第一章 代数的起源

§1 简谈代数

代数起源于解方程

一元一次方程

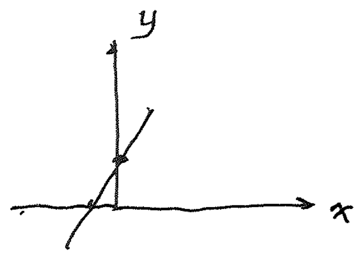
$$2x+1=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

代数：把含有符号的表达式恒等变形为所需要的形式

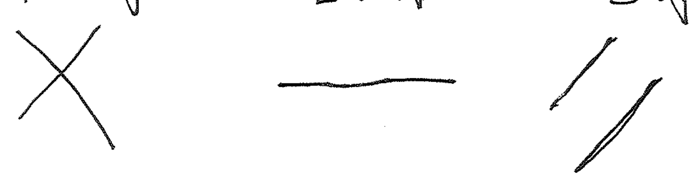
二元一次方程

$$y=2x+1$$



二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

唯一解　　无穷解　　无解



代数是可以书写的几何

几何是可以描绘的代数

一元二次方程

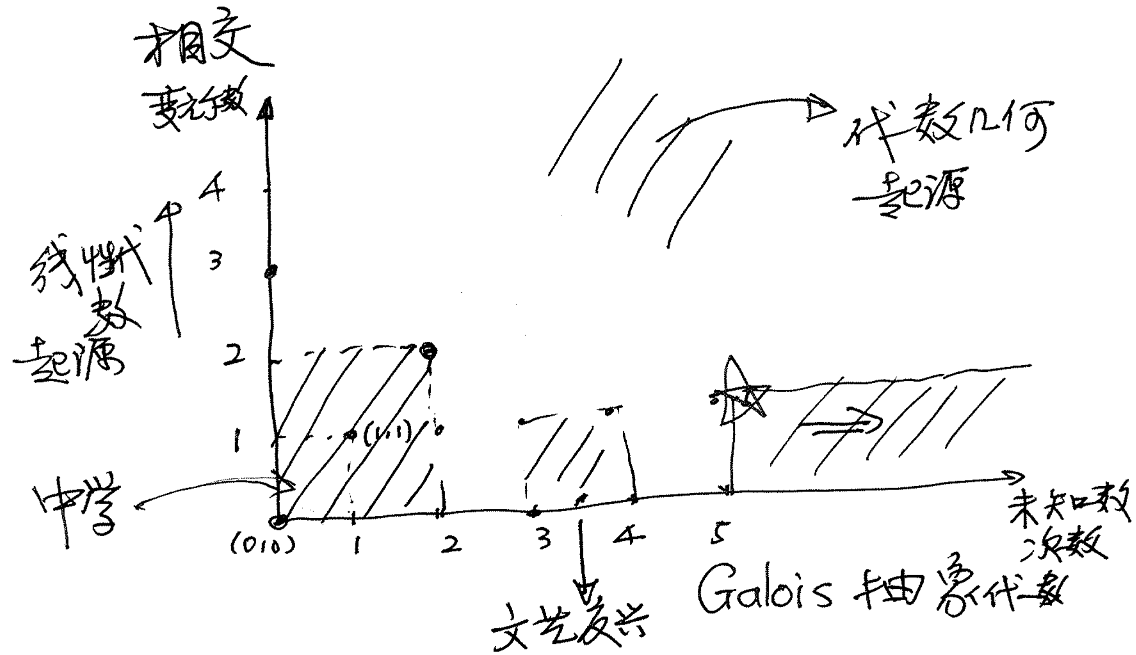
$$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

方程的两个根可以通过二次根式和方程系数的有理表达式给出.

二元二次方程(组). 二次曲线,

二次曲线与二次曲线或直线的



§2 一元高次方程求解简介

例： $x^2+1=0 \qquad x=\pm\sqrt{-1}$

例： $x^3-1=0$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$x^3-1=0 \iff x-1=0 \text{ 或 } x^2+x+1=0$$

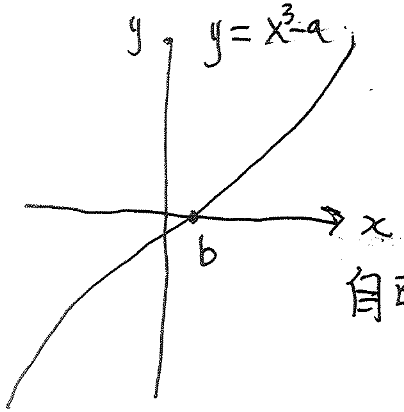
$$x_1=1, \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad x_3=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

