

§1 主理想整环上矩阵的标准形.

定义1 设 A, B 为 PID R 上 $m \times n$ 矩阵. 若存在 $P \in GL_m(R)$ 与 $Q \in GL_n(R)$ 使得 $B = PAQ$

则 A, B 叫做 R 上等价的, 记为 $A \sim_R B$.

(注) 可以验证 $\sim_R$ 确实为等价关系.

定理2 设 A 为 PID R 上 $m \times n$ 矩阵, 则 A 等价于下列矩阵

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r & & \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $d_1, \dots, d_r$ 不为零且 $d_i \mid d_{i+1}, i=1, \dots, r-1$. 且 $d_1, \dots, d_r$ 除相差一个单位因子外由 A 唯一确定. $d_1, \dots, d_r$ 叫做 A 的不变因子, B 叫做 A 的 Smith 标准形.

为了证明定理2, 我们先来准备一些概念与引理.

定义3 设 $a \in R$, 并且 $a = u p_1 \dots p_s$ 为 a 的素分解, u 为可逆, p_i 为素元. 则称 s 为 a 的长度, 记为 $l(a)$. 规定 $l(0) = 0$.

如果 a 与 b 相伴, 则 $l(a) = l(b)$. 如果 $a \mid b$ 且 a 不与 b 相伴, 则 $l(a) < l(b)$. 如果 $a \mid b$ 且 $l(a) = l(b)$, 则有 a 与 b 相伴.

(注) 线性代数中, 我们已经知道, 矩阵的行变换可以通过左乘一块阵来实现, 列变换可以通过右乘来实现.



引理4 设 A 为 PID R 上 2×2 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}$$

则 A 等价于矩阵 $\begin{pmatrix} d & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$

其中 $d = (a, b)$, $*, *$ 为 R 中之数.

证明 设 $d = (a, b)$, 则存在 $u, v \in R$ 使得 $d = ua + vb$

由 $a = \bar{a} \cdot d, b = \bar{b} \cdot d$ 则有 $\begin{cases} a\bar{b} - \bar{a}b = 0 \\ u\bar{a} + v\bar{b} = 1 \end{cases}$

令 $Q = \begin{pmatrix} u & -\bar{b} \\ v & \bar{a} \end{pmatrix}$ $|Q| = u\bar{a} + v\bar{b} = 1$
 所以 Q 为可逆矩阵.

$$AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -\bar{b} \\ v & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua+vb & -a\bar{b}+b\bar{a} \\ cu+ev & -c\bar{b}+e\bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

(2) 该引理表明通过可逆列变换可将第一行的元素变换成所有元素的公因子 $d \neq 0$. 同理可证明 A 等价于

$\begin{pmatrix} d & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ 即令 $P = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$ $d = \gcd(a, c)$
 $d = ua + vc$
 $a = \bar{a}d, c = \bar{c}d$
 $PA = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

定理2的证明 设 $A \neq 0$. 我们首先证明 A 等价于

$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & A_1 & & \end{pmatrix}$, 其中 $d_1 \neq 0$, 且 d_1 整除 A 中每个元素.

由于 $A \neq 0$, 则存在 $a_{ij} \neq 0$ 且其长度最小.

通过行列互换, 我们可假设 $a_{11} \neq 0$ 且长度最小.



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ a_{31} & & * & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & \end{pmatrix}$$

如果 $a_{11} \mid a_{1j}$, 则第 j 列减去第 1 列适当倍数可得 $a_{1j} = 0$. 如果存在 j_0 使得 $a_{11} \nmid a_{1j_0}$, 经行列交换, 不妨设 $j_0 = 2$. 则利用引理 4, 存在可逆矩阵 Q_1 使得

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} Q_1 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} d = \gcd(a_{11}, a_{12}) \\ l(d) < l(a_{11}) \end{matrix}$$

令 $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ 则有 $AQ = \begin{pmatrix} d & 0 & * & \dots & * \\ * & & & & \\ \vdots & & * & & \\ * & & & & \end{pmatrix}$

所以只要第 1 列有一个元素不能被 a_{11}

整除, 则矩阵必小于另一个矩阵, 使得其 a_{11} 有更小的长度

由于 $l(a_{11})$ 为非负整数, 由反证法利用引理 4 可得: A 等价

另一个矩阵, 其第 1 行为 $(a_{11}, 0, \dots, 0)$

同样对第 1 列利用引理 4 的列变换技巧可又得出: A 等价

矩阵:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

如果 B 中有元素不被 a_{11} 整除, 则将该元素交换到第 1 行或第 1 列, 则又可降低 a_{11} 的长度. 反复重复该讨论若干次可得 A 等价矩阵:

$$A \sim \begin{pmatrix} d_1 & 0 & & \\ 0 & d_2 & & \\ & & A_2 & \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

$d_1 \neq 0$
 d_1 整除 A 中所有元素.

