

# 几何约束求解研究综述

高小山<sup>1)</sup> 蒋 鲲<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(中国科学院数学与系统科学研究院 北京 100080)

<sup>2)</sup>(黑龙江大学理学院 哈尔滨 150080)

**摘 要** 综述了几何约束求解的历史发展、研究现状和应用. 对常见的 4 类求解方法: 数值计算的方法、符号计算的方法、基于规则的方法、基于图论的方法做了详细的介绍. 同时还列举了几何约束求解在计算机视觉、连杆设计、机器人、分子结构设计和计算机辅助教学等方面的应用实例.

**关键词** 几何约束求解; 变量化设计; 智能 CAD; 参数化设计; 基于图论的方法; 基于规则的方法; 基于数值计算的方法; 基于符号计算的方法; 广义 Stewart 平台问题; 连杆设计; 计算机辅助教学; PnP 视觉定位问题; 线图的三维实现  
中图分类号 TP391

## Survey on Geometric Constraint Solving

Gao Xiaoshan<sup>1)</sup> Jiang Kun<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

<sup>2)</sup>(College of Sciences, Heilongjiang University, Harbin 150080)

**Abstract** History, current research status and applications of geometric constraint solving are outlined. Four approaches to geometric constraint solving, namely graph-based, rule-based, numerical computation-based and symbolic computation-based are described in detail. Some applications of geometric constraint solving in the fields of computer vision, linkage design, robotics, molecular conformation design and computer aided instruction etc. are illustrated.

**Key words** geometric constraint solving; variational design; intelligent CAD; parametric design; graph-based; rule-based; numerical computation-based; symbolic computation-based approach to geometric constraint solving; general Stewart platform problem; linkage design; computer aided instruction; PnP problem; 3D realization of line sketch

## 1 引 言

几何约束求解可以理解为几何作图的自动化. 几何作图问题可以追溯到古希腊时期对规尺作图问题的研究. 18 世纪出现的工程图学实际上是摄影几

何学与规尺作图技术在工程设计中的应用. 1963 年, 美国麻省理工学院 24 岁的研究生 Sutherland 提出了 CAD 的概念<sup>[1]</sup>. 早期的 CAD 系统(如 AutoCAD)实际上是规尺作图的直接计算机化, 只是提供给用户一个电子图板. 其典型的设计过程可分为概念设计、初步设计、具体设计、结果设计和结果评价等步

原稿收到日期 2003-08-15; 修改稿收到日期 2003-10-29. 本课题得到国家重点基础研究发展规划项目(G1998030600)和数学天元青年基金(10226006)资助. 高小山, 男, 1963 生, 博士, 研究员, 博士生导师, 主要研究方向为自动推理、智能 CAD、计算机代数. 蒋 鲲, 男, 1972 年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为智能 CAD、几何自动推理.

骤. 由于概念设计和初步设计阶段要靠设计者的知识和经验来完成, 而这些知识和经验往往不能用精确的数字模型和算法来描述, 因此传统的 CAD 系统对此描述很难胜任, 主要表现在以下几个方面:

(1) 传统 CAD 系统一般要求用户用构造语句输入几何图形, 但有些图形的构造性描述并不容易. 例如, 图 1 所示要求作一个已知四边长和两对边夹角的四边形, 但寻找一个规尺作图方法并不容易.

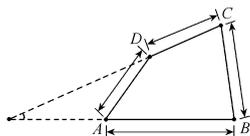


图 1 不容易构造性描述的图

(2) 满足所给条件的几何图形往往不止一个, 例如, 满足图 1 所示条件的几何图形就有两个:  $ABCD$  和  $ABEF$ , 如图 2 所示. 这种多解问题对于概念化设计是很重要的, 但传统 CAD 系统往往不能给出所有的解.

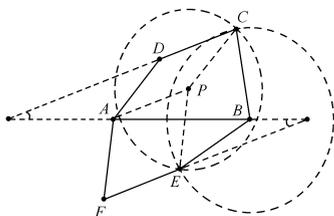


图 2 多解的图

(3) 由 Gauss 的经典结果可知, 使用规尺作图的范围是有限的, 很多简单的工程图形根本就不能用几何构造法获得. 如图 3 所示, 如果已知 9 条边的边长, 就不能用规尺构造出来.

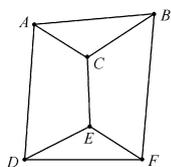


图 3 不能用规尺作图的例子

为了弥补传统 CAD 系统的不足, 更好地满足概念化设计的要求, 提高设计效率, 人们试图将人

工智能的思想和方法引入到 CAD 系统中. 由此在 20 世纪 70 年代出现了一个新的研究领域——智能 CAD. 参数化和变量化是智能 CAD 的主要特征和标志.

20 世纪 80 年代后期出现的参数化技术首次引入了约束的概念. 参数化技术将一组参数与控制零

部件几何图形的一组结构尺寸序列相对应, 当赋予不同的参数值时, 就可以产生一系列具有相似几何图形的零部件. 参数化实体造型技术的特点是: 基于特征的设计、全尺寸约束、全数据相关、尺寸驱动设计的修改<sup>[2]</sup>. 第一个采用这项技术创新的是 PTC 公司研制的 Pro/Engineer 参数化软件.

1997 年, SDRC 公司首次提出了变量化技术, 这是参数化技术的一次飞跃<sup>[3-4]</sup>. 变量化技术将整个设计草图当作一个完整的系统来考虑, 与构造过程的顺序无关. 变量化技术还将草图中的控制尺寸和拓扑关系都用约束来表示, 这使得设计初期的草图可以不是完全定义的, 将没有完全定义的控制尺寸和拓扑关系用变量存储起来, 暂时以当前的绘制尺寸赋值. 设计者可以在任何阶段对草图中的任何尺寸和拓扑关系进行重新定义, 同时这种重新定义也不必牵涉草图中所有几何实体的改动. 变量化技术提供的灵活更改模型的方式有效地支持了 CAD 的概念化设计<sup>[5]</sup>, 可以使设计者的创造力和想象力得到更充分的发挥.

参数化技术与变量化技术的核心是一旦给定了设计草图的若干尺寸和拓扑关系软件, 系统就可以自动生成相应的设计图. 我们将这一求解过程称为几何约束求解. 几何作图问题经常出现在计算机视觉、连杆设计、机器人、分子结构设计等领域中. 因此, 几何约束求解不仅对 CAD 系统的性能至关重要, 作为一项基本技术它还可以用于其他众多的工程领域.

## 2 几何约束求解问题

给定一个几何体 (二维中的点、直线、圆、圆弧和三维中的点、直线、平面、球面、曲面等) 的集合  $O$  和一个关于集合  $O$  中几何体之间的几何约束 (点与点之间的距离、直线与直线之间的角度、两条直线垂直和直线与圆的相切等) 的集合  $C$ . 我们将二元组  $(O, C)$  称为几何约束问题. 几何约束求解是指根据一定的算法作出一个或所有满足集合  $C$  的几何图形. 通常, 用户总是先画出一个设计问题的草图, 所以, 几何约束求解实际上是在一个草图的基础上进行求解. 我们可以将几何约束问题分成三类:

(1) 完整约束几何约束问题——几何约束问题所对应的几何图形的形状有有限个.

(2) 欠约束几何约束问题——几何约束问题所对应的几何图形的形状有无限个.