注意到 $x_2^2=x_3$. 令 $\omega=x_2$

则方程 $x^3-1=0$ 的三个解是 $1, \omega, \omega^2$

例 $x^3-a=0$, a是有理数

$$b=\sqrt[3]{a}$$



则 $x^3-a=0$ 的三个根是

$\sqrt[3]{a}$, $\omega\sqrt[3]{a}$, $\omega^2\sqrt[3]{a}$

自己验证：

$$x^3-a=(x-\sqrt[3]{a})(x-\omega\sqrt[3]{a})(x-\omega^2\sqrt[3]{a})$$

不妨设 $a\neq 0$

$x^3-a=0$ 与 $\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3-1=0$ 同解

设 $y=\frac{x}{\sqrt[3]{a}}$ $\qquad y^3-1=0$ 的三个根是

$1, \omega, \omega^2 \Rightarrow x^3-a=0$ 的三个根是

$\sqrt[3]{a}$, $\omega\sqrt[3]{a}$, $\omega^2\sqrt[3]{a}$.

求解 $x^3+bx^2+cx+d=0$, (*)

b, c, d 是有理数

令 $x=y-\frac{b}{3}$

利用公式 $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

(*) 变换为

$$y^3+py+q=0 \qquad (**)$$

其中 $p=-\frac{b^2}{3}+c$, $q=\frac{2}{27}b^3-\frac{bc}{3}+d$

令 ~~y~~ $=z-\frac{p}{3z}$ 代入 (**

$$\left(z-\frac{p}{3z}\right)^3+p\left(z-\frac{p}{3z}\right)+q=0$$

$$=z^3-3\cdot z^2\frac{p}{3z}+3z\left(\frac{p}{3z}\right)^2-\left(\frac{p}{3z}\right)^3+pz-\frac{p^2}{3z}+q$$

$$=z^3+q-\frac{p^3}{27z^3}$$

如果 $z \neq 0$，只需解即可

$$\boxed{z^6 + q z^3 - \frac{p^3}{27} = 0} \quad (***)$$

→ 预解式

令 $u = z^3$

$$u^2 + q u - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (****)$$

Cardan 公式 (1535).

求 u ⟶ 求 z ⟶ 求 y ⟶ 求 x

可以把 $x^3 + b x^2 + c x + d = 0$ 的解

表示如下：令 $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$

$$z_1 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-q+\sqrt{\Delta})}, \quad z_2 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}(-q-\sqrt{\Delta})}$$

$$x_1 = -\frac{b}{3} + z_1 + z_2, \quad x_2 = -\frac{b}{3} + \omega z_1 + \omega^2 z_2$$

$$x_3 = -\frac{b}{3} + \omega^2 z_1 + \omega z_2$$

四次方程 Ferrari (1540)

Lagrange (1770) 预解式理论

Abel (1824) 一般五次方程无根式解

Galois (1830) Galois 理论 ⟶ 抽象代数

在本学期末将介绍

群，环，域和一元多项式环的知识

e-mail zmli@mmrc.iss.ac.cn

网页 mmrc.iss.ac.cn/~zmli

习题课. 苏峰. 郭俊涵

作业. 及格

自学. 高等代数，丘维声

解析几何. 尤承业

(空间直角坐标系. 向量代数

直线与平面，二次曲面)

~~讨论~~. 空间解析几何，黄宣国

讨论

§3 线性方程组初步

$$(L)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其中 a_{ij}, b_j 都是实数. $i=1,\cdots,m$ $j=1,\cdots,n$.

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}, & \cdots; & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 (L) 的系数矩阵.

$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{in})$ 称为矩阵 A 的第 i 行

$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, 称为矩阵 A 的第 j 列

A 称为 $m\times n$ 阶的矩阵

当 $m=n$ 时, A 称为 n 阶方阵

$$(A \vdots \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

称为 A 关于列 $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 的增广矩阵

(L) 可以通过一个增广矩阵表示

定义 (i) 如果用实数 $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ 分别代替 $x_1, \cdots x_n$ 后 (L) 中的每个方程都变成恒等式, 则称 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 (L) 的一组解

(ii) 如果 (L) 有解, 则称 (L) 是相容的, 否则称 (L) 是不相容的

(iii) 设 (L) 是相容的, 如果 (L) 只有一个解, 则称 (L) 是确定的, 否则称 (L) 是不定的

定义：设 (L) 和 (L′) 是两个 n 元线性~~方~~程组，如果 (L) 的解都是 (L′) 的解，且 (L′) 的解都是 (L) 的解，则称 (L) 与 (L′) 等价（同解）

