

§1 有限生成模的分解: 本节中, 设 R 总为 PID.

设 M 为 PID 上有限生成模 $M = Rx_1 + Rx_2 + \dots + Rx_m$

$$= \langle x_1, \dots, x_m \rangle_R$$

$\forall a \in R$, 定义子模 $M(a) \triangleq \{x \in M \mid ax = 0\}$

$\forall I \subseteq R$, 定义子模 $M(I) \triangleq \{x \in M \mid ax = 0, \forall a \in I\}$

注: 设 $I = \langle a \rangle$, 则 $M(I) = M(a)$. 显然 $M(I) \subseteq M(a)$

另一方面, $\forall x \in M(a)$, $ax = 0$, 则对任意 $b \in \langle a \rangle$, 有 $b = r \cdot a$ for some $r \in R$, 则 $b \cdot x = r \cdot ax = r \cdot 0 = 0$, 即有 $x \in M(I)$.

引理 1: 设 I_1, I_2 为 R 的理想, N_1, N_2 为 M 的子模, 则有

$$1) I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow M(I_2) \subseteq M(I_1)$$

$$2) N_1 \subseteq N_2 \Rightarrow \text{Ann}_R(N_2) \subseteq \text{Ann}_R(N_1)$$

$$3) \forall I \subseteq R, \begin{matrix} I \subseteq \text{Ann}_R(M(I)) \\ N \subseteq M \end{matrix} \text{ 且 } N \subseteq M(\text{Ann}_R(N))$$

证明 留作习题.

推论 2: 如果 $a, b \in R$ 且 $a \mid b$, 则 $M(a) \subseteq M(b)$.

如果 a 在 R 中为可逆元, 则 $M(a) = \{0\}$. 且 $M(0) = M$.

引理 2: 设 $a, b \in R$, $d = \gcd(a, b)$, 则有 $M(d) = M(a) \cap M(b)$

特别地, 当 $d=1$ 时, $M(a) \cap M(b) = \{0\}$, 并且 $M(ab) = M(a) \oplus M(b)$.

证明: 见上次课讲义.

定理 3: 设 R 为 PID, M 为 R -模, $a \in R$ 且 $a \neq 0$, $a = u p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ 其中 u 为 R 中可逆元, $p_1, \dots, p_r$ 为互不相伴的素元, $r \geq 1$, 则有

$$M(a) = \bigoplus_{i=1}^r M(p_i^{n_i})$$

证明: 对 r 作归纳再利用推论 2.



定义4 对PID R 中任元素 P , 子模

$$M_P = \bigcup_{i=1}^{\infty} M(P^i)$$

称为 M 的 P 分量

回顾零化子的概念: 设 $a \in M$, N 为 M 的子模

$$\text{ann}_R(a) = \{r \in R \mid r \cdot a = 0\}$$

$$\text{ann}_R(N) = \{r \in R \mid r \cdot a = 0 \ \forall a \in N\}$$

$$\text{显然} \quad \text{ann}_R(N) = \bigcap_{a \in N} \text{ann}_R(a)$$

由于 R 为欧氏整环, $\text{ann}_R(a) = \langle S_a \rangle$ for some $S_a \in R$

引理4 设 M 为PID R 上有限生成扭模, $a_1, \dots, a_r$ 为 M 的一组生成元 于是

$$1) \quad \text{ann}_R(M) = \bigcap_{i=1}^r \text{ann}_R(a_i)$$

$$2) \quad \text{存在非零元 } x \in R \text{ 使得 } \text{ann}_R(M) = (x).$$

证明: 1) $\text{ann}_R(M) \subseteq \text{ann}_R(a_i) \ \forall i=1, \dots, r$

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^r \text{ann}_R(a_i), \text{ 则 } x \cdot a_i = 0 \ \forall i=1, \dots, r.$$

$$\forall a \in M, \ a = \sum_{i=1}^r x_i a_i \Rightarrow x \cdot a = \sum_{i=1}^r x \cdot (x_i a_i) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \text{ann}_R(M) \Rightarrow \text{ann}_R(M) = \bigcap_{i=1}^r \text{ann}_R(a_i)$$

$$2) \quad \text{因为 } a_1, \dots, a_r \text{ 都是扭元, 所以 } \text{ann}_R(a_i) = (x_i), \ x_i \neq 0$$

$$\text{而 } \bigcap_{i=1}^r (x_i) = (x), \text{ 其中 } x \text{ 为 } x_1, \dots, x_r \text{ 的最大的公因子. } \square$$



定理 5 设 M 是 PID R 上有限生成模. $\text{ann}_R(M) = (x)$, 且

$x = u p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$, 其中 u 为单位, $p_1, \dots, p_r$ 为互不相伴元素, 于是有

$$1) M = \bigoplus_{i=1}^r M(p_i^{n_i})$$

2) 若 p 是互不相伴元素时, $M_p = \{0\}$, $M_{p_i} = M(p_i^{n_i})$, $i=1, \dots, r$.

