我们来回顾一下交换环 R 上同态的一些性质:

$M_n(R)$ 中加法与乘法与普通域上矩阵运算一样.

$(M_n(R), +, \cdot)$ 为环. 零矩阵与单位矩阵分别为关于 $+$ 与 $\cdot$ 的单位元.

$$\forall a \in R, a' = \text{diag}(a, \dots, a) = \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix} \quad ()' \text{ 定义了一个单同态 } R \rightarrow M_n(R).$$



$M_n(R)$ 中所有可逆矩阵构成集合称为一般线性群, 记为 $GL_n(R)$.

设 $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$, 定义 A 的行列式 $\det(A)$ 为

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1, \pi(1)} \cdots a_{n, \pi(n)}$$

A 关于 a_{ij} 的余式为 $(-1)^{i+j}$ 乘以 A 划去第 i 行第 j 列剩下 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵 A_{ij} 的行列式. 则有

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \cdots + a_{ni}A_{ni} \end{aligned}$$

$$\text{并且有 } a_{1j}A_{1i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \det(A) & i = j \end{cases}$$

矩阵 A 的伴随矩阵定义为 $A^* = (A_{ji})$

$$\text{则有 } AA^* = \det(A)I = A^*A$$

$$\text{另一方面 } \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

所以 $\det: M_n(R) \rightarrow R$ is a ring homomorphism
 $\det$ maps $GL_n(R)$ into $U(R)$, the group of units in R .

定理 15. If R is a commutative ring with identity, a matrix $A \in M_n(R)$ is invertible $\Leftrightarrow \det(A)$ is invertible in R .

证明. 设 $A \in M_n(R)$. 如果 A 可逆, 则 $\exists B \in M_n(R)$ s.t.

$$AB = I \Rightarrow \det(A)\det(B) = 1 \Rightarrow \det(A) \text{ 可逆}$$

另一方面, 如果 $\Delta = \det(A)$ 在 R 中可逆. 则 $AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} \Delta & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \cdot I$

$$\Rightarrow AA^*\Delta^{-1} = \Delta^{-1}A^*A = I \Rightarrow A \text{ 可逆}$$

习题: 设 R 为交换含么环. 则 $AB = I \Rightarrow BA = I$.
 $A, B \in M_n(R)$.



R 为交换环,
 定理 16. 设 M 为 R 上自由模且秩为 n . 若有 $M = (a_1, \dots, a_n)$, 则
 $\{a_1, \dots, a_n\}$ 为 M 的一组基, 即 M 的生成子集的基数中总 $\geq n$.

证明: 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 M 的一组基. 由于 $\{a_1, \dots, a_n\}$ 为 M 的生成子集. 则

$$(e_1, \dots, e_n) = (a_1, \dots, a_n) A$$

$$(a_1, \dots, a_n) = (e_1, \dots, e_n) B$$

$$\text{于是 } (e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_n) BA \Rightarrow BA = I \Rightarrow AB = I$$

$$\text{假设 } (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (e_1, \dots, e_n) B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow AB \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

③ 设 R 为交换环. 如果 $AB = I$ 则 $\det(A) \det(B) = 1$

$$\det(A) \text{ 可逆} \Rightarrow A \text{ 可逆} \Rightarrow A^{-1} = A^* (\det A)^{-1} = (\det A)^{-1} A^*$$

$$AB = I \Rightarrow A^* A B = \det(A)^{-1} B = A^*$$

$$\Rightarrow B = \det(A) A^*$$

$$BA = \det(A) A^* A = I$$