引理 3.1 设 (L)，(L′) 是两个 n 元线性方程组，如果 (L′) 是通过以下三种操作

(i) 交换 (L) 中两个方程的位置

(ii) 把 (L) 中第 j 个方程两侧通乘个数加到第 i 个方程上，$(i \neq j)$

(iii) 把某个 (L) 中方程两侧通乘一个非零的数

得到，则 (L′) 与 (L) 等价

证：如果 (L′) 是通过 (i) 或 (iii) 由 (L) 得到，则 (L′) 与 (L) 显然等价。

设 (L) 由矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

确定

$i \neq j$. α 是实数

(L′) 由矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & \cdots & & & \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & a_{i2}+\alpha a_{j2} & \cdots & a_{in}+\alpha a_{jn} & b_i+\alpha b_j \\ & \cdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} & b_j \\ & \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

设 $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ 是 (L) 的解

要证明 $\vec{\beta}$ 也是 (L′) 的解，只要证明 $\vec{\beta}$ 满足 (L′) 中的第 i 个方程即可。

$(a_{i1}+\alpha a_{j1})\beta_1 + (a_{i2}+\alpha a_{j2})\beta_2 + \cdots + (a_{in}+\alpha a_{jn})\beta_n$

$= (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) + \alpha(a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n)$

$= b_i + \alpha b_j$

于是 $\vec{\beta}$ 是 (L′) 的解

反之 设 $\vec{\beta}$ 是 (L′) 的解

因为 $i \neq j$ 所以

$$a_{j1}\beta_1 + a_{j2}\beta_2 + \cdots + a_{jn}\beta_n = b_j \quad (\star)$$

由上述推导可知

$\cancel{(a_{i1}\beta_1 +}$

$$b_i + \alpha b_j = (a_{i1} + \alpha a_{j1})\beta_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})\beta_2 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{jn})\beta_n$$

$$= (a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n) + \alpha(a_{j1}\beta_1 + \cdots + a_{jn}\beta_n)$$

$$= a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n + \alpha b_j \quad (由\star)$$

于是 $a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \cdots + a_{in}\beta_n = b_i$.

$\vec{\beta}$ 满足 (L) 中第 i 个方程. $\vec{\beta}$ 是 (L) 的解. ▨

注：~~如果~~ 线性方程组 $(\bar{L})$ 是通过若干次引理3.1的操作由 (L) 得到，则 $(\bar{L})$ 与 (L) 等价

例 确定$^{(L)}$ $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ 解的性质

写成矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{行2-2\times行1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7 \\ y = 5 \end{cases}$$

(L) 是确定的

例 研究 $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 5x + 4y + z = 5 \end{cases}$ 的解的性质

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{行2+行1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}(行2)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行}1-2\times\text{行}2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{两行互换}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1-z \\ y=z \\ z\ \text{任意实数} \end{cases}$$

(L) 不为角定

例 (L) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1-2x_2+5x_3=5 \\ 2x_1-x_2+4x_3=-1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

对应的方程组中有 $0=-1$. (L) 不相容

例[*] 设线性方程组(T)对应的矩阵是

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1r} & \cdots & t_{1n} & & b_1 \\ & t_{22} & \cdots & t_{2r} & \cdots & t_{2n} & & b_2 \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ \bigcirc & & & t_{rr} & \cdots & t_{rn} & & b_r \end{array}\right)_{r\times n}$$ triangular

其中 $r\le n$，$t_{11}, t_{22}, \cdots t_{rr}$ 都不是零

证明 (i) (T) 相容

(ii) $r=n$ 时，(T) 确定

证明：(i) 对 r 归纳

$r=1$，(T) 为 $t_{11}x_1+t_{12}x_2+\cdots+t_{1n}x_n=b_1$

令 $x_2=\cdots=x_n=0$. 则 $t_{11}x_1=b_1$ $x_1=\frac{b_1}{t_{11}}$ $(t_{11}\neq 0)$

于是 $\begin{pmatrix}\frac{b_1}{t_{11}}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ 是(T)的解. (T)相容

设 $r>1$ 且 T 有 $r-1$ 行时结论(i)成立

当 T 有 r 行时. 令 方程组 (T_{r-1}) 对应的

矩阵是 ~~T_{r-1}~~

$$\begin{pmatrix} t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2r} & \cdots & t_{2n} \\ & t_{33} & \cdots & t_{3r} & \cdots & t_{3n} \\ \bigcirc & & \ddots & & & \\ & & & t_{rr} & \cdots & t_{rn} \end{pmatrix}$$

由归纳假设 (T_{r-1}) 有解 $\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$

代入到第一个方程中得到

$t_{11}x_1+t_{12}\alpha_2+\cdots+t_{1r}\alpha_r+\cdots+t_{1n}\alpha_n=b_1$

$x_1=\dfrac{\underline{b_1-(t_{12}\alpha_2+\cdots+t_{1r}\alpha_r+\cdots+t_{1n}\alpha_n)}}{t_{11}}$ 记为 α_1

则 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ 是(T)的解 $\Longrightarrow$ (T)相容.