(3) 过约束几何约束问题——几何约束问题无解。

弄清楚一个几何约束问题属于哪一类,通常是求解的第一步。然而,我们很难在求解一个几何约束问题之前就能判断出这个问题是属于哪一类的,因此一般应对几何约束问题进行结构分类。先引入几个相关的概念。

**定义 1.** 几何约束问题的图表示。通常我们用图  $G=(V, E)$  来表示一个几何约束问题,其中,  $V$  代表几何约束问题的几何体的集合;  $E$  代表几何约束问题的几何约束的集合;  $G$  称为几何约束问题的约束图。一种更一般的方法是用偶图  $G=(V^+, V^-, E)$  来表示一个几何约束问题,其中,  $V^+$  表示几何体;  $V^-$  表示几何约束;  $E$  表示相应的几何体与几何约束之间有关联。

**定义 2.** 几何体的自由度。指要确定这个几何体的位置所需要的独立参数的个数,我们用  $DOF(O)$  来记几何体  $O$  的自由度。例如,二维空间中的点的自由度是 2,圆的自由度是 3,线段的自由度是 4;三维空间中的点的自由度是 3,直线的自由度是 4。对于一个几何约束问题的图表示  $G=(V, E)$ ,显然  $DOF(V) = \sum_{v \in V} DOF(v)$ 。

**定义 3.** 几何约束的约束度。指为了描述一个几何约束所需要的数值方程的个数,我们用  $DOC(O)$  来记几何约束  $C$  的约束度。例如,点与点之间的距离约束的约束度是 1,点  $M$  是线段  $AB$  的中点的三元约束的约束度是 2。对于一个几何约束问题的图表示  $G=(V, E)$ ,显然  $DOC(E) = \sum_{e \in E} DOC(e)$ 。

由以上的定义,我们称一个几何约束问题  $G=(V, E)$  是:

(1) 结构过约束的。如果存在一个导出子图  $H=(V_H, E_H)$ ,使得  $DOC(E_H) > DOF(V_H) - D$ 。

(2) 结构欠约束的。如果  $G$  不是结构过约束的且有  $DOC(E) < DOF(V) - D$ 。

(3) 结构完整约束的。如果  $G$  所对应的几何约束问题既不结构欠约束,也不结构过约束。

(4) 严格完整约束的。如果  $DOC(G) = DOF(G)$  且  $G$  的每个子图  $H$  满足条件  $DOC(H) \leq DOF(H) - D$ 。

其中,在二维情形中  $D=3$ ,在三维情形中  $D=6$ 。

人们经常用几何图形的结构约束性质(结构完整的、结构欠约束的和结构过约束的)来刻画几何

图形的几何约束性质(完整约束的、欠约束的和过约束的)这在大多数情形中是正确的,但是,由几何图形的结构约束性质并不总能推断出几何图形的实际约束性质。例如,一个结构完整约束的问题可能大部分情形是完整约束问题,但也有可能是过约束的和欠约束的。这类问题的严格判定需要用符号计算技术<sup>[6]</sup>。

基于工程问题的要求,我们通常用下面的标准来评价一个几何约束求解新方法:

(1) 求解的范围。算法能够求解的几何约束和几何体的类型。

(2) 算法的速度。算法的复杂度和实际测试速度,特别是能否处理大型约束问题。

(3) 求解的完备性。能否找到所有的解和能否处理欠约束和过约束问题。

(4) 算法的稳定性。算法对草图修改的稳定性。

### 3 几何约束求解算法

几何约束求解的一个显然的想法是将其化为代数方程组,然后求解这一方程组。由于几何约束问题往往涉及到非常多的几何体,因而会产生大型非线性方程组。至今尚无求解大型非线性方程组的完整稳定的方法,因此,几何约束求解的基本思想就是“分而治之”,即将一个大的问题分解为若干小的问题。基本框架如下。

**算法.  $DC(P)$**

Step1. 分解:  $P \Rightarrow P_1 \cup \dots \cup P_m$ 。

a. 基于图论的方法

b. 基于规则的方法

Step2. 分而治之:  $S_i = DC(P_i)$ 。

Step3. 装配:  $S_1 \cup \dots \cup S_m \Rightarrow S$ 。

a. 数值计算方法

b. 符号计算方法

所有的几何约束求解方法都可以理解为以上想法的一个具体化。其中关键的两步是分解与装配,而现有的 4 类几何约束求解方法:基于图论的几何约束求解方法、基于规则的几何约束求解方法、基于数值计算方法的几何约束求解方法和基于符号计算方法的几何约束求解方法,也主要是针对这两类问题的。

#### 3.1 基于图论的几何约束求解方法

基于图论的方法的优点是速度快,而且大部分算法有较低的计算复杂度,因此其应用最广泛。

前面提到,最简单的几何约束问题是可以顺序

构造的问题,即一个作图问题不添加辅助点就可以用规尺作图方法解决,否则称为循环问题. 衡量一种分解方法的优劣主要是看它处理循环问题的能力. 顺序构造的问题可以用基于规则的方法求解<sup>[7-11]</sup>,如果利用基于图论的方法,我们可以给出求解这类问题的线性算法<sup>[12-15]</sup>.

对于有循环的几何约束问题, Owen 给出了第一个算法,即三角分解法<sup>[16-17]</sup>. 该方法将一个大的

几何约束问题分解为若干小的三角形. 以此为基础, Owen 开发了 DCM(Dimensional Constraint Manager) 系统. Hoffmann 等提出了一种基于簇合并的方法<sup>[18-20]</sup>,如图 4~6 所示. 该方法可以求解 2D 和 3D 中的几何约束问题. Latheam 等引入 s-树算法提出了一个几何约束求解的连通图算法<sup>[21]</sup>. 此方法与 Owen 和 Hoffmann 提出的方法基本等价,但是概念较简单.

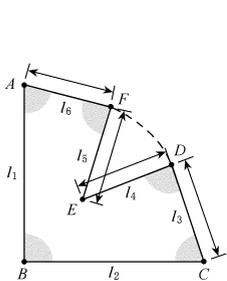


图 4 一个几何约束问题

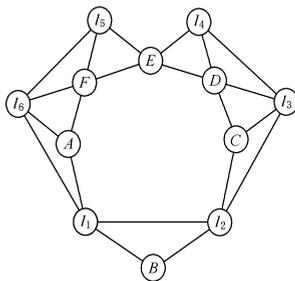


图 5 图 4 的约束图

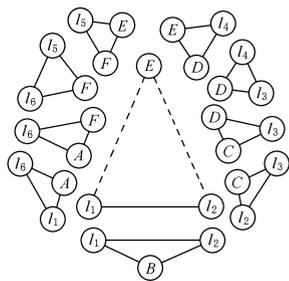


图 6 图 5 的三角形分解

Owen 和 Hoffmann 方法的本质是用三角形作为“基本构型”解决一类几何约束问题. 文献 13 提出了一般基本构型的概念,即不能用某类方法求解的最小的几何约束问题. 二维情形除了三角形外,图 7 所示也是一个基本构型. 实际上,一旦解决了一个基本构型,就等于解决了一大类几何约束问题.

文献 13 用程序找到了三维空间中包含不多于 6 个几何体的所有的几何基本构型,共 701 种. 图 8 所示为其中最小的一个,由 4 条线组成,  $l_1$  与  $l_2$ ,  $l_2$  与  $l_3$ ,  $l_3$  与  $l_4$ ,  $l_1$  与  $l_4$  之间存在距离和角度的约束;  $l_1$  与  $l_3$ ,  $l_2$  与  $l_4$  之间存在距离约束. 图 9 所示为三维情形包含点和面的最小基本构型<sup>[13]</sup>.