$d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, d_1 \mid d_2, d_2$ 整除 A_2 中

每个元素. 若 A_2 非零, 可重复上述讨论, 得到

$$A \sim \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r & & \\ & & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad d_i \mid d_{i+1} \quad i=1, \dots, r-1.$$



矩阵的 Smith 标准形与有限生成模的分解的关系:

设 M 为 PID R 上有限生成模, 设 $x_1, \dots, x_m$ 为 M 的生成元, 则存在 $R^{(m)}$ 的自由模 $R^{(m)}$, $e_1, \dots, e_m$ 为 $R^{(m)}$ 的一组基, 于是有满同态:

$$\eta: R^{(m)} \longrightarrow M$$
$$\sum_{i=1}^m a_i e_i \longmapsto \sum_{i=1}^m a_i x_i$$

则有 $M \cong R^{(m)} / \ker(\eta)$. $\ker(\eta)$ 为 $R^{(m)}$ 的子模, 故也是有限生成的. 并且是自由的.

另一方面, 任给 $R^{(m)}$ 的一个子模 N , 则有

$R^{(m)} / N$ 为有限生成的.

设 $f_1, \dots, f_n$ 为 N 的一组生成元, 设

$$f_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j \quad i=1, \dots, n$$

用矩阵形式可写为:

$$(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_m) A, \quad A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$$

设 $e'_1, \dots, e'_m$ 为 $R^{(m)}$ 的另一组基, 令

$$(e_1, \dots, e_m) = (e'_1, \dots, e'_m) P, \quad P = (p_{ij}) \in GL_m(R)$$

反之, $\exists P \in GL_m(R)$, 则 $(e'_1, \dots, e'_m) = (e_1, \dots, e_m) P^{-1}$ 为 $R^{(m)}$ 的一组基

设 $Q \in GL_n(R)$, 则 $(f'_1, \dots, f'_n) = (f_1, \dots, f_n) Q$ 也是 N 的一组生成元. 于是

$$(f'_1, \dots, f'_n) = (f_1, \dots, f_n) Q = (e_1, \dots, e_m) A Q$$
$$= (e'_1, \dots, e'_m) P A Q$$



所以 矩阵 A 在 R^m 与其基 $e_1, \dots, e_m$ 给定条件下, 唯一刻画了子模 N .
从而也刻画了商模 R^m/N , 且在 R^m 的另外一组基与 N 的另一些生成元下矩阵 B 满足等价关系 即 $B = PAQ$.

定理 5 设 M 为 PID R 上秩为 m 的自由模, N 为 M 的子模.
于是存在 M 的一组基 $e_1, \dots, e_m$ 使得 $d_1 e_1, \dots, d_r e_r$ 构成 N 的一组基而且 $d_i | d_{i+1}$, $i=1, \dots, r-1$,
 $d_1, \dots, d_r$ 除相差一个单位因子外由 N 唯一决定, $d_1, \dots, d_r$ 称为 N 的不变量, r 为子模 N 的秩, $m-r$ 为商模 M/N 的秩, $d_1, \dots, d_r$ 是商模 M/N 的不变因子

证明: 设 $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ 为 M 的一组基 $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$ 为 N 的一组生成元. 则有

$$(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m) A, \quad A \in M_{m \times n}(R)$$

由定理 2, 存在可逆矩阵 $P \in GL_m(R)$ 与 $Q \in GL_n(R)$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

则令 $(e_1, \dots, e_m) = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m) P^{-1}$ $(e_1, \dots, e_m)$ 为 M 的一组基

$(f_1, \dots, f_n) = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) Q$ 则 $f_1, \dots, f_n$ 为 N 的一组生成元

并且有 $(f_1, \dots, f_n) = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n) Q = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m) A Q = (e_1, \dots, e_m) P A Q$

所以有 $f_i = d_i e_i$ 即 $d_1 e_1, \dots, d_r e_r$ 为 N 的一组基, 因为 $e_1, \dots, e_r$ 线性无关可得 $d_1 e_1, \dots, d_r e_r$ 也是线性无关的.