(ii) ~~如~~ 此时

(T) T为 $\left(\begin{array}{cccc|c} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1r} & b_1 \\ & t_{22} & \cdots & t_{2r} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & t_{rr} & b_r \end{array}\right)$

证明过程类似

例[**] 设线性方程组(E)对应矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & e_{1j_1} & \cdots & e_{1j_2} & \cdots & e_{1j_r} & \cdots & e_{1n} & & b_1 \\ & & & 0 & \cdots & 0 & e_{2j_2} & \cdots & e_{2j_r} & \cdots & e_{2n} & b_2 \\ & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 & \cdots & 0 & e_{rj_r} & \cdots & e_{rn} & b_r \\ & & & & & & & & & & 0 & b_{r+1} \\ & & \bigcirc & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & & & 0 & b_m \end{array}\right)$$

其中 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n$ (echelon)

$e_{1j_1}\neq 0,\ e_{2j_2}\neq 0,\ \cdots,\ e_{rj_r}\neq 0$

推论：(E) 相容 $\Longleftrightarrow b_{r+1}=\cdots=b_m=0$.

证："$\Rightarrow$" 显然的

"$\Leftarrow$" (E) 对应的 n 元线性方程组是

$$
\begin{aligned}
e_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+e_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{1j_r}x_{j_r}+\cdots+e_{1n}x_n&=b_1\\
e_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{2j_r}x_{j_r}+\cdots+e_{2n}x_n&=b_2\\
\cdots\\
e_{rj_r}x_{j_r}+\cdots+e_{rn}x_n&=b_r
\end{aligned}
$$

令 $x_1=\cdots=x_{j_1-1}=x_{j_1+1}=\cdots=x_{j_2-1}=x_{j_2+1}=\cdots=x_{j_r-1}=x_{j_r+1}=\cdots=x_n$
$=0$

方程组 (E) 变为

$$
(E')\begin{cases}
e_{1j_1}x_{j_1}+e_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{1j_r}x_{j_r}=b_1\\
e_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{2j_r}x_{j_r}=b_2\\
\vdots\\
e_{rj_r}x_{j_r}=b_r
\end{cases}
$$

由例*，(E') 有解 $\begin{pmatrix}\alpha_{j_1}\\ \vdots\\ \alpha_{j_r}\end{pmatrix}$

于是 (E) 有解 $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_{j_1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_{j_2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \alpha_{j_r}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $\boxed{/}$

~~定理3.1~~

注：例**中 (E) 称为阶梯形方程组

定理 3.1 (Gauss 消去法)

设 (L) 是一个 n 元线性方程组，则可以通过有限次下列操作

(i) 交换 (L) 中两个方程的位置

(ii) 把 (L) 中第 j 个方程通乘一个数加到第 i 个方程上，i≠j

把 (L) ~~变成~~ 等价地变为阶梯形 n 元方程组

证 设方程组

$$
(L)\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
\cdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
\end{cases}
$$

如果所有的 a_{ij} 都等于零，则定理显然成立.

设 a_{ij} 不全为零

我们对 n 归纳

$n=1$

$$(L)\quad\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 = b_m \end{cases}$$

由操作(i)可设 $a_{11}\neq 0$

由操作(ii).和引理3.1可知

(L) 等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x_1) = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1 - \frac{a_{m1}}{a_{11}}(a_{11}x_1) = b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ 0 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \quad\vdots \\ 0 = b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \end{cases}$$

设 (L) 含有 $n-1$ 个变元时定理成立. 当 (L) 含有 n 个变元时.