证明: 1) 因为 $\text{ann}_R(M) = (x)$, 所以 $M(x) = M$. 则由定理 10 可知结论成立.

2) 设 $p \nmid p_1, \dots, p_r$ 互不相伴. 为证明 $M_p = \{0\}$. 只要证明对任一 j , $M(p^j) = \{0\}$.

因为 $(p^j, x) = 1$, 则由引理 9.

$$\{0\} = M(x) \cap M(p^j) = M \cap M(p^j) = M(p^j)$$

下证 $M_{p_i} = M(p_i^{n_i})$. 对任意 $t \geq n_i$, $M(p_i^t) = M(p_i^{n_i})$

因为 $(p_i^t, x) = p_i^{n_i}$ 所以有

$$M(p_i^t) = M(p_i^t) \cap M = M(p_i^t) \cap M(x) = M(p_i^{n_i}) \quad \square$$

定义 6 设 M 为 PID R 上有限生成模. 如果 $\text{ann}_R(M) = (p^n)$

其中 p 为 R 中素元, 则 M 称为 p -模.

定理 5 说明任何 PID 上有限生成模都可以分解成一些 p -模的直和.

下面我们来讨论 p -模的结构. 即如下定理

定理 7 主理想整环 R 上有限生成的 p -模 M 都可以分解成有限个循环 p -模的直和.



证明 $\text{ann}_R(M) = (P^n)$ (在环的商空间 $(A - \lambda I)^m x = 0$)

其中 P 为素元. 设 $a_1, \dots, a_r$ 为 M 的生成元. 对生成元个数 r 作归纳法. ① 当 $r=1$ 时, 结论自然成立. 要证: M 可以分解成至多 r 个循环 P 模的直和.

② 假设结论对生成元个数 $< r$ 时已经成立. 下证生成元个数 $= r$ 时的情形.

$$\forall i=1, \dots, r, \quad P^n \cdot a_i = 0 \Rightarrow P^n \in \text{ann}_R(a_i) = (P_i)$$

$$\Rightarrow P_i \mid P^n \Rightarrow P_i = P^{m_i}$$

在 $m_1, \dots, m_r$ 中取最小的, 不妨设为 m_r 即

$$m_i \geq m_r, \quad i=1, \dots, r-1$$

令 M_1 为由 $a_1, \dots, a_{r-1}$ 生成的模. 由归纳假设, M_1 可分解为

$$M_1 = N_1 \oplus \dots \oplus N_s \quad (s \leq r-1)$$

$$\text{其中 } N_i = Rb_i, \text{ ann}_R(b_i) = (P^{t_i}), \quad i=1, \dots, s$$

如果 $M_1 \cap Ra_r = \{0\}$, 则有

$$M = M_1 \oplus Ra_r = Rb_1 \oplus \dots \oplus Rb_s \oplus Ra_r \quad \text{结论成立.}$$

由于 M 可由 $b_1, \dots, b_s, a_r$ 生成, 如果 $s < r-1$, 则归纳假设可知结论成立.

下面假设 $s = r-1$. 不妨假设 $t_i \geq m_r \quad (i=1, \dots, r-1)$. 否则

如有 $t_1 < m_r$, 我们可用 b_1 来取代 a_r . 考虑 $b_2, \dots, b_{r-1}, a_r$ 生成的模 M_2 , 重复以上步骤. 经过有限步后, 我们总可以达到

$t_i \geq m_r \quad (i=1, \dots, r-1)$ 的情形. 因为每个步骤都有 $t_i < m_r$ 的整数

不能继续下降. (事实上, 我们也可以取 M 的所有生成元中取一组使得 m_r 最小的生成元, 然后去证明这组生成元满足结论)