推论 6 设 M 为 PID R 上有限生成模, 则 M 可分解为有限个模的直和: $M = RZ_1 \oplus RZ_2 \oplus \dots \oplus RZ_s$

满足: $\text{Ann}_R(Z_1) \supseteq \text{Ann}_R(Z_2) \supseteq \dots \supseteq \text{Ann}_R(Z_s)$

$\cap \text{Ann}_R(Z_i) \neq R$

证明

设 $x_1, \dots, x_m$ 为 M 的一组生成元. 则存在自由模 $R^{(m)}$ 及其一组基 $e_1, \dots, e_m$ 使得

$$\eta: R^{(m)} \rightarrow M$$

$$\sum_{i=1}^m a_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^m a_i x_i$$

设 $N = \ker(\eta) = (f_1, \dots, f_n)$ 则有 $M \cong R^{(m)} / N$

由定理 5, 存在 $R^{(m)}$ 的一组基 $e'_1, \dots, e'_m$ 使得 $d_1 e'_1, \dots, d_r e'_r$ 为 N 的一组基. 则有 $(e'_1, \dots, e'_m) = (e_1, \dots, e_m) P$

由于 $\eta(e_1), \dots, \eta(e_m)$ 为 M 的一组生成元, 则 $\eta(e'_1), \dots, \eta(e'_m)$ 也是 M 的一组生成元, 并且 $N = Rf'_1 \oplus \dots \oplus Rf'_r$

其中 $f'_i = d_i e'_i$. 令 $y_i = \eta(e'_i)$

由于 $N = \ker(\eta)$. 所以 $\forall i=1, \dots, r, d_i y_i = \eta(d_i e'_i) = \eta(f'_i) = 0$

反之, 若 $\sum_{i=1}^m b_i y_i = 0 \Rightarrow \eta\left(\sum_{i=1}^m b_i e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^m b_i e'_i = \sum_{i=1}^n c_i d_i e_i = 0$

$\Rightarrow b_i = c_i d_i (i=1, \dots, r), b_i = 0 (i > r) \Rightarrow b_i y_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, m$
(由和为 0 推出)

$\Rightarrow M = Ry_1 \oplus \dots \oplus Ry_m$

若 d_i 为可逆元使得 $d_i y_i = 0$ 则 $y_i = 0$, 则 Ry_i 为零模, 可以从中分解掉. 若 $\text{ann}_R(y_i) = \{0\}$, 则 Ry_i 为自由模.



引理 $M = K \oplus M'$

$M' = R\mathbb{Z}_1 \oplus \dots \oplus R\mathbb{Z}_r$

其中 $\text{ann}_R(\mathbb{Z}_i) = (d_i)$

(注) 这样我们利用有限秩的 Smith 标准形理论也可得到
 3 有限生成模的等-本原分解.

§2 有限秩的线性变换.

设 F 为域, V 为 F 上 n 维线性空间, $A: V \rightarrow V$ 为线性变换. 设 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ 为 V 的一组 F -基. 则 A 在该组基下的矩阵为 A , 即有

$$A(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) A$$

设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ 为 V 的另一组基, 并设 $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) P$
 则 A 在 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ 下的矩阵 $B = P^{-1}AP$

问题是: 如何选取 V 的一组基, 使得 A 在该组基下的矩阵“尽量”简单??

下面我们利用模的分解理论来研究有限秩的线性变换问题: 首先将 V 看成 $F[\lambda]$ -模.

$$f(\lambda) \cdot \vec{x} = f(A)(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in V, f \in F[\lambda]$$

(线性映射)
 (单变元多项式环)
 为 PID.



(注) 若 V 为 $F[x]$ -模 V_1 与 V_2 的直和, 则 V_1, V_2 为 V 的 A -不变子空间, 取 V_1, V_2 的基构成 V 的一组基, 在该基下 A 的矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, A_2 分别为 V_1, V_2 在其各自基下 A 的矩阵表示. 所以 A 的矩阵又依赖于 V 作为 $F[x]$ -模分解有密切关系.

有限维线性空间 V 作为 $F[x]$ -模也是有限生成的, 因为 F -基 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ 就是一组生成元. 并且我们已经证明过, V 为扭模, 即 $\forall \vec{x} \in V$, 存在 $f \in F[x]^{+}$, 使得 $f(x) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

即 $\text{ann}_{F[x]}(\vec{x}) = \{m(x) \mid m \neq 0\}$, 称 $m(x)$ 为 $\vec{x}$ 的 极小多项式.

