

回顾一下投射模的定义: 设  $P$  为  $R$ -模. 若对任意满同态  $\eta: S \rightarrow T$ . 模同态  $\phi: P \rightarrow T$  恒可提升为模同态  $\psi: P \rightarrow S$ . 使得  $\phi = \eta \circ \psi$ .

定理. 设  $M$  为自由  $R$ -模且  $P$  为  $M$  的直和项, 即存在  $M$  的子模  $N$  使得  $M = P \oplus N$ , 则  $P$  为投射模.

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \psi \swarrow & \downarrow \eta & \searrow \phi \\ S & \xrightarrow{\eta} & T \rightarrow 0 \\ & \uparrow & \end{array}$$

证明: 设  $S$  和  $T$  为  $R$ -模.  $\eta: S \rightarrow T$  为满同态

下证 任意同态  $\phi: P \rightarrow T$  恒可提升为同态  $\psi: P \rightarrow S$  使得

$$\eta \circ \psi = \phi. \quad \text{因为 } M = P \oplus N$$

设  $\text{id}: P \rightarrow M$   
 $a \mapsto (a, 0)$

定义同态  $\bar{\phi}: M \rightarrow T$   
 $(a, b) \mapsto \phi(a).$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\text{id}} & M \\ \psi \downarrow & \searrow \bar{\phi} & \downarrow \bar{\phi} \\ S & \xrightarrow{\eta} & T \rightarrow 0 \end{array}$$

验证  $\bar{\phi}$  确实为同态:  $\bar{\phi}((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = \bar{\phi}(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = \phi(a_1 + a_2)$

$$= \phi(a_1) + \phi(a_2) = \bar{\phi}((a_1, b_1)) + \bar{\phi}((a_2, b_2))$$

$$\bar{\phi}(r(a, b)) = \bar{\phi}(ra, rb) = \phi(ra) = r\phi(a) = r\bar{\phi}(a, b)$$

由于  $M$  为自由模. 则存在同态  $\bar{\psi}: M \rightarrow S$  使得  $\bar{\phi} = \eta \circ \bar{\psi}$ .

令  $\psi = \bar{\psi} \circ \text{id}$ . 则  $\psi$  为  $P \rightarrow S$  的同态.

$$\eta \circ \psi = \eta \circ (\bar{\psi} \circ \text{id}) = (\eta \circ \bar{\psi}) \circ \text{id} = \bar{\phi} \circ \text{id} = \phi.$$

### §1. 主理想环上的自由模.

设  $R$  为主理想环. 即对任意  $R$  的理想  $I$ , 存在  $a \in I$  使得  $I = (a)$ .

$R$  看成  $R$  自身的模为自由  $R$ -模.  $R$  的子模即为  $R$  作为环的理想.

若  $R$  为主理想环. 则  $R$  的子模  $I$  为自由的. 理想

的基为  $a$  就是  $I$  的基底. 因为  $\forall r \in R, r \cdot a = 0 \Rightarrow r = 0$  或  $a = 0$  (零理想)

若  $a = 0$ , 则  $I = (0)$  为零模. 若  $a \neq 0$ , 则  $a$  为线性无关的.



主理想整环 (principal ideal domain  $\triangleq$  PID)

定理1 设  $R$  为 PID,  $M$  为自由  $R$ -模 且  $\text{rank}(M)=n$ . 则  $M$  的任一子模也是自由  $R$ -模 且秩  $\leq n$

证明 设  $N$  为  $M$  的子模, 若  $N$  为零模, 则结论显然成立.

下面我们对  $M$  的秩  $n$  作归纳. 假设结论对秩小于  $n$  的自由模已经成立. 令  $e_1, e_2, \dots, e_n$  为  $M$  的一组基. 考虑

$$I_1 = \{ a_1 \in R \mid \exists a_2, \dots, a_n \in R \text{ 使得 } a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in N \}$$