如果 $M_1 \supset Ra_r$, 即 $M_1 = M$, 则结论自然成立

$$\text{否则 } M = (Rb_1 \oplus \dots \oplus Rb_{r-1}) + Ra_r$$



考虑商模 M/M_1

$$M_1 = Rb_1 \oplus \cdots \oplus Rb_{r-1}$$

设 $a_r \notin M_1$

$$\pi: M \rightarrow M/M_1$$
$$a_r \mapsto \bar{a}_r$$

$$p^{m_r} \cdot a_r = 0 \Rightarrow p^{m_r} \in \text{ann}_R(\bar{a}_r)$$

$$\Rightarrow \text{ann}_R(\bar{a}_r) = (p^k) \quad k \leq m_r$$

$$\text{由 } p^k \bar{a}_r = \bar{0} \Rightarrow p^k a_r \in M_1$$

$$\Rightarrow p^k a_r = x_1 b_1 + \cdots + x_{r-1} b_{r-1} \quad \text{ann}_R(b_i) = (p^{t_i})$$

$$\Rightarrow 0 = p^{m_r-k} p^k a_r = p^{m_r-k} (x_1 b_1 + \cdots + x_{r-1} b_{r-1})$$

由于 $M_1 = Rb_1 \oplus \cdots \oplus Rb_{r-1}$ 为直和分解, 从而有

$$p^{t_i} \mid p^{m_r-k} x_i \quad i=1, \dots, r-1$$

$$\text{或者 } p^{k+t_i-m_r} \mid x_i \quad i=1, \dots, r-1$$

由于 $t_i \geq m_r \quad (i=1, \dots, r-1)$ 则有

$$k+t_i-m_r \geq k \quad i=1, \dots, r-1$$

$$\text{因此 } p^k \mid x_i \text{ 或者 } x_i = p^k y_i \quad i=1, \dots, r-1$$

$$\text{于是 } p^k a_r = p^k y_1 b_1 + \cdots + p^k y_{r-1} b_{r-1}$$

$$\Rightarrow p^k (a_r - y_1 b_1 - \cdots - y_{r-1} b_{r-1}) = 0 \Rightarrow p^k \in \text{ann}_R(b_r)$$

$$\text{令 } b_r = a_r - y_1 b_1 - \cdots - y_{r-1} b_{r-1} \notin M_1$$

$$\text{显然 } \bar{b}_r = \bar{a}_r, \text{ann}_R(\bar{b}_r) \supseteq \text{ann}_R(b_r) \text{ 由此可知}$$

$$\text{ann}_R(Rb_r) = \text{ann}_R(b_r) = (p^k) = \text{ann}_R(\bar{b}_r) = \text{ann}_R(\bar{a}_r)$$

Claim $M_1 \cap Rb_r = \{0\}$.

$$\text{假设 } a \in M_1 \cap Rb_r \text{ 则 } a = x_r b_r \quad \pi(a) = \pi(x_r b_r) = x_r \bar{b}_r = 0$$

$$\Rightarrow x_r \in \text{ann}_R(\bar{b}_r) = (p^k) \Rightarrow p^k \mid x_r \text{ i.e. } x_r = p^k y_r$$

$$\Rightarrow a = y_r p^k b_r = 0 \quad \text{于是 } M = M_1 \oplus Rb_r$$

$$= Rb_1 \oplus \cdots \oplus Rb_{r-1} \oplus Rb_r$$



定理 8. 设 M 为 PID R 上有限生成模. 则 M 可分解成一些循环 P -模的直和, 即 $M = \bigoplus_{i=1}^m N_i$

其中 $N_i = R b_i$, $\text{ann}_R(N_i) = \text{ann}_R(b_i) = (P_i^{n_i})$, P_i 为 R 中素元, $i=1, \dots, m$.

(注) 上分解中涉及的素元 $P_1, \dots, P_m$ 可能有不相伴的, 我们知道相伴的素元生成相同的理想, 我们可以约定相伴素元用同一个素元来表示. 重新排列 $N_1, \dots, N_m$ 的顺序, 则上分解中 m 个主环 $P_1^{n_1}, \dots, P_m^{n_m}$ 可排成:

$$P_1^{n_{11}}, \dots, P_1^{n_{1r_1}}$$

...

$$P_s^{n_{s1}}, \dots, P_s^{n_{s,r_s}}$$

$P_1, \dots, P_s$ 为互不相伴的素元且 $n_{11} \geq n_{12} \geq \dots \geq n_{1r_1}$ $i=1, \dots, s$.