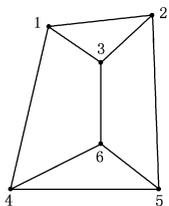


图 7 二维情形包含点和线的最小三连通图

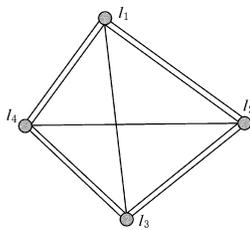


图 8 三维情形包含点、线和面的最小基本构型

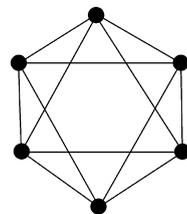


图 9 三维情形包含点和面的最小基本构型

很明显,“基本构型”是无穷的,所以要想解决所有的几何约束问题,我们还需要一个一般的方法. 第一个可以处理一般问题的方法是由 Latheam 等设计的一种连通性分析算法<sup>[21]</sup>. 该算法是利用偶图的 b-匹配算法将一个几何约束问题分解为广义构造序列. 一个广义构造序列是指  $GC : C_1, C_2, \dots, C_n$ . 其中,每个  $C_i$  是一个由几何体构成的集合,使得

(2) 不存在满足条件 (1) 的  $C_i$  的真子集.

图 10 所示为一个三维问题的广义构造序列的例子,这个几何约束问题的广义构造序列有三种:

$$GC_1 : \{P\}, \{Q\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \{U, V, W\};$$

$$GC_2 : \{P\}, \{Q\}, \{U\}, \{V\}, \{W\}, \{A, B, C, D\};$$

$$GC_3 : \{W\}, \{D\}, \{P, Q, A, B, C, D, U, V\}.$$

很明显,求解  $GC_1$  所需的计算量最少.

(1) 当  $1 \leq i \leq n$  时,由  $B_i = \bigcup_{k=1}^i C_k$  严格完整约束. 因此,我们假定  $B_i$  是一个刚体.

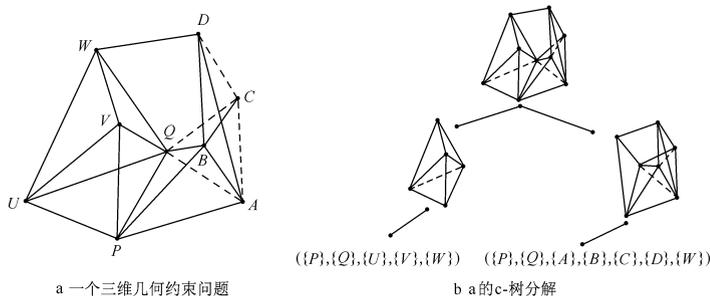


图 10 一个三维问题的广义构造序列的例子

Lamure 等也提出了一种与文献 [21] 相似的基于偶图中最大匹配算法的方法<sup>[22]</sup>。文献 [13, 21-22] 方法的缺点是不能给出几何约束问题的最优分解。为了得到最优分解, Hoffmann 等根据文献 [23] 中给出的找到一个约束问题中刚体的算法, 提出了一种求解几何约束问题的通用方法<sup>[20]</sup>。基于文献 [23] 中的方法, Jermann 等也提出了一种一般性的求解几何约束问题的方法<sup>[24]</sup>。结合 Joan-Arinyo 等<sup>[25]</sup>提出的 s-树的想法以及 Latheam 等<sup>[21]</sup>提出的方法, 我们设计了一种可以将一个几何约束图分解为一个 c-树的方法<sup>[26]</sup>。如图 10 所示的三维问题被分解为两个顺序构造序列:  $P, Q, U, V, W$  与  $P, Q, A, B, C, D, W$ 。我们可以先求解第一个构造序列, 再用所得到的信息求解第二个构造序列。Ait-Aoudia 等利用偶图的理论将原有的几何约束问题分解成一些小的完整约束、过约束和欠约束的几何约束问题的集合<sup>[27]</sup>。利用这种方法可以处理过约束和欠约束的几何约束问题。Hsu 等利用图论的方法来分析几何体的自由度, 提出了求解几何约束问题的自由度分析法<sup>[28]</sup>。文献 [12, 14, 29] 提出了一种剪枝-归约算法的几何约束分解策略。陈立平等针对欠约束情况下约束求解规划存在的问题, 提出了一种几何约束系统有向图优化处理算法<sup>[30-33]</sup>, 成功地实现了约束求解排序的自适应优化调整, 有效地提高了约束系统的求解质量。董金祥等<sup>[34-36]</sup>提出了一种基于几何抽象的约束求解, 通过几何抽象来表达约束, 并利用约束网的形式, 在约束网中心层进行几何化简推导和运算, 以获得约束解集。这种方法对于欠约束和过约束的反馈更具有几何意义。另外, 文献 [37-43] 也给出了一些基于图论的几何约束求解方法。

### 3.2 基于规则的几何约束求解方法

基于规则的几何约束求解方法首先将几何约束用谓词来表示, 然后将一系列重写规则应用于这些谓词, 经过一定推理, 最后将几何约束问题转化成一

个可构造的形式, 一般是通过规尺将满足几何约束的几何图形构造出来。下面介绍几种主要的方法。

(1) 延拓法。延拓法是一种自动推理的基本方法<sup>[9, 44]</sup>。文献 [10, 44-47] 尝试用这种方法求解几何约束问题。文献 [7] 将延拓法推广为全局延拓法, 最大限度地求解有循环的几何约束问题。其基本思想有两点: 一是在延拓中使用全局信息; 二是使用尽量多的几何规则以扩大几何约束问题的求解范围。

(2) 自由度分析法。Kramer 提出了一个可以处理三维几何约束问题的自由度分析法<sup>[8, 48]</sup>, 用于处理由连杆所产生的几何约束问题。文献 [49-50] 提出了一种以图论、稀疏矩阵和自由度分析等理论为基础的几何约束满足问题的规约分治算法, 通过对几何约束系统的最大分解, 大大减少了约束求解的规模。

(3) 推理数据库。Brüderlin 利用推理数据库的方法求解几何约束问题<sup>[51]</sup>, 并且在用 PROLOG 程序语言实现算法的同时, 向 Modula-2 程序语言提供了一个接口, 使得这两个程序语言可以通过一个共同的推理数据库来实现交流。还有一些利用数据库推理的方法进行几何约束问题求解的算法<sup>[7, 52-60]</sup>。

(4) 引进新的作图工具。大部分工作使用规尺作为作图的基本工具, 但规尺的作图范围是非常有限的。文献 [61] 引进了二次曲线和四连杆作为新的作图工具, 并证明了:

a. 一个几何图形可以由直线、圆和圆锥曲线构造, 当且仅当该几何图形可以由一组三角化的次数小于等于 4 的方程组来描述;

b. 连杆是一般的作图工具, 即对于一个可以顺序构造的几何约束问题, 可以设计一组连杆求解; 图 3 表示的 13 种几何约束问题是可以四连杆顺序求解的。

(5) 简单多边形的规尺作图。基于规则的方法一般很难说明其求解范围, 而简单多边形是一个特

例. 在文献 62 提出了几何约束求解的平行四边形法, 文献 7 提出了平移空间规则. 文献 63 通过引进三角变换、角度变换和平行变换求解几何约束问题, 并证明这一方法是一个完全求解简单多变形的作图问题的二次算法.