Claim 1  $I_1$  为  $R$  的理想

若  $a_1, b_1 \in I_1$ , 则  $\exists a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_n \in R$  使得

$$\begin{aligned} a_1 e_1 + \dots + a_n e_n &\in N \\ b_1 e_1 + \dots + b_n e_n &\in N \end{aligned} \Rightarrow (a_1 + b_1) e_1 + \dots + (a_n + b_n) e_n \in N \\ \Rightarrow a_1 + b_1 \in I_1$$

$$\forall r \in R, a_1 \in I_1$$

$$\begin{aligned} \text{则 } r(a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n) &= (ra_1) e_1 + \dots + (ra_n) e_n \in N \\ \Rightarrow ra_1 &\in I_1 \end{aligned}$$

因为  $R$  为 PID, 所以  $I_1 = (f)$  for some  $f \in R$ . 若  $f=0$ , 则  $I_1 = \{0\}$

则子模  $N \subseteq M_1 = Re_2 + \dots + Re_n$ , 由归纳假设, 结论成立.

设  $f \neq 0$ , 于是在  $N$  中有元素  $h_1 = f e_1 + g_2 e_2 + \dots + g_n e_n \in N$

对  $N$  中任意元素  $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$  都有  $a_1 = a_1' f$

于是  $x - a_1' h_1 \in M_1$  (同时  $x - a_1' h_1 \in N$ )

令  $N_1 = N \cap M_1$ , 则有  $N = R h_1 + N_1$



显然  $Rh_1 \cap N_1 = \{0\}$ . 于是  $N = Rh_1 \oplus N_1$ .

由归纳假设,  $N_1$  是自由模, 且秩  $\leq n-1$ .

令  $h_2, \dots, h_r$  为  $N_1$  的一组基,  $r \leq n$ , 即得

$$N = Rh_1 \oplus Rh_2 \oplus \dots \oplus Rh_r$$

于是  $h_1, h_2, \dots, h_r$  为  $N$  的一组基,  $N$  为自由模, 秩  $r \leq n$ . 由此

定理得证  $\square$

例子. 设  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ . 则  $S_A = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax = \vec{0}\}$  为  $\mathbb{Z}^n$

的子模.  $\mathbb{Z}$  为 PID, 则  $S_A$  也是自由  $\mathbb{Z}$  模. 一个比较困难的计算问题是: 如何找到  $S_A$  的一组基?

①  $A = (a_1, a_2) \neq \vec{0}$  考虑方程  $a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$  的所有整数解  $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ . 设  $d = \gcd(a_1, a_2)$ .  $a_1 = \bar{a}_1 d$

$$a_2 = \bar{a}_2 d. \quad \text{则} \quad \bar{a}_1 x_1 = -\bar{a}_2 x_2 \Rightarrow \bar{a}_1 \mid x_2 \text{ 且 } \bar{a}_2 \mid x_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = r \bar{a}_2 \\ x_2 = -r \bar{a}_1 \end{cases} \quad r \in \mathbb{Z} \Rightarrow S_A = \left\langle \begin{pmatrix} \bar{a}_2 \\ -\bar{a}_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

即  $\begin{pmatrix} \bar{a}_2 \\ -\bar{a}_1 \end{pmatrix}$  为  $S_A$  的一组基.

②  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  计算  $S_A$ ?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(2)-3(1)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \Rightarrow S_A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{若 } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, S_A = ??$$



推论 2 PID上有限生成模的子模也是有限生成的.

证明: 设  $M$  为 PID  $R$  上有限生成模,  $g_1, \dots, g_m$  为  $M$  的一组生成元. 设  $N$  为  $M$  的子模. 令  $E = \{g_1, \dots, g_m\}$ , 则可以构造自由  $R$ -模  $R^{(E)}$ , 基为  $e_1, \dots, e_m$ , 且有满同态

$$\eta: R^{(E)} \rightarrow M \supseteq N$$

$$a_1 e_1 + \dots + a_m e_m \mapsto a_1 g_1 + \dots + a_m g_m$$

令  $K = \eta^{-1}(N)$ ,  $K$  为  $R^{(E)}$  的子模, 则由定理 1,  $K$  为自由  $R$ -模. 设  $K$  的一组基为  $f_1, \dots, f_r$ . 因为  $\eta$  为满同态, 所以

$$h_1 = \eta(f_1), \dots, h_r = \eta(f_r)$$

是  $N$  的一组生成元. 因为  $\forall x \in N, \exists y = \sum_{i=1}^r a_i f_i \in K$  使得

$$x = \eta(y) = \eta\left(\sum_{i=1}^r a_i f_i\right) = \sum_{i=1}^r a_i \eta(f_i) = \sum_{i=1}^r a_i h_i.$$

所以  $N$  为有限生成的.