定理 9 (有限生成模的第一标准分解)

设 M 为 PID R 上有限生成模. 则 M 可以分解成自由模与若干循环 P -模的直和, 即

$$M = K \oplus \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{r_i} N_{i,j}$$

其中 $K \subseteq R^{(t)}$, $\text{ann}(N_{i,j}) = (P_i^{n_{i,j}})$, $P_1, \dots, P_s$ 为互不相伴的素元. 且 $n_{11} \geq \dots \geq n_{1r_1}$ ($i=1, \dots, s$).

上被 M 所唯一决定, 称为 M 的秩.

引理 10. 设 M 为 PID R 上模. $a, b \in M$, $\text{ann}_R(a) = (f)$, $\text{ann}_R(b) = (g)$, 如果 $(f, g) = 1$ 则 $Ra + Rb = R(a+b)$
而 $\text{ann}_R(a+b) = (fg)$.



证明: $R(a+b) \subseteq Ra + Rb$ 显然成立

由于 $(f, g) = 1$, 存在 $u, v \in R$ 使得 $uf + vg = 1$.

于是 $vg(a+b) = vga + vgb = vga = (1-uf)a = a \in R(a+b)$

同理 $uf(a+b) = b \in R(a+b)$ 从而得到

$$Ra + Rb = R(a+b)$$

令 $\text{ann}(a+b) = (h)$. 显然 $fg \in \text{ann}(a+b) \Rightarrow fg \in (h) \Rightarrow h | fg$

反过来, $hfb = hf(a+b) = 0 \Rightarrow g | hf$

由 $(f, g) = 1 \Rightarrow g | h$ 同理 $f | h$, 再由 $(f, g) = 1$

$\Rightarrow fg | h$ 于是 $(h) = (fg)$

$\Rightarrow \text{ann}(a+b) = (fg)$.

定理 10 (PID 上有限生成模的秩 = 初等因子数)

设 M 为 PID R 上有限生成模, 则 M 可分解为

$$M = K \oplus \bigoplus_{k=1}^l M_k$$

其中 $K \subseteq R^{(t)}$, $\text{ann}(M_k) = (d_k) \subseteq d_{k+1} | d_k, k=1, \dots, l-1$

证明: 由第一初等因子: $M = K \oplus \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{r_i} N_{ij}$

令 $N_{ij} = Rb_{ij}$, $\text{ann}(b_{ij}) = (p_i^{n_{ij}})$. 令 $l = \max_i \{r_i\}$, $c_{ij} = b_{ij}$

($\frac{1}{2} j \leq r_i$) $c_{ij} = 0$ ($\frac{1}{2} j > r_i$). 令 $x_k = c_{1k} + c_{2k} + \dots + c_{sk}, k=1, \dots, l$.

由 1 可知 $Rx_k = Rc_{1k} + \dots + Rc_{sk} \subseteq \text{ann}(x_k) = (p_1^{n_{1k}} p_2^{n_{2k}} \dots p_s^{n_{sk}})$
($\frac{1}{2} n_{ik} = 0$ 若 $k > r_i$) 令 $M_k = Rx_k$, $\text{ann}(x_k) = (d_k)$ 于是有

$$M = K \oplus \bigoplus_{k=1}^l M_k$$

$\subseteq d_{k+1} | d_k, k=1, \dots, l-1$



§2 有限生成模标准分解的唯一性.

定理 11. 设 M 为 PID R 上有限生成模, 则在 M 的标准分解

$$M = K \oplus \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{r_i} N_{i,j_i}$$

中, 自由模 K 的秩以及 N_{i,j_i} 的不变因子: $\text{ann}_R(N_{i,j_i}) = (p_i^{n_{i,j_i}})$, $i=1, \dots, s$, $j_i=1, \dots, r_i$

是被 M 唯一决定的. 同样在第二标准分解中 $M = K \oplus \bigoplus_{k=1}^l M_k$ 中

自由模 K 的秩与 M_k 的不变因子 $\text{ann}(M_k) = (d_k)$ $k=1, \dots, l$ 是被 M 唯一决定的.

(注) 由于两个标准分解互相唯一决定, 所以只需证明其中一种标准分解的唯一性.
由于 K 部分的秩为 $\text{rank}(M/\text{Tor}(M))$ 由 M 所唯一决定. 下面我们只需考虑 M 为扭模情形.