文献 64 提出了一种数值的几何约束求解方法和基于规则的几何约束求解方法相结合的方法. Lee 等将图论方法与基于规则的方法结合起来以提高速度<sup>[40-41]</sup>, 但是由于取消了回溯而缩小了方法的适用范围.

基于规则的几何约束求解方法的优点是可以充分利用几千年来人类积累的关于几何研究的优秀成果, 处理一些复杂的几何约束. 一旦几何约束问题可以转化成可构造的形式, 就可以很快构造出满足约束的几何图形, 而且构造步骤简单明了, 容易被用户理解. 但是, 由于推理过程中往往要搜索和匹配整个数据库, 导致用这种方法求解几何约束问题的速度比较慢而且实现起来也很困难. 对于过约束和欠约束问题, 基于规则的方法会以交互的方式提醒用户发生过约束和欠约束的位置, 同时给出几种可选的解决方案供用户选择, 但是, 能否实现这种交互要取决于用于推理的数据库的建立原则.

### 3.3 基于数值计算的几何约束求解方法

几何约束求解的一个自然的想法是将约束转化为代数方程, 此时几何约束求解就相当于一个非线性方程组的求解. 由 Sutherland 研制的第一个 CAD 系统——Sketchpad, 就使用了这类方法<sup>[1]</sup>. 数值方法的优点是速度快, 而且能够解一些其他方法解不了的、大的几何约束问题, 缺点是对初值的选取比较敏感且只能求得一个解. 在实际的几何约束问题求解的过程中, 当用其他的方法无效时, 最终都用数值计算的方法来求解. 通常, 几何约束求解软件总是试图将问题分解为更简单的问题, 对于不能分解的问题则用数值方法求解, 所以数值计算是约束求解系统必备的方法.

Newton-Raphson 迭代法是使用最多的一种数值计算方法<sup>[4, 65]</sup>. Newton-Raphson 迭代算法通过迭代过程  $X_{k+1} = X_k - J(X_k)^{-1} F(X_k)$  逐渐逼近方程组的解. 这里  $J(X_k)$  是  $F(X)$  在点  $X_k$  的 Jacobi 矩阵,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是方程组向量,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是变元向量. 这种方法的求解速度快, 使用范围广, 但是需要一个好的初值, 对初值的选取比较敏感且只能求得一个解. 当初值发生微小的变化的时候, 用这种方法求解可能会发散或者收敛到一个用户不想要的解. 为此, Juno 提出用

草图作为初值的方法<sup>[66]</sup>. 为了降低对初值的敏感性, Light 等提出一种求逆矩阵的新方法<sup>[67]</sup>, 同时他们又提出了一个改进的 Doolittle's 方法用以解决矩阵奇异的问题.

同伦连续法在一定程度上可以弥补 Newton-Raphson 方法对初值的选取比较敏感这个缺点<sup>[4]</sup>. 同伦连续法理论上可以找到方程组的所有解, 但是要对方程组解的个数有一个很好的估计, 而这往往是很困难的. 同伦连续法通常需要很大的计算量, 一般仅限于求解一些小的方程组.

文献 6 提出了一种将代数方程组  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  的求解转化成对一个优化问题  $f = \sum_{i=1}^n f_i^2$  的极小值求解, 然后再用拟 Newton 法求解这个极小值. 这一方法综合了数值方法的大部分优点, 它可以处理结构欠约束和过约束问题, 而且速度很快. 下面的例子表明这一方法可以处理包含上百个非线性方程的联立方程组. 如图 11 所示, 我们将  $n(n+1)/2$  个圆相互相切地堆积到一个给定的圆中, 其中  $n$  是圆的行数. 当  $n=8$  的时候, 我们需要求解包含 24 个 4 次方程和 84 个二次方程的非线性方程组. 表 1 所示为算法在 CPU 是 1.5G 的计算机上的运行时间统计.

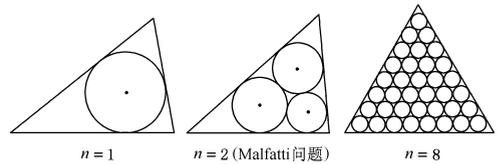


图 11 相切圆填充问题

表 1 相切圆填充问题的运行时间统计

圆的个数(行数)	4次方程的个数	2次方程的个数	运行时间(s)
3(2)	6	3	0.18
6(3)	9	9	0.50
10(4)	12	18	1.72
15(5)	15	30	1.93
21(6)	18	45	4.15
28(7)	21	63	10.92
36(8)	24	84	15.45

为了求得问题的全部解, 一个自然的想法是借用已有的全局优化方法, 如文献 58, 68 提出用遗传算法来求解几何约束问题. 但是这类方法只能处理规模较小的问题. 文献 13 给出了一个轨迹求交的

几何约束求解的数值方法,该方法可以完全求解三维空间中所有只包含点、线和面的基本构型的问题。

### 3.4 基于符号计算的几何约束求解方法

数值方法一般不能精确地判定几何约束问题的类型,也不能给出几何约束问题的所有解。对于一般的几何约束问题,只有借助于符号计算方法可以做到这一点。这类方法大致有三种。

(1)用 Wu-Ritt 特征列方法<sup>[69]</sup>将方程组化简为一个包含容易求解的简单代数方程组。其基本思想是将一般形式的代数方程组化为三角列,然后再对方程组进行求解。文献[70]中还给出了一个几何约束问题能否规尺作图的判定算法,即一个几何约束问题是否可以归结为线性与二次方程组的三角列。

(2)基于理想多项式理论的 Gröbner 基方法<sup>[71]</sup>。首先将方程组转化成一个同解的三角化方程组,这个方程组可以很容易地用回代的方法求解。用这种方法求解的最著名的算法是 Buchberger 算法。Gröbner 基方法被广泛应用于代数和几何中<sup>[72]</sup>,在文献[73]中被应用于几何约束求解。

(3)结式法<sup>[74]</sup>。其基本思想是利用原方程组生成一个以原有的方程组中的变量的系数为变量的行列式。基于符号计算方法的几何约束求解方法的优点是可以进行符号求解,即方程组的变量的系数可以是一个符号而不必是具体的数值,这大大增强了几何约束求解的效率。另外,符号计算方法还可以用来判定几何约束问题是否为完整约束的、欠约束的和过约束的,这是数值方法所不能做到的。与数值的几何约束求解方法不同的是,符号的几何约束求解的方法可以求出方程组所有解。符号的几何约束求解方法的不足是求解速度比较慢,通常需要消耗大量的计算时间和空间。

### 3.5 几何约束求解中的一些问题

除了以上提到的速度、求解范围等重要问题外,在设计一个几何约束求解算法的时候,我们通常会考虑以下几个问题:

(1)欠约束和过约束问题的处理。一般地,一个设计过程是逐步进行的,即几何约束是逐步加上去的。如果要求几何约束求解系统在每加一次约束时都显示结果,则必须处理欠约束的几何约束问题,处理方法见文献[20-21, 25, 31]。在加约束的过程中,有时会在局部导致过约束的情形,所以对过约束问题的处理也是非常重要的。

(2)多解的选择。对于一个几何约束问题,几何约束求解算法通常会给出许多解,如何选择令设计者满意的解是一个非常重要的问题。通常的做法有两种:

- a. 将算法给出的解全部列出来,供用户选择;
- b. 由算法自动找出与初始草图拓扑性质最相近的几何图形作为最优的解<sup>[21, 50]</sup>。

(3)参数的有效范围。智能 CAD 通过修改定义几何实体的几何约束来生成一个新的几何实体。在生成一个几何实体时,常常由于所给的参数值不合理而导致重新生成的几何实体的拓扑形状发生改变,有时甚至无法重新生成几何实体。在重新生成几何实体时,对几何约束的赋值不当是导致这种失败产生的原因。如何确定草图中参数的有效范围,使得在这个范围内对参数赋值后重新生成的几何实体能够保持不变的拓扑形状的问题就显得尤为重要。文献[75-76]分别给出了确定参数的有效范围的代数方法和图论方法。

## 4 几何约束求解的应用——工程几何

很多工程问题最终可以归结为几何作图问题。我们把几何约束求解算法在工程中的应用研究统称为工程几何。下面介绍工程几何中的若干问题。

### 4.1 智能 CAD 系统

前面提到几何约束求解起源于智能 CAD 系统。智能 CAD 系统的一个核心模块就是几何约束求解模块。一般认为二维的几何约束求解系统已经比较成熟,但是三维的几何约束求解的稳定性问题还需要进一步研究。目前,智能 CAD 系统已经在国内外大型的工程制造类企业中得到广泛的应用,按照软件的功能和应用领域可以分成高端、中端和低端三个层次。高端产品主要应用在汽车和飞机等大型的设计工程中;中端产品主要应用在家电和机床设计等一般的制造业中;低端产品主要应用在家电装修设计。现在应用比较广泛的是如表 2 所示 4 个公司开发的智能 CAD 系统。

表 2 国内外智能 CAD 系统

公司名称	高端产品	中端产品	低端产品(二维)
Dassault System	CATIA	SolidWorks	
EDS	UG, IDEAS	SolidEdge	
PTC	Pro/Engineer	Pro/Desktop	
Autodesk		Inventor, MDT	AutoCAD

### 4.2 广义 Stewart 平台

Stewart 平台是一个最基本的空间并联机构,由一个动平台、一个定平台以及连接两个平台的可伸展的 6 条“腿”组成<sup>[77]</sup>(如图 12 所示)。Stewart 平台被应用于解决机器人、数控机床、天文望远镜和纳米

操作等问题<sup>[77]</sup>。文献 [26] 中从几何约束的角度出发引进了广义 Stewart 平台的概念,即两个平台由 6 个点、线和面间的角度与距离约束联接,如图 12 所示。这种广义 Stewart 平台共有 3 850 种。引进广义 Stewart 平台的目的是设计更易操作的并联机构,如求 Stewart 平台是正解这个十分困难的问题,到目前为止还未彻底解决。文献 [26] 证明了很多广义 Stewart 平台的正解是容易求解的,并且给出了有三个角度约束和三个距离约束的 1 120 种广义 Stewart 平台的正解。另外,文献 [78] 还引入了平面广义 Stewart 平台(如图 13 所示),即由三个几何约束确定的一个平面刚体的位置,并且给出了所有 11 种平面广义 Stewart 平台的解析解。

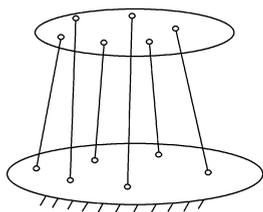


图 12 Stewart 平台

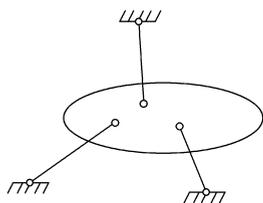


图 13 二维 Stewart 平台

### 4.3 Kempe 连杆的自动生成

连杆设计与综合是机构学的基本问题之一。如四连杆的设计问题是一种典型的几何作图问题<sup>[79]</sup>。文献 [80-81] 从几何约束的角度出发考虑了复杂连杆的模拟问题。

Kempe 连杆是一种最一般的连杆。1876 年, Kempe 证明了任意代数平面曲线能被一个连杆机构所生成<sup>[82]</sup>。利用几何约束求解,可以自动设计构造一个连杆机构来生成一个给定的平面代数曲线。Kempe 连杆也被用于几何约束求解<sup>[61]</sup>, 对于一个给定的代数曲线方程  $f(x, y) = 0$ , 我们可以将其变

换成  $f = \sum_{i=1}^n A_i \times \cos(\alpha_i \varphi \pm b_i \theta \pm \beta_i) + C = 0$ 。其中  $m$  是连杆的长度;  $\varphi$  和  $\theta$  是连杆与  $X$  轴的夹角;  $A_i$  和  $C$  是常数;  $\alpha_i$  和  $b_i$  是正整数;  $\beta_i$  等于  $\pi/2$  或  $0$ 。

这些公式所表示的曲线可以通过若干基本连杆画出来,而 Kempe 连杆的模拟则变为一个几何约束求解问题<sup>[83]</sup>。

### 4.4 PnP 视觉定位问题

计算机视觉中一类基本问题是 PnP 问题。PnP 问题还在计算机动画、图像分析、地图测绘和机器人中有非常重要的应用。PnP 问题是指给定  $n$  个控制点  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  的相对空间位置和各个控制点到透视中心( $C_p$ )的夹角,求连接透视中心  $C_p$  和控制点的线段长度。PnP 问题可以看作一个几何约束求解问题,即如何将相应的图形构造出来。相应的几何实体是  $n$  个控制点  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  和透视中心( $C_p$ ),相应的几何约束是  $n$  个控制点  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  的相对空间位置和各个控制点到透视中心( $C_p$ )的夹角。这是一个典型的过约束问题。文献 [84-85] 用 Wu-Ritt 方法求解 P3P 问题。文献 [86] 给出了 P3P 问题的一个完备零点分解。基于这个分解,给出了 P3P 问题一个完备解分类,即给出了 P3P 问题有 1 个、2 个、3 个或 4 个解的条件的显式表达式。文献 [87] 则证明了 P4P 至多有 5 个解。PnP 问题的综述详见文献 [88]。

### 4.5 线图的三维实现

为了表示一个三维实体,通常情况下我们将其画在一个二维的平面图上,然后再通过人的视觉系统将采集到的二维信息在人的大脑中重建成一个三维实体。线图的三维实现是指由计算机将二维平面图的信息自动重建成一个三维实体的过程。我们将这种由点和直线连接而成的二维平面图称为线图。线图具有快捷、简便、直观和易于交流等优点,因而被广泛应用于工程设计、建筑和制造等各个方面。然而,它又具有不精确性和粗糙等缺点,因此在通过平面的线图重建三维实体的时候,通常需要将线图几何约束识别出来,然后再通过识别出的几何约束来精确重建三维实体<sup>[89]</sup>。由此可见,线图的三维实现也可以看作一个几何约束求解的问题。线图的三维实现方法主要有线标识法、梯度空间法、线性系统法、优化法和变分几何法。其中,变分几何法<sup>[90]</sup>就是利用几何约束求解的方法来进行线图识别。线图的三维实现的算法是首先判断一个线图是否是一个三维物体的投影,如果是,则给出线图成为三维物体投影的约束条件,并重建该物体;否则,修正线图使其成为三维物体的投影。

### 4.6 分子结构的确定问题

分子由一组原子或原子团组成,而这些原子或

原子团保持空间结构的完整性,这种结构不会随着外界条件的改变而改变,除非具备破坏该结构的外部条件. 现已证明,分子实际上是三维结构的实体,其化学行为的不同通常由它们三维结构的不同来解释,所以预测和确定分子的三维空间结构尤其重要. 一个分子的组成即是指它由什么原子或原子团所组成. 通过实验,相对来说较好测定,但由一个分子的分子组成来确定它的空间结构则很难. 如果我们将原子或原子团看成几何体,将原子或原子团之间的键长、键角、二面角、相对位置看成几何约束,那么分子空间结构的确定问题就可以看成一个几何约束求解问题<sup>[91]</sup>. 当然,分子结构的确定并不是这么简单,由于原子或原子团之间还有各种化学性质,因此分子结构的最终确定还要在总体结构上受约束于分子能量的最小化. 这就需要我们进一步考虑用微分方程表示的能量等动力学约束.