(注) ① 若  $R$  不是 PID, 自由模的子模不一定是自由, 例如  $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .  
 $N = 2R = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$  只有 3 个元素, 但不是自由  $R$ -模.

② 若  $R$  不是 PID, 则有限生成  $R$ -模的子模不一定是有限生成.

例如:  $R = K[x_1, x_2, \dots]$   $K$  为域

$R$  看成  $R$ -模, 由 1 生成

但是由  $\langle x_1, x_2, \dots \rangle$  生成的子模不是有限生成子模.



定义3

设  $M$  为  $R$ -模.  $M$  中元素  $a$  称为扭元素 (torsion element)  
如果  $\exists r \in R, r \neq 0$  使得  $ra = 0$ . 如果不存在  $R$  中非零元素  $r$  使得  
 $ra = 0$ , 则  $a$  称为自由的.

(注)  $a \in M$ ,  $a$  自由  $\Leftrightarrow \langle a \rangle$  为秩为1的自由子模

例

① 设  $G$  为交换群, 则  $G$  可看成  $\mathbb{Z}$ -模. 扭元素就是有限阶元素.

② 设  $V$  是域  $F$  上线性空间. 则  $V$  中非零元素都是自由的.

③ 设  $V$  是域  $F$  上  $n$  维线性空间,  $A: V \rightarrow V$  线性变换

对于  $\alpha \in V$ , 定义  $X \cdot \alpha = A(\alpha)$ , 则  $V$  可看成  $F[X]$ -模

则  $V$  中非零元素皆为扭元素, 因  $\forall \alpha \in V, \alpha, A(\alpha), \dots, A^{n-1}(\alpha)$

线性相关 则  $\exists f = \sum_{i=0}^n c_i X^i \neq 0, f(X) \cdot \alpha = 0$

定义4 设  $M$  是  $R$ -模. 如果  $M$  中每个元素都是扭元素, 则  $M$  称为扭模;  
如果  $M$  中每个非零元素都是自由的, 则  $M$  称为无扭模 (torsion-free).

定理5 PID 上无扭的有限生成模一定是自由模.

证明: 设  $M$  是 PID  $R$  上无扭的有限生成模,  $a_1, \dots, a_m$  为  $M$  的一组生成元. 由于  $M$  为无扭的, 则每个非零元素都是线性无关的.

由此可知, 只要  $M$  不是零模, 在  $\{a_1, \dots, a_m\}$  中可选出一个非空的最大线性无关组. 设为  $a_1, \dots, a_r$  ( $r \leq m$ ).

即  $a_1, \dots, a_r$  线性无关, 但是  $a_1, \dots, a_r, a_j$  ( $r < j \leq m$ ) 都

线性相关 即有:  $x_{j1}a_1 + \dots + x_{jr}a_r + x_j a_j = 0 \quad x_{j1}, \dots, x_{jr} \neq 0, x_j \neq 0$

$x_{j1}, \dots, x_{jr}$  不全为0 且  $x_j \neq 0$



如果  $M$  为零模, 定理自然成立. 假设  $M$  不是零模.

由  $a_1, \dots, a_r$  的选择,  $N = (a_1, \dots, a_r)$  为自由子模

且  $a_1, \dots, a_r$  为  $N$  的一组基

令  $x = x_{r+1} \dots x_m$ . 因为  $R$  为整环,  $x \neq 0$  显然

$$xa_i \in N, i=1, \dots, m$$

于是映射  $a \mapsto xa$  是一个同态  $\eta: M \rightarrow N$ .  
 $a \mapsto xa$

又因为  $M$  无扭而且  $x \neq 0$ , 则  $\eta$  为单射.

所以  $M \cong$  自由模  $N$  的子模  $\eta(M)$  同构.

则  $M$  为自由的.