若 $\vec{x} \neq \vec{0}$, 则 $\deg_\lambda(m(x)) > 0$.

由扭模的分解定理, V 可分解成一些循环子模的直和

$$V = F[x] \cdot \vec{x}_1 \oplus \dots \oplus F[x] \cdot \vec{x}_s$$

其中 $\text{ann}_{F[x]}(\vec{x}_i) = (d_i(x))$

且 $d_i \mid d_{i+1} \quad i=1, \dots, s-1$.

我们称 $d_1, \dots, d_s$ 称为 A 的 不变因子

定理 2.1 设 $A: V \rightarrow V$ 为有限维线性空间 V 上线性变换

则存在 V 的一组基 $\vec{x}_1, A(\vec{x}_1), \dots, A^{n_1-1}(\vec{x}_1), \vec{x}_2, \dots, A^{n_2-1}(\vec{x}_2), \dots, \vec{x}_s, A(\vec{x}_s), \dots, A^{n_s-1}(\vec{x}_s)$ 使得 A 在这组基下矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & & \\ & B_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & B_s & \end{pmatrix}, \quad \text{且} \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{i0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_{i1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -b_{in_i-1} \end{pmatrix}$$

B 称为 A 的有理标准形.



证明 由模分解定理 $V = F[\lambda] \cdot \vec{x}_1 \oplus \dots \oplus F[\lambda] \cdot \vec{x}_s$

令 $V_i = F[\lambda] \cdot \vec{x}_i$, 由于 $\text{ann}_R(\vec{x}_i) = (d_i(\lambda))$, d_i 为 $\vec{x}_i$ 的极小多项式, $n_i = \deg_\lambda(d_i)$

由根的性质知, $\vec{x}_i, \mathcal{A}(\vec{x}_i), \dots, \mathcal{A}^{n_i-1}(\vec{x}_i)$ 为 F 上线性无关的, 并且 $V_i = \text{span}_F \{ \vec{x}_i, \mathcal{A}(\vec{x}_i), \dots, \mathcal{A}^{n_i-1}(\vec{x}_i) \}$, 所以

$\phi := \{ \vec{x}_1, \mathcal{A}(\vec{x}_1), \dots, \mathcal{A}^{n_1-1}(\vec{x}_1), \dots, \vec{x}_s, \mathcal{A}(\vec{x}_s), \dots, \mathcal{A}^{n_s-1}(\vec{x}_s) \}$ 为 V 的一组基. 并且有 $\forall d_i = \lambda^{n_i} + b_{i,n_i-1}\lambda^{n_i-1} + \dots + b_{i,0}$

$$\mathcal{A}(\vec{x}_i, \mathcal{A}(\vec{x}_i), \dots, \mathcal{A}^{n_i-1}(\vec{x}_i)) = (\vec{x}_i, \mathcal{A}(\vec{x}_i), \dots, \mathcal{A}^{n_i-1}(\vec{x}_i)) B_i$$

其中 $B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -b_{i,0} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -b_{i,1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -b_{i,n_i-1} \end{pmatrix}$

并且 $\mathcal{A}$ 在 ϕ 下表示为 $A = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_s \end{pmatrix}$

(2) 由模分解的性质知: ① $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n = \dim_F(V)$

② $\text{ann}_{F[\lambda]}(V) = (d_s)$ 因为 $d_1 | d_2 | \dots | d_s$
并且 d_s 为 $\mathcal{A}$ 的极小多项式.

③ 设 $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ 为 $\mathcal{A}$ 的特征多项式, 我们知道 $f(\lambda)$ 与线性变换 $\mathcal{A}$ 选取无关. 由线性变换的不变性决定. 并且我们有

$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^s d_i(\lambda) \quad \left| \begin{array}{ccccc} \lambda & 0 & \dots & 0 & b_{i,0} \\ -1 & \lambda & \dots & 0 & b_{i,1} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & b_{i,n_i-2} \\ & & & & \lambda + b_{i,n_i-1} \end{array} \right| = d_i(\lambda)$$

这是因为 $|\lambda E_{n_i} - B_i| =$
因此 $\mathcal{A}$ 的特征多项式与其
极小多项式有相同的不可约因子

由于 $\text{ann}_{F[\lambda]}(V) = d_s \Rightarrow f(A) = 0$ - 9 -

§3 矩阵的若尔当(Jordan)标准形.