#### 4.7 计算机辅助教学——智能动态几何

利用几何约束求解技术的变量化的特点,我们可以动态地拖动几何图形中某些点来生动地得到几何图形在拖动过程中的变化,从而更好地了解几何图形中所蕴涵的几何性质,称为动态几何. 智能动态几何软件是将几何约束求解方法与动态几何结合,具有一般作图功能的动态作图软件,如MMP/Geometer即是这样一种软件<sup>[92]</sup>. 利用这个软件,老师可以给一个可视化的几何定理证明过程. 这对于帮助学生更好地理解几何概念和一些几何定理的证明过程都有很大的益处. 几何定理证明中的有些方法,如 Hilbert 方法<sup>[69]</sup>、面积法<sup>[93]</sup>都是针对构造型几何定理的,但是几何定理的描述一般不是构造型的. 用几何约束求解算法<sup>[63]</sup>可以自动求得几何定理的构造型形式.

## 5 总结与展望

经过 20 余年的研究,几何约束求解技术已经趋于成熟,可以有效地处理设计中碰到的大部分问题,但是离完整、有效和稳定地求解还有相当大的距离,有很多有实际意义的问题还不能按照以上的标准求解. 另外,由于问题所固有的困难,似乎很难找到针对所有问题的完善算法. 目前几何约束求解的框架已基本确立,将现有的几何约束求解技术综合,开发出一个通用的几何作图平台也许是应该首先考虑的问题. 这不仅涉及对已有方法的改进与评价,还有可能导致一些新问题. 此外,针对某类具体问题寻

找好的算法也是一个研究方向,例如,分子结构、连杆设计、计算机视觉中的某些问题和机器人等.

## 参 考 文 献

- [1] Sutherland I E. Sketchpad, a man-machine graphical communication system[A]. In: Proceedings of the Spring Joint Computer Conference, Detroit, 1963. 329~345
- [2] Meng Xiangxu, Xu Yanning. A survey of the research works on parametric design[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(11): 1086~1090 (in Chinese) (孟祥旭,徐延宁. 参数化设计研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(11): 1086~1090)
- [3] Tang Rongxi, Xi Ping, Ning Tao. Overview on the state-of-art of feature-based collaborative design software[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(1): 15~20 (in Chinese) (唐荣锡,席平,宁涛. 协同设计特征造型软件发展概况[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(1): 15~20)
- [4] Lin V C, Gossard D C, Light R A. Variational geometry in computer-aided design[J]. Computer Graphics, 1981, 15(3): 171~177
- [5] Shu Huilin, Liu Jihong, Zhong Yifang. A survey of computer-aided conceptual design of mechanical products[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2000, 12(12): 947~954 (in Chinese) (舒慧林,刘继红,钟毅芳. 计算机辅助机械产品概念设计研究综述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(12): 947~954)
- [6] Ge J X, Chou S C, Gao X S. Geometric constraint satisfaction using optimization methods[J]. Computer-Aided Design, 2000, 32(14): 867~879
- [7] Gao X S, Chou S C. Solving geometric constraint systems I. A global propagation approach[J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(1): 47~54
- [8] Kramer G. A geometric constraint engine[J]. Artificial Intelligence, 1992, 58(1/3): 327~360
- [9] Leler W. Constraint Programming Languages[M]. Boston, MA: Addison Wesley, 1988
- [10] Sunde G. Specification of Shape by Dimensions and Other Geometric Constraints[M]. In: Wozny M J, et al, eds. Geometric Modeling for CAD Applications. Amsterdam: North-Holland, 1988. 199~213
- [11] Veltkamp R C. Geometric Constraint Management with Quanta[M]. In: Brown D C, et al, eds. Intelligent Computer Aided Design. Amsterdam: North-Holland, 1992. 409~426
- [12] Yuan Bo, Hu Shimin, Sun Jiaguang. Multi solution problem in variational design[J]. Journal of Research and Development, 2000, 37(1): 86~94 (in Chinese) (袁波,胡事民,孙家广. 变量化设计中的多解性问题[J]. 计算机研究与发展, 2000, 37(1): 86~94)