(注) 定理 5 中  $M$  为“有限生成模”该条件是重要的  
 例如. 只看  $\mathbb{Q}$  模  $\mathbb{Z}$  模是无扭的. 但是任意  
 两个有理数在  $\mathbb{Z}$  上线性相关. 因此  $\mathbb{Q}$  不是自由  $\mathbb{Z}$  模  
 但是  $\mathbb{Q}$  中任意有限生成子模都是 循环模, 因为

$$\langle r_1, r_2 \rangle = \langle \frac{a}{b} \rangle, \text{ 其中}$$

$$r_1 = \frac{a_1}{b_1}, r_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

$$r_1 = \frac{a_1 \bar{b}_1}{b} \quad r_2 = \frac{a_2 \bar{b}_2}{b}$$

$$\Rightarrow r_1, r_2 \in \langle \frac{a}{b} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle r_1, r_2 \rangle = \langle \frac{a}{b} \rangle$$

$$b = \text{lcm}(b_1, b_2) = \bar{b}_1 b_1 = \bar{b}_2 b_2$$

$$a = \text{gcd}(a_1 \bar{b}_1, a_2 \bar{b}_2)$$

$$a = \lambda_1 (a_1 \bar{b}_1) + \lambda_2 a_2 \bar{b}_2 \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$$

$$\Rightarrow \langle r_1, r_2 \rangle = \langle \frac{a}{b} \rangle$$

类似归纳法可证  $\langle r_1, \dots, r_m \rangle = \langle \frac{a}{b} \rangle$ .



## §2 PID上有限生成模的分解 (I).

设  $M$  为 PID  $R$  上有限生成模. 我们先考虑

$$\text{Tor}(M) = \{ x \in M \mid x \text{ 为 } M \text{ 中扭元之 } \sum, \text{ 即 } \exists r \in R \text{ s.t. } r \cdot x = 0 \}$$

定理 6  $\text{Tor}(M)$  为  $M$  的子模 且为有限生成的

证明: 设  $x, y \in \text{Tor}(M)$ . 分别  $\exists a, b \in R \setminus \{0\}$ , 使得

$$a \cdot x = 0 \text{ 且 } b \cdot y = 0$$

由于  $R$  为整环,  $a \cdot b \neq 0$  则有

$$(a \cdot b)(x + y) = (a \cdot b)x + (a \cdot b)y = 0 + 0 = 0$$

$$\forall r \in R, \quad a \cdot (rx) = r(a \cdot x) = r \cdot 0 = 0$$

所以  $\text{Tor}(M)$  为  $M$  的子模. 因为  $M$  为 PID 上有限生成模

由定理 1 的推论 2 知,  $\text{Tor}(M)$  为有限生成子模.

**定理 7.** 设  $M$  为 PID  $R$  上有限生成模. 则  $M/\text{Tor}(M)$  为无扭模, 因而是自由的 (由定理 5)

证明 只需证明  $M/\text{Tor}(M)$  中扭元之  $\sum$  为 0.

令  $a + \text{Tor}(M)$  为  $M/\text{Tor}(M)$  中扭元之  $\sum$ . 则  $\exists r \neq 0$  in  $R$  s.t.

$$r(a + \text{Tor}(M)) = 0, \Rightarrow ra \in \text{Tor}(M)$$

于是有  $s \in R$  且  $s \neq 0$  使得  $s(ra) = (sr) \cdot a = 0$  而  $sr \neq 0$

从而  $a \in \text{Tor}(M)$ . 即有  $a + \text{Tor}(M) = \bar{0}$ .

证  $M/\text{Tor}(M)$  为有限生成的 (更一般地只证明:  $M$  有限生成,  $N$  为  $M$  的子模) 则  $M/N$  为有限生成的

由定理 5,  $M/\text{Tor}(M)$  为自由的.  $\square$



令  $M/\text{Tor}(M) \cong F = R^{(t)}$   $t$  为  $M/\text{Tor}(M)$  的秩

由自由模的投射性,  $M$  中有子模  $K \subseteq R^{(t)}$  且

$$M = K \oplus \text{Tor}(M).$$

[回顾自由模的投射性质: 设  $\eta: M \rightarrow N$  为满同态. 若  $N$  为自由模  
则存在  $M$  的子模  $L$  使得  $M = \ker(\eta) \oplus L$ ]

$\pi: M \rightarrow M/\text{Tor}(M)$  满同态

$$\ker(\pi) = \text{Tor}(M)$$

$$\Rightarrow M = \text{Tor}(M) \oplus K.$$

定理 8. 在 PID  $R$  上有限生成模  $M$  都可分解为扭模  $\text{Tor}(M)$   
与自由模  $K$  的直和, 且  $K$  的秩是被  $M$  唯一决定的.