设 F 为代数闭域 (或可取为复数域) 则 $d_s(\lambda)$ 可分解为

$$d_s(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_j)^{e_{sj}} \quad e_{sj} \geq 1 \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

同样地, $d_i(\lambda) = \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j)^{e_{ij}} \quad e_{ij} \geq 0$ 并且有

$$0 \leq e_{1j} \leq e_{2j} \leq \dots \leq e_{sj} \quad j=1, \dots, r$$

因为 $d_1 | d_2 | \dots | d_s$.

由模的若尔当分解定理可知

$$F[\lambda] \cdot \vec{x}_i = \bigoplus_j F[\lambda] \cdot \vec{x}_{ij}$$

$$\text{其中 } \text{ann}_{F[\lambda]}(\vec{x}_{ij}) = (\lambda - \lambda_j)^{e_{ij}}, \quad e_{ij} \geq 1$$

$$\text{于是有 } V = \bigoplus_i \bigoplus_j F[\lambda] \cdot \vec{x}_{ij} \quad (*)$$

其中 $F[\lambda] \cdot \vec{x}_{ij}$ 为 A 的不变因子空间. 并且 A 限制到该空间上的线性变换 $A|_{F[\lambda] \cdot \vec{x}_{ij}}$ 的极小多项式为 $(\lambda - \lambda_j)^{e_{ij}}$. (否则 d_i 可取次数更小的多项式, 与 (*) 矛盾)

设 $F[\lambda] \cdot \vec{z}$ 为 V 的分解 (*) 中任一项. $\text{ann}_{F[\lambda]}(\vec{z}) = (\lambda - \lambda_1)^e, e \geq 1$

则 $(\lambda - \lambda_1)^e$ 为 $F[\lambda] \cdot \vec{z}$ 的极小多项式. 记 $V_1 = F[\lambda] \cdot \vec{z}$. 则

$\vec{z}, A(\vec{z}), \dots, A^{e-1}(\vec{z})$ 为 V_1 的一组 F -基. 并且 $\vec{z}, (\lambda - \lambda_1)(\vec{z}), \dots$

$(\lambda - \lambda_1)^{e-1}(\vec{z})$ 也是 V_1 的 F -基. 则有

$$A(\vec{z}) = \lambda_1 \vec{z} + (\lambda - \lambda_1) \vec{z}$$

$$A(\lambda - \lambda_1)(\vec{z}) = \lambda_1 (\lambda - \lambda_1) \vec{z} + (\lambda - \lambda_1)^2 \vec{z}$$

$$\vdots$$

$$A(\lambda - \lambda_1)^{e-1} \vec{z} = \lambda_1 (\lambda - \lambda_1)^{e-1} \vec{z}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ 0 & 1 & \lambda_1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

为 A 对应的矩阵

-10- 称这样的矩阵为若尔当块



定理 2.2 设 $A: V \rightarrow V$ 为线性变换且 $\dim_F(V) = n$, F 为代数闭域
 则存在 V 的一组基使得 A 在该基下无所为

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_t \end{pmatrix}$$

其中 J_t 为若尔当块. 这样的无所为称为 A 的若尔当标准形 (Jordan normal form)

线性变换 A 的不变因子的计算

设 $A: V \rightarrow V$ 为线性变换. V 可看成 $F[\lambda]$ -模
 我们自然关心 V 作为 $F[\lambda]$ -模的生成元及其之间的关系.
 由于 V 为有限维的, 则 V 可看成自由模的同态像.

设 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ 为 V 的 F -基. A 在这组基下无所为

$$(*) \quad A(\vec{u}_i) = \lambda \cdot \vec{u}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \vec{u}_j \quad i=1, 2, \dots, n$$

即有 $A(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) A$, $A = (a_{ij})$

下面来计算 A 的不变因子: 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 为自由模 $R^{(n)}$ 的基, 作同态映射:

$$\eta: R^{(n)} \rightarrow V$$

$$\text{令 } N = \ker(\eta)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i(\lambda) \cdot \vec{e}_i \mapsto \sum_{i=1}^n g_i(\lambda) \vec{u}_i$$

$$\text{由 } (*) \text{ 式可知, } \vec{f}_1 = (\lambda - a_{11})\vec{e}_1 - a_{21}\vec{e}_2 - \dots - a_{n1}\vec{e}_n$$



$$f_2 = -a_{12}\vec{e}_1 + (\lambda - a_{22})\vec{e}_2 - \dots - a_{n2}\vec{e}_n$$

$$\vdots$$

$$f_n = -a_{1n}\vec{e}_1 - \dots + (\lambda - a_{nn})\vec{e}_n$$

即有

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) (\lambda E - A)$$

由 $\lambda \vec{u}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \vec{u}_j \Rightarrow \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n \in N$