- [13] Gao X S, Hoffmann C M, Yang Weiqiang. Solving spatial basic geometric constraint configurations with locus intersection[A]. In: Proceedings of ACM SM02[C]. New York: ACM Press, 2002. 95~104
- [14] Li Yantao, Hu Shimin, Sun Jianguang. A new algorithm of decomposition of geometric constraint system[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2000, 12(12): 926~930(in Chinese)  
(李彦涛, 胡事民, 孙家广. 一个几何约束系统分解的新算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(12): 926~930)
- [15] Todd P. A k-tree generalization that characterizes consistency of dimensioned engineering drawings[J]. Science and Industry Advance with Mathematics Journal of Discrete Mathematics, 1989, 2(2): 255~261
- [16] Owen J. Algebraic solution for geometry from dimensional constraints[A]. In: Proceedings of ACM Symposium on Solid Modeling Foundation, Austin, TX, 1991. 397~407
- [17] Owen J. Constraints of simple geometry in two and three dimensions[J]. International Journal of Computer Geometry and Its Applications, 1996, 6(5): 421~423
- [18] Fudos I, Hoffmann C M. A graph-constructive approach to solving systems of geometric constraints[J]. ACM Transactions on Graphics, 1997, 16(2): 179~216
- [19] Hoffmann C M. Geometric Constraint Solving in R2 and R3[M]. In: Du D Z, Huang F, eds. Computing in Euclidean Geometry. Singapore: World Scientific, 1995. 266~298
- [20] Hoffmann C M, Lomonosov Andrew, Sitharam Meera. Decomposition plans for geometric constraint systems, Part I: Performance measures for CAD[J]. Journal of Symbolic Computation, 2001, 31(4): 367~408
- [21] Latheam R S, Middleditch A E. Connectivity analysis: A tool for processing geometric constraints[J]. Computer-Aided Design, 1996, 28(11): 917~928
- [22] Lamure H, Michelucci D. Solving geometric constraints by homotopy[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1996, 2(1): 28~34
- [23] Hoffmann C M, Lomonosov A, Sitharam M. Finding Solvable Subsets of Constraint Graphs[M]. In: Lecture Notes in Computer Sciences. New York: Springer, 1997, 1330: 163~197
- [24] Jermann C, Neveu B, Trombetti G. A New Structural Rigidity for Geometric Constraint System[M]. In: Winkler F, ed. Lecture Notes in Artificial Intelligence 2930. New York: Springer-Verlag, 2004. 87~105
- [25] Joan-Arinyo R, Soto-Riera A, Vila-Marta S, et al. Revisiting decomposition analysis of geometric constraint graphs[A]. In: Proceedings of ACM SM02[C]. New York: ACM Press, 2002. 105~115
- [26] Gao X S, Zhang G. Geometric constraint solving via c-tree decomposition[A]. In: Proceedings of ACM SM03[C]. New York: ACM Press, 2003. 45~55
- [27] Ait-Aoudia S, Jegou R, Michelucci D. Reduction of constraint systems[A]. In: Proceedings of Compugraphics, Alvor, Portugal, 1993. 83~92
- [28] Hsu Beat C, Brüderlin D. Moving into higher dimensions of geometric constraint solving[R]. Salt Lake City: University of Utah, Technical Report UUCS-94-027, 1994
- [29] Li Yantao, Hu Shimin, Sun Jianguang. Hybrid model of geometric constraint satisfaction[J]. Journal of Research and Development, 2000, 37(10): 1233~1239(in Chinese)  
(李彦涛, 胡事民, 孙家广. 几何约束满足的统一模型[J]. 计算机研究与发展, 2000, 37(10): 1233~1239)
- [30] Chen Liping, Tu Chongbin, Luo Hao, et al. A new method about constraint management of parametric drawing[J]. Journal of Software, 1996, 7(7): 394~400(in Chinese)  
(陈立平, 涂重斌, 罗浩, 等. 一种新的面向参数化绘图的约束管理技术[J]. 软件学报, 1996, 7(7): 394~400)
- [31] Chen Liping, Wang Boxing, Peng Xiaobo, et al. An optimal method of bipartite graph matching for under-constrained geometry solving[J]. Chinese Journal of Computers, 2000, 23(5): 523~530(in Chinese)  
(陈立平, 王波兴, 彭小波, 等. 一种面向欠约束几何系统求解的二部匹配优化处理方法[J]. 计算机学报, 2000, 23(5): 523~530)
- [32] Luo Hao, Chen Liping, Zhou Ji. A reduction algorithm for geometric constraint satisfaction[J]. Chinese Journal of Computers, 1996, 19(Suppl): 232~239(in Chinese)  
(罗浩, 陈立平, 周济. 几何约束满足问题的归约分治算法[J]. 计算机学报, 1996, 19(Suppl): 232~239)
- [33] Chen Liping, Gao Feng, Zhou Ji. An optimal method of bipartite graph matching for under-constrained geometry solving[A]. In: Proceedings of the 6th International Conference on Computer Aided Design & Computer Graphics, Shanghai, 1999. 952~957
- [34] Dong Jinxiang, Ge Jianxin, Gao Yi, et al. New thought on constraint solving in parametric drawing systems[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 1997, 9(6): 513~519(in Chinese)  
(董金祥, 葛建新, 高屹, 等. 变参绘图系统中约束求解的新思路[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(6): 513~519)
- [35] Ge Jianxin, Peng Qunsheng, Dong Jinxiang, et al. New algorithm of automated solving on constraint-based shape[J]. Chinese Journal of Computers, 1995, 18(2): 171~176(in Chinese)  
(葛建新, 彭群生, 董金祥, 等. 基于约束的形状自动求解新算法[J]. 计算机学报, 1995, 18(2): 171~176)
- [36] Tan Meng'en, Dong Jinxiang, Ge Jianxin, et al. Constraint problem solving based on geometric abstract[J]. Journal of Software, 1997, 8(Suppl): 42~48(in Chinese)  
(谭孟恩, 董金祥, 葛建新, 等. 基于几何抽象的约束问题求解[J]. 软件学报, 1997, 8(Suppl): 42~48)

- [37] Meng Xiangxu, Wang Jiaye, Liu Shenquan. Parametric description model and realization based on directed graph[J]. Chinese Journal of Computers, 1997, 20(11): 982~988(in Chinese)  
(孟祥旭,汪嘉业,刘慎权. 基于有向图的参数化表示模型及其实现[J]. 计算机学报, 1997, 20(11): 982~988)
- [38] Ma Cuixia, Meng Xiangxu, Gong Bin, *et al.* Research on object based constraint model and reverse constraint in parametric design[J]. Chinese Journal of Computers, 2000, 23(9): 991~995(in Chinese)  
(马翠霞,孟祥旭,龚斌,等. 参数化设计中的对象约束模型及反向约束的研究[J]. 计算机学报, 2000, 23(9): 991~995)
- [39] Dufourd J F, Pascal Mathis, Pascal Schreck. Geometric construction by assembling solved subfigures [J]. Artificial Intelligence, 1998, 99(1): 73~119
- [40] Lee J Y. A 2D Geometric Constraint Solver for Parametric Design Using Graph Reduction and Analysis[M]. In: Lecture Notes in Artificial Intelligence. New York: Springer, 1999, 1669: 258~274
- [41] Lee J Y, Kim K. Geometric reasoning for knowledge-based design using graph representation[J]. Computer-Aided Design, 1996, 28(10): 831~841
- [42] Lee K Y, Kwon O-Hwan, Lee Jae-Yeol, *et al.* A hybrid approach to geometric constraint solving with graph analysis and reduction[J]. Advance in Engineering Software, 2003, 34(2): 103~113
- [43] Vermeer P. A spatial constraint problem[A]. In: Merlet J P, Ravani B, eds. Proceedings of Computational Kinematics '95. New York: Kluwer Academic Publication, 1995. 83~92
- [44] Steele G L, Sussman G L. Constraints—A language for expressing almost-hierarchical descriptions [J]. Artificial Intelligence, 1980, 14(1): 1~39
- [45] Bhansali S, Kramer Glenn A, Hoar Tim J. A principled approach towards symbolic geometric constraint satisfaction[J]. Journal of Artificial Intelligence Research, 1996, 4: 419~443
- [46] Borning A H. The programming language aspect of ThinkLab [J]. ACM Transactions on Programming Language and Systems, 1981, 3(4): 353~387
- [47] Essert-Villard C, Schreck P, Dufourd J -F. Sketch-based pruning of a solution space within a formal geometric constraint solver[J]. Artificial Intelligence, 2000, 124(1): 139~159
- [48] Kramer G. Solving Geometric Constraints Systems: A Case Study in Kinematics[M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1992
- [49] Qiao Yu, Wang Boxing, Xiang Wen. Solving 3D geometric constraints based on freedom analysis[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(6): 557~561 (in Chinese)  
(乔雨,王波兴,向文. 基于自由度分析的三维几何约束推理求解[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(6): 557~561)
- [50] Peng X B, Chen L P, Zhou F L, *et al.* Singularity analysis of geometric constraint system[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2002, 17(3): 314~323
- [51] Brüderlin B D. Constructing three-dimensional geometric objects defined by constraints [A]. In: Proceedings of Workshop on Interactive 3D Graphics [C]. New York: ACM Press, 1986. 111~129
- [52] Luo Hao, Chen Liping, Zhou Ji. Research on geometric constraint reasoning based on reduction [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 1997, 9(3): 262~268(in Chinese)  
(罗浩,陈立平,周济. 基于归约的几何约束推理研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(3): 262~268)
- [53] Arbab F, Wang B. Reasoning About Geometric Constraints [M]. In: Yoshikawa H, Holden T, eds. Intelligent CAD II. Amsterdam: North-Holland, 1990. 93~107
- [54] Joan-Arinyo R, Soto A. A correct rule-based geometric constraint solver[J]. Computer and Graphics, 1997, 21(5): 599~609
- [55] Joan-Arinyo R, Soto A. Combining constructive and equational geometric constraint solving techniques[J]. ACM Transactions on Graphics, 1999, 18(1): 35~55
- [56] Joan-Arinyo R, Soto A. A Rule-and-Compass Geometric Constraint Solver[M]. In: Pratt M J, Sriram R D, Wozny M J, eds. Product Modeling for Computer Integrated Design and Manufacture. London: Chapman and Hall, 1997. 384~393
- [57] Joan-Arinyo R, Mata N, Soto A. A constraint-solving based approach to analyze 2D geometric problems [A]. In: Proceedings of Solid Modeling '01 [C]. New York: ACM Press, 2001. 11~17
- [58] Joan-Arinyo R, Luzon M V, Soto A. Genetic algorithms for root multiselection in constructive geometric constraint solving [J]. Computer and Graphics, 2003, 27(1): 51~60
- [59] Podgorelec D. A new constructive approach to constraint-based geometric design[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(11): 769~785
- [60] Suzuki H, Ando H, Kimura F. Geometric constraints and reasoning for geometrical CAD systems [J]. Computer and Graphics, 1990, 14(2): 211~224
- [61] Gao X S, Jiang K, Zhu C C. Geometric constraints solving with conics and linkage[J]. Computer-Aided Design, 2002, 34(6): 421~433
- [62] Verroust A, Schonek F, Roller D. Rule-oriented method for parameterized[J]. Computer-Aided Design, 1992, 24(10): 531~540
- [63] Gao X S, Huang L D, Jiang K. Geometric constraint solving with geometric transformation[J]. Science in China (Series F), 2001, 44(1): 50~59
- [64] Hoffmann C M, Joan-Arinyo R. Symbolic constraint in constructive geometry [J]. Journal of Symbolic Computation, 1997, 23(2/3): 287~300