引理 12 设 $M = \bigoplus_{k=1}^m M_k$ 和 $a \in R$. 则

$$aM = \bigoplus_{k=1}^m aM_k$$

$$M/aM \cong \bigoplus_{k=1}^m M_k/aM_k$$

证明: $\forall x \in M$, $x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ $x_i \in M_i$. 且表达式唯一.

$\forall y \in aM$, $y = ax$ for some $x \in M$. M_i 为扭模 $\Rightarrow ax_i \in M_i$.

$$\text{则 } y = a(x_1 + \dots + x_m) = ax_1 + \dots + ax_m$$

则此表达式也是唯一的.

定义映射: $\phi: M \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^m M_k/aM_k$

$$x = x_1 + \dots + x_m \longmapsto (x_1 + aM_1, \dots, x_m + aM_m)$$

$\phi(x) = 0$ 则 $x_i \in aM_i$ 即 $x_i = ay_i$ $y_i \in M_i$

则 $x = a(y_1 + \dots + y_m) \in aM$. $\ker(\phi) = aM$.



引理 13 设 N 为 PID R 上有限秩 P -模, P 是 R 中素元. 对于 R 中任一元素 q , 我们有:

- 1) 若 q 与 P 不相伴, $qN = N$;
- 2) 若 q 与 P 相伴, N/qN 为有限秩 P -模且 $\text{ann}(N/qN) = (P)$.

证明: 令 $N = Rb$, $\text{ann}(b) = (P^i)$.

- 1) 如果 q 与 P 不相伴, 则 $(P^i, q) = 1$. 有 $u, v \in R$ 使 $uP^i + vq = 1$,
于是 $b = (uP^i + vq)b = vqb \in qN \Rightarrow N \subseteq qN$
显然 $qN \subseteq N$

这证明 $N = qN$

- 2) 若 q 与 P 相伴, 不妨设 $q = P$. 由于有限秩模的商模也是有限秩模
并且 $\text{ann}_R(N/PN) = (P)$ 为素元. ($\text{ann}_R(N) \subseteq \text{ann}_R(N/PN)$)

引理 14 设 M 是 PID R 上有限秩 P -模, P 为 R 中素元, $\text{ann}_R(M) = (P)$.
则 M 的第一模分解

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$$

中有 $\text{ann}(M_i) = (P)$, $i=1, \dots, r$, 且 r 是唯一的.

证明: 由 $M_i \subseteq M$, 有 $\text{ann}_R(M_i) \supseteq \text{ann}_R(M)$. 在环表环中
素元 P 的幂次为极大的. 从而 $\text{ann}(M_i) = \text{ann}(M) = (P)$, $i=1, \dots, r$.
因为 $\text{ann}(M) = (P)$, 所以 M 可看成商环 $R/(P)$ 上的模 ($\forall \bar{r} \in R/(P)$
且 $\bar{r} \cdot x = \overline{r \cdot x}$) 所以 M 可看成域 $R/(P)$ 上线性空间. r 是
所给线性空间的维数, 当然是唯一的. □

(注): $M_i = R \cdot b_i$ M_i 看成 $R/(P)$ 上线性空间时, $\dim_{R/(P)}(M_i) = 1$

因为 $b_i \neq 0$, 若 $\bar{r} \cdot b_i = 0 \Rightarrow r \cdot b_i = 0 \Rightarrow r \in (P) \Rightarrow \bar{r} = \bar{0}$
所以 b_i 为线性无关.

Claim $M = Ra$ 为有限秩模, 则 $M \cong R/\text{ann}_R(M)$ 因为 $\phi: R \rightarrow M$
 $r \mapsto ra$

唯一性的证明: 设 M 为 PID R 上有限生成的扭模,

$$M = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j_i=1}^{r_i} N_{ij_i}$$

$$\text{ann}(N_{ij_i}) = (p_i^{n_{ij_i}}), \quad i=1, \dots, s, \quad j_i=1, \dots, r_i.$$

令 q 为 R 中任一元素, 则有

$$M/qM \cong \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j_i=1}^{r_i} N_{ij_i}/qN_{ij_i}.$$