情形1. $a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}$ 不全为零

由引理3.1 (L) 等价于

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - \frac{a_{m1}}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) = b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \end{cases}$$

即

$$(L')\quad\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \\ \quad\cdots \\ \left(a_{m2} - \frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{mn} - \frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}\right)x_n = b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1 \end{cases}$$

通过(i),(ii)

~~设(L')~~ 由归纳假设 (L') 中后 $m-1$ 个方程构成的方程组等价于一个关于 $x_2, \cdots x_n$ 的阶梯型方程组 E'. 则 (L) 等价于阶梯型方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (E') \end{cases}$$

情形2. $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{m1} = 0$

$$\text{设 } (L_2)\quad\begin{cases} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots \\ a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

由归纳假设 (L_2) 通过(i),(ii)可以化为等价的阶梯形 (E_2) 则 (L) 等价于 (E_2)

$\square$

推论3.1 设线性方程组(L)等价于(E_L)

$$\begin{cases} e_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+e_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{1j_r}x_r+\cdots+e_{1n}x_n=f_1 \\ \qquad e_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{2j_r}x_r+\cdots+e_{2n}x_n=f_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad e_{rj_r}x_r+\cdots+e_{rn}x_n=f_r \\ \qquad\qquad\qquad 0=f_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad 0=f_m \end{cases}$$

其中 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n$

$e_{1j_1}\neq 0,\ e_{2j_2}\neq 0,\ \ldots,\ e_{rj_r}\neq 0$

则 (i) (L)相容 $\Longleftrightarrow f_{r+1}=\cdots=f_m=0$

(ii) (L)确定 $\Longleftrightarrow f_{r+1}=\cdots=f_m=0$ 且 $r=n$

证 (i) 由例☆☆可得

(ii) $\Longleftarrow$ $r=n$.

则 $j_1=1,\ j_2=2,\ \ldots\ j_r=n$ 于是

(L) 等价于(E)
$$\begin{cases} e_{11}x_1+e_{12}x_2+\cdots+e_{1n}x_n=f_1 \\ \qquad e_{22}x_2+\cdots+e_{2n}x_n=f_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad e_{nn}x_n=f_n \end{cases}$$

由例☆ (E)有唯一解. 于是(L)有唯一解

"$\Longrightarrow$" 设(L)有唯一解 于是 $f_{r+1}=\cdots=f_n=0$ ④

~~假设~~ 设 $n\neq r$. 则 $r<n$

设 $x_n=0$ 得到方程组

$$(E_0)\begin{cases} e_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+e_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{1j_r}x_r+\cdots+e_{1,n-1}x_{n-1}=f_1 \\ \qquad e_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{2j_r}x_r+\cdots+e_{2,n-1}x_{n-1}=f_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad e_{rj_r}x_r+\cdots+e_{r,n-1}x_{n-1}=f_r \end{cases}$$

设 $x_n=1$ 得到

$$(E_1)\begin{cases} e_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+e_{1j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{1j_r}x_r+\cdots+e_{1,n-1}x_{n-1}=f_1-e_{1n} \\ \qquad e_{2j_2}x_{j_2}+\cdots+e_{2j_r}x_r+\cdots+e_{2,n-1}x_{n-1}=f_2-e_{2n} \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad e_{rj_r}x_r+\cdots+e_{r,n-1}x_{n-1}=f_r-e_{rn} \end{cases}$$

由例☆☆

(E_0) 有解 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}$ (E_1) 有解 $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}$

于是 (L) 有解 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_{n-1}\\ 1\end{pmatrix}$

(L) 不确定 (矛盾)

推论3.2. ~~如果~~(L) 由 m 个 n 元线性方程组成，如果 $m<n$，则 (L) 不可能是确定的

证：此时推论3.1中的 r 不可能等于 n ☐

笛卡儿计划

1. 把世界上的问题化为数学问题
2. 把数学问题化为解方程(组)的问题
3. 把解方程组的问题化为解含单一个未知数的问题
4. 解之.

$$(H)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

称为 n 元齐次线性组.

(H) 由它的系数矩阵唯一确定

$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 是 (H) 的解. 称为零解或平凡解

推论3.3. 设 (H) 等价于阶梯形方程组

$$(E)\begin{cases} e_{1j_1}x_{j_1}+\cdots+e_{1j_2}x_2+\cdots+e_{1j_r}x_r+\cdots+e_{1n}x_n=0 \\ e_{2j_2}x_2+\cdots+e_{2j_r}x_r+\cdots+e_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ e_{rj_r}x_r+\cdots+e_{rn}x_n=0 \\ 0=0 \\ \vdots \\ 0=0 \end{cases}$$

则 (H) 有非平凡解 $\Longleftrightarrow r<n$

证：由推论3.1(ii) (H) 不确定

于是 (H) 一定有非平凡解. ☐

推论3.4 设 (H) 中 $m<n$.

则 (H) 有非平凡解.

证：由定理3.1. (H) 等价于某个形如推论3.3中的阶梯形方程组 (E)

因为 $m<n$. 所以 $r<n$. 又因为 (H) 相容，(H) 不确定. 由此可知

(H) 有非平凡解