证明:  $K \subseteq M/\text{Tor}(M) \Rightarrow \text{rank}(K) = \text{rank}(M/\text{Tor}(M))$ , 显然  $\text{rank}(K)$

由  $M$  唯一决定.

(注) 虽然  $\text{rank}(K)$  由  $M$  唯一决定, 但是  $K$  不是唯一(决定)的.

自由模的直和.

(8)



### §3 有限生成扭模的分解.

设  $M$  为 PID  $R$  上有限生成的扭模.

$\forall a \in R$  定义

$$M(a) = \{x \in M \mid ax = 0\}$$

显然  $M(a)$  为  $M$  的子模. 如果  $a \mid b$ , 则

$$M(a) \subseteq M(b)$$

如果  $a$  在  $R$  中为可逆元, 则  $M(a) = \{0\}$ .

显然  $M(0) = M$ .

引理 9. 设  $a, b \in R$ ,  $d = \gcd(a, b)$  则有

$$M(d) = M(a) \cap M(b)$$

特别地, 当  $d=1$  时,  $M(1) = \{0\}$

$$\text{并且 } M(ab) = M(a) \oplus M(b).$$

证明:  $d \mid a \Rightarrow M(d) \subseteq M(a) \Rightarrow M(d) \subseteq M(a) \cap M(b)$   
 $d \mid b \Rightarrow M(d) \subseteq M(b)$

另一方面,  $\forall x \in M(a) \cap M(b)$ , 有  $ax=0$  且  $bx=0$

由于  $d = \lambda a + \mu b$  for some  $\lambda, \mu \in R$ . 则有

$$dx = (\lambda a + \mu b)x = \lambda(ax) + \mu(bx) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x \in M(d)$$

$$\Rightarrow M(a) \cap M(b) \subseteq M(d)$$

Hence  $M(d) = M(a) \cap M(b)$

当  $d=1$  时,  $M(1) = \{0\} \Rightarrow M(a) \cap M(b) = \{0\}$ .



因为  $a|ab \Rightarrow M(a) \subseteq M(ab)$   
 $b|ab \Rightarrow M(b) \subseteq M(ab) \Rightarrow M(a) + M(b) \subseteq M(ab).$

$\forall x \in M(ab)$ , 即有  $abx = 0$  则有  
 $ax \in M(b), bx \in M(a)$

由于  $(a, b) = 1$ , 则  $\exists u, v \in R$  s.t.  $1 = ua + vb$

则  $1 \cdot x = (ua + vb)x = u(ax) + v(bx) \in M(b) + M(a)$

$\Rightarrow M(ab) = M(a) + M(b)$

又因为  $M(a) \cap M(b) = \{0\}$ . 所以有

$M(ab) = M(a) \oplus M(b).$

定理 10. 设  $R$  为 PID.  $M$  为  $R$ -模.  $a \in R, a \neq 0, a = u p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$   
 其中  $u$  为  $R$  中可逆元,  $p_1, \dots, p_r$  为互不相伴的素元,  $r \geq 1$ , 于是有

$M(a) = \bigoplus_{i=1}^r M(p_i^{n_i})$

证明 对  $r$  作归纳法.  $r=1$  时, 结论显然成立

$u p_1^{n_1} \cdots p_{r-1}^{n_{r-1}} \nmid p_r^{n_r} \Rightarrow M(a) = M(u p_1^{n_1} \cdots p_{r-1}^{n_{r-1}}) \oplus M(p_r^{n_r})$

由归纳假设知  $M(a) = \bigoplus_{i=1}^r M(p_i^{n_i})$ .

... : 0 0 0 0