由引理 13, 若 q 与 $p_1, \dots, p_s$ 中任一相伴时, 我们有

$$M/qM = \{0\}. \quad (\text{因为 } qM = M)$$

若 q 与 $p_1, \dots, p_s$ 中某不相伴时, 譬如说 $q = p_1$, 则由引理 13 与 14 可得

$$M/p_1M \cong N_{11}/p_1N_{11} \oplus \dots \oplus N_{1r_1}/p_1N_{1r_1}, \quad \text{其中 } N_{ij}/p_1N_{ij} \text{ 为域 } R/(p_1) \text{ 上}$$

一维线性空间

$$\text{所以 } r_1 = \dim_{R/(p_1)}(M/p_1M)$$

即 r_1 为元素 p_1 的

$$\begin{matrix} p_1^{n_{11}}, \dots, p_1^{n_{1r_1}} \\ \vdots \\ p_1^{n_{s1}}, \dots, p_1^{n_{sr_s}} \end{matrix}$$

中 p_1 的总个数, 所以 r_1 与分解式无关, 被 M 所唯一确定.

再考虑 p_1M/p_1^2M 在 $R/(p_1)$ 上的维数 (M/p_1M 可看成 R 上模)

$$p_1M/p_1^2M \cong p_1N_{11}/p_1^2N_{11} \oplus \dots \oplus p_1N_{1r_1}/p_1^2N_{1r_1}$$

$$\text{ann}(p_1N_{ij}) = (p_1^{n_{ij}-1})$$

所以 $\dim_{R/(p_1)}(p_1M/p_1^2M)$ 等于元素 $p_1^{n_{11}-1}, \dots, p_1^{n_{1r_1}-1}$ 中 p_1 的总个数



一般地, $P_i^k M / P_i^{k+1} M$ 是 $R / (P_i)$ 上有限维 F_i

$$P_i^{n_i}, \dots, P_i^{n_i}$$

中 P^t ($t \geq k+1$) 的个数. 令 $\lambda_{k,i} = \dim_{F_i} (P_i^k M / P_i^{k+1} M)$

$$k = 0, \dots, n_i \quad F_i = R / (P_i)$$

$$M = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{r_i} N_{ij}$$

$$\text{ann}_k(M) = (P^{n_i})$$

$$N_{ij} = R^{b_{ij}} \cong R / \text{ann}_R(b_{ij}) = (P_i^{n_{ij}})$$

不妨设 $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_s$

对子模组 N_{ij} 再分解:

$$R / (P_1), \dots, R / (P_1), (\mu_{11})$$

$$R / (P_1^2), \dots, R / (P_1^2), (\mu_{12})$$

⋮

$$R / (P_1^{n_{1s}}), \dots, R / (P_1^{n_{1s}}), (\mu_{1n_{1s}})$$

则由前讨论:

$$\begin{cases} \lambda_{0,1} = \mu_{11} + \mu_{12} + \dots + \mu_{1n_{1s}} \\ \lambda_{1,1} = \mu_{12} + \dots + \mu_{1n_{1s}} \\ \vdots \\ \lambda_{n_{1,1},1} = \mu_{1n_{1,1}} \end{cases}$$

从而可以
解出 μ_{ij}
并且 $\lambda_{k,i}$ 是
由 M 的初等因子
决定的
于是 μ_{ij} 由
 M 的初等因子



定理 15 设 M 是 PID R 上的有限秩的扭模. 则 M 的 $\mathfrak{f}$ -标准分解

为 $M = \bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^{r_i} N_{ij}$, 其中 $N_{ij} \cong R / (p_i^{n_{ij}})$

之系组 $(p_i^{n_{ij}})$ 在相伴意义下被 M 所唯一决定. $M_k \cong R / (d_k)$

M 的 $\mathfrak{f}$ -标准分解 $M = \bigoplus_{k=1}^l M_k$ 其中 $\text{ann}(M_k) = (d_k)$
 $d_k \mid d_{k+1} \quad k=1, \dots, l-1$

之系组: $d_1, d_2, \dots, d_l$ 在相伴意义下被 M 所唯一决定.

定义 16 设 M 是 PID R 上的有限秩模. 自由模 $M / \text{Tor}(M)$ 的秩称为 M 的秩. $\text{Tor}(M)$ 的 $\mathfrak{f}$ -标准分解中之系组 $(p_i^{n_{ij}})$ 称为 M 的

初等因子, $\text{Tor}(M)$ 的 $\mathfrak{f}$ -标准分解中 (d_i) 称为 M 的不变因子

并称为 (秩, 初等因子) 或 (秩, 不变因子) 称为 M 的结构的 $\mathfrak{f}$ -组完全不变量.

