推论3.5 设

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$(H)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

则 (S) 确定 $\Longleftrightarrow$ (H) 确定

证: 设 (S) 等价于 推论3.1 中 (E_L)

于 (H) 等价于 推论3.3中 (EH)

且 $m=n$

(S) 确定 $\Longleftrightarrow$ $r=n$ $\Longleftrightarrow$ (H) 确定 ☒

例: (L_4) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$ 是否有唯一解

判定

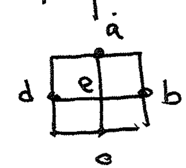
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ 对应的齐次方程组

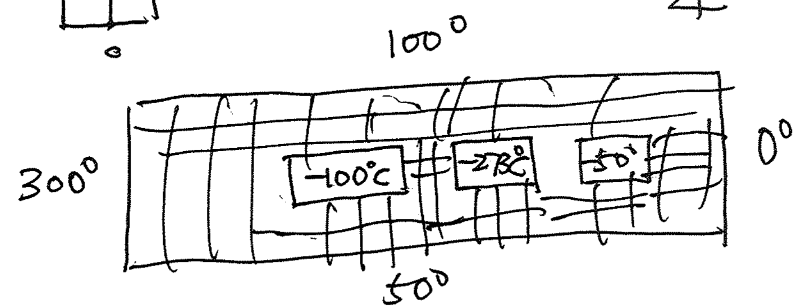
只有平凡解，于是 (L_4) ~~只有唯~~确定

例



x_a 代表节点 a 的温度

$$x_e = \frac{x_a + x_b + x_c + x_d}{4}$$



416个内部点，204边界点.

内部方程 $4x_e - x_a - x_b - x_c - x_d = 0$ 416个

边界方程 其中 $x_p = t_p \leftarrow$ 边界 204个

由推论3.5 只要考虑齐次方程组

$$\begin{cases} 4x_e - x_a - x_b - x_c - x_d = 0 & (416个) \\ x_p = 0 & (204个) \end{cases}$$

是否只有零解.

设内部点 x_e 的温度的绝对值最大

设为 λ

$$4\lambda = 4|x_e| = |x_a + x_b + x_c + x_d|$$
$$\leq |x_a| + |x_b| + |x_c| + |x_d|$$
$$\leq 4\lambda$$

$\Rightarrow$ $|x_a| = |x_b| = |x_c| = |x_d| = \lambda$

于是任何点的温度绝对值都是 λ.

又 $|x_p| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ 即

§4. 二阶行列式

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是二阶方阵

定义：A 的行列式 (determinant) 为 $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

$|A|$ 也记为 $\det(A)$.

命题 6.1 设

$$(L_2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

令 $\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

则 (L_2) 是否有解 $\Leftrightarrow \Delta_2 \neq 0$

此时 (L_2) 的唯一解是

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\Delta_2}, \quad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\Delta_2}.$$

"$\Rightarrow$"

证：因为 (L_2) 是确定的，所以 a_{11}, a_{21} 不全为零。由引理3.1，不妨设 $a_{11} \neq 0$.

同理

(L_2) 等价于
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \end{cases}$$

等价变形：(第2个方程通乘 a_{11})
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \Delta_2 x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \end{cases}$$

因为上述方程确定，$\Delta_2 \neq 0$

且唯一解为
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta_2}$$
$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Big/ \Delta_2$$

"$\Leftarrow$" 设 $\Delta_2 \neq 0$ 要证：(L_2) 是确定的

只要证
$$(H_2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

是~~确解~~只有平凡解..

因为 $\Delta_2 \neq 0$，则 a_{11}, a_{12} 不全为零

当 $a_{11} \neq 0$

(H_2) 等价于
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ \Delta_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Delta_2 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

当 $a_{12} \neq 0$ 时

(H_2) 等价于
$$\begin{cases} -\Delta_2 x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Delta_2 \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ☒

§5 集合与映射

集合：一些对象的总合

其中每个对象称为集合中的一个元素

集合的表示

$S = \{a, b, c\}$ （列举）

$a \in S$ 但是 $z \notin S$

$S = \{2, 4, 6, 8 \cdots\} = \{m \mid m\text{是正偶数}\}$

$\mathbb{Z}^+$ 正整数集合，$\mathbb{N}$ 正整数和零的集合

$\cancel{\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}}$ $\mathbb{Z}$ 整数的集合

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ 有理数集合

$\mathbb{R}$ 实数集合

$\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

定义：设 S, T 是两个集合，如果 S 的元素都是 T 的元素，则称 S 是 T 的子集，记为 $S \subset T$.

$\emptyset$ 记没有任何元素的子集，称为空集

注 空集是任何集合的子集.

例：设

$$(L)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

其中 $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$，$i = 1, \cdots, m$，$j = 1, \cdots, n$.

$$sol_{\mathbb{R}}(L) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1 \cdots m, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{是}(L)\text{的解} \right\}$$

~~(L) 和 (L') 是~~.

设 (L) 和 (L') 是两个实线性方程组.

(L) 与 (L') 等价 $\Longleftrightarrow sol_{\mathbb{R}}(L) = sol_{\mathbb{R}}(L')$.

~~定义. 设 S, T~~

例 $\mathbb{Z}^+ \subsetneqq \mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R} \subsetneqq \mathbb{C}$

注. 当 $S \subsetneqq T$ 时 称 S 是 T 的真子集.

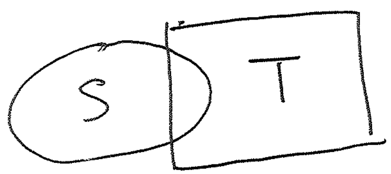
定义：设 S, T 是两个集合

$$S \cup T = \{a \mid a \in S \text{ 或 } a \in T\}$$

称 $S \cup T$ 是 S 和 T 的并

$$S \cap T = \{a \mid a \in S \text{ 且 } a \in T\}$$

称 $S \cap T$ 是 S 和 T 的交



~~例~~ 命题 5.1. 设 R, S, T 是三个集合.

(i) $S \cup T = T \cup S$ （交换律）

$S \cap T = T \cap S$

(ii) $R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$

$R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$ （结合律）

(iii) $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$

$R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$

分配律

<u>证明</u> (i) (ii) 由定义直接可得

我们来证明

$$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$$

设 $a \in R \cap (S \cup T)$

则 $a \in R$ 且 $a \in S \cup T$

于是 $a \in R, a \in S$ 或 $a \in R, a \in T$

即 $a \in R \cap S$ 或 $a \in R \cap T$

$\Rightarrow a \in (R \cap S) \cup (R \cap T)$

$\Rightarrow R \cap (S \cup T) \subset (R \cap S) \cup (R \cap T