下面证明 $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ 构成自由模 N 的一组基 (作为 $F[\lambda]$ -模)

① 首先证明 $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ 为 N 的生成元

$$\forall h \in N, \quad h = \sum_{i=1}^n g_i(\lambda) \vec{e}_i \quad \text{设 } m = \max \{\deg_\lambda g_i\}$$

则 h 可写成:

$$h = \lambda^m \sum_{i=1}^n b_{mi} \vec{e}_i + \lambda^{m+1} \sum_{i=1}^n b_{m+1,i} \vec{e}_i + \dots + \sum_{i=1}^n b_{0i} \vec{e}_i$$

下面对 m 作归纳法: 若 $m=0$, 则

$$\eta(h) = \sum_{i=1}^n b_{0i} \vec{u}_i = \vec{0} \Rightarrow b_{0i} = 0 \Rightarrow h = \vec{0}$$

假设 $m < k$ 时, h 总可写成 $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ 在 $F[\lambda]$ 上线性组合.

$m=k$ 时, 将 h 中 $\lambda \vec{e}_i$ 换成 $\vec{f}_i + \sum_j a_{ji} \vec{e}_j$ 可得

$$h = \lambda^k \sum_{i=1}^n b_{ki} \vec{e}_i + h_1 = \lambda^{k+1} \sum_{i=1}^n b_{ki} \vec{e}_i + h_1$$

$$= \lambda^{k+1} \sum_{i=1}^n b_{ki} (\vec{f}_i + \sum_j a_{ji} \vec{e}_j) + h_1$$

$$= \lambda^{k+1} \sum_{i=1}^n b_{ki} \vec{f}_i + \underbrace{\lambda^{k+1} \sum_i b_{ki} \left(\sum_j a_{ji} \vec{e}_j \right)}_{\vec{h}_2} + h_1$$

$\vec{h}_2$ 的次数 $< h$ 的次数 并且 $\eta(h) = \eta(\vec{h}_2)$. 由归纳假设

$\vec{h}_2$ 可写成 $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ 的线性组合. 所以 $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ 为 N 的生成元



(2) 下证 $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ 在 $F[\lambda]$ 上线性无关. 反证法, 假设 $\vec{f}_i$ 在 $F[\lambda]$ 上线性相关, $\exists g_1, \dots, g_n \in F[\lambda]$, 不全为 0, 使得

$$g_1 \vec{f}_1 + \dots + g_n \vec{f}_n = \vec{0}$$

在这些 g_i 中有一项次数最高的. 不妨设为 $g_1 \neq 0$
 $\deg_\lambda(g_1) \geq \deg_\lambda(g_i), i=2, \dots, n$. 则按 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 系数写出
 得 $\vec{e}_i$ 的系数为

$$q(\lambda) = \lambda g_1(\lambda) - a_{11} g_1(\lambda) - a_{12} g_2(\lambda) - \dots - a_{1n} g_n(\lambda)$$

由于 $\deg_\lambda(g_1) \geq \deg_\lambda(g_i), i=2, \dots, n$, 则 $q(\lambda)$ 的最高项出
 现在 $\lambda g_1(\lambda)$ 中, 且非零. 矛盾!

由此可知, $\lambda E - A$ 的不变因子 $d_1, \dots, d_n$ 中 $d_1 = \dots = d_t = 1$
 $d_{t+1} \neq 1$, 则 $d_{t+1}, \dots, d_n$ 为 A 的不变因子.

例 2 $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$(\lambda E - A) = \begin{pmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda+2 & 1 \\ -6 & -3 & \lambda-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda+2 & 2 \\ \lambda-2 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1 \\ 0 & -(\lambda+1) & -\lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 0 & -(\lambda+1) & -(\lambda+1)(\lambda+1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -(\lambda+1) & -(\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+1)^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix} \quad \text{则 } (\lambda+1), (\lambda+1)^2 \text{ 为 } A \text{ 的不变因子}$$

对应的有理标准形为 $A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 对应的实标准形为 $A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