- [65] Ortega J, Rheinboldt W. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables [M]. New York: Academic Press, 1970
- [66] Juno G Nelson. A constraint-based graphics system [J]. Computer Graphics, 1985, 19(3): 235~243
- [67] Light R, Gossard D. Modification of geometric models through variational geometry [J]. Computer-Aided Design, 1982, 14(4): 208~214
- [68] Hosobe H. A geometric constraint solving framework for interactive interfaces [J]. Information Processing Society of Japan Journal Abstract, 2001, 42: 6~16
- [69] Wu Wenjun. Basic Principles of Mechanical Theorem Proving in Geometries [M]. Beijing: Science Press, 1994 (in Chinese)  
(吴文俊. 几何定理证明的基本原理 [M]. 北京: 科学出版社, 1994)
- [70] Gao X S, Chou S C. Solving geometric constraint systems II. A symbolic approach and decision of re-constructibility [J]. Computer-Aided Design, 1998, 30(2): 115~122
- [71] Buchberger B. Gröbner Basis: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory [M]. In: Bose N K, ed. Recent Trends in Multidimensional Systems Theory. Princeton, NJ: D. Reidel Publishing Company, 1985. 184~232
- [72] Hoffmann C M. Solid and Geometric Modeling [M]. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1989
- [73] Kondo K. Algebraic method for manipulation of dimensional relationships in geometric models [J]. Computer-Aided Design, 1992, 24(3): 141~147
- [74] Kapur D, Saxena T, Yang L. Algebraic and geometric reasoning with Dixon resultants [A]. In: Proceedings of ISSAC '94 [C]. Oxford: ACM Press, 1994
- [75] Jiang Kun, Zhu Changcai, Gao Xiaoshan. Valid range of parameters value in parametric CAD [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(8): 1016~1020 (in Chinese)  
(蒋鲲, 朱长才, 高小山. 参数化 CAD 中参数的有效范围 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(8): 1016~1020)
- [76] Hoffmann C M, Kim K J. Towards valid parametric CAD models [J]. Computer-Aided Design, 2001, 33(1): 81~90
- [77] Dasgupta B, Mruthyunjaya T S. The Stewart platform manipulator: A review [J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(1): 15~40
- [78] Gao X S, Zhang G. Classification and solving of merge patterns in geometric constraint solving [A]. In: Proceedings of Shape Modeling and Applications [C]. Seoul, Korea: IEEE Press, 2003. 89~90
- [79] Liu Huilin, Zhang Tongzhuang, Ding Hongsheng. Solution of 3-RPR plane parallel machine Wu's method [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2000, 20(5): 565~569 (in Chinese)  
(刘惠林, 张同庄, 丁洪生. 3-RPR 平面并联机构正解的吴方法 [J]. 北京理工大学学报, 2000, 20(5): 565~569)
- [80] Gao Xiaoshan, Zhang Guifang, Yang Weiqiang. Geometric constraint solving and simulation of complex linkages [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(5): 517~522 (in Chinese)  
(高小山, 张桂芳, 杨伟强. 复杂连杆的模拟 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(5): 517~522)
- [81] Chen L P, Wang B X, Zhou J L, et al. A new method for planar linkages analysis based on geometric constraints satisfaction [J]. Mechanical Science and Technology, 1998, 17(6): 965~967
- [82] Kempe A B. On a general method of describing plane curves of the  $n$ th degree by linkwork [A]. In: Proceedings of L.M.S., London, 1876. 213~216
- [83] Gao X S, Zhu C, Chou S-C, et al. Automated generation of Kempe linkages for algebraic curves and surfaces [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 36(9): 1019~1033
- [84] Su C, Xu Y, Li H, et al. Application of Wu's method in computer animation [A]. In: Proceedings of the 5th International Conference on CAD/CG, Shenzhen, 1997, 1: 211~215
- [85] Su Cheng, Xu Yingqing, Li Hua, et al. Necessary and sufficient condition of positive root number of P3P problem [J]. Chinese Journal of Computers, 1998, 21(12): 1084~1095 (in Chinese)  
(苏成, 徐迎庆, 李华, 等. 判定 P3P 问题正解个数的充要条件 [M]. 计算机学报, 1998, 21(12): 1084~1095)
- [86] Gao X S, Hou X R, Tang J, et al. Complete solution classification for the perspective-three-point problem [J]. IEEE Transactions on PAMI, 2003, 25(8): 930~943
- [87] Hu Z Y, Wu F C. A note on the number solution of the non-coplanar P4P problem [J]. IEEE Transactions on PAMI, 2002, 24(4): 550~555
- [88] Fishler M A, Bolles R C. Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography [J]. Communications of the ACM, 1981, 24(6): 381~395
- [89] Sugihara K. Machine Interpretation of Line Drawings [M]. Cambridge, MA: MIT Press, 1986
- [90] Lipson H. Computer aided 3D sketching for conceptual design [D]. New York: Cornell University, 1998
- [91] Crippen C M, Havel T F. Distance Geometry and Molecular Conformation [M]. New York: John Wiley Sons, 1988
- [92] Key Laboratory of Mathematics Mechanization, Chinese Academy of Sciences. Mathematics mechanization platform [OL]. <http://www.mmrc.iss.ac.cn/~mmssoft/> [CP]
- [93] Chou S C, Gao X S, Zhang J Z. Machine Proof in Geometry [M]. Singapore: World Scientific, 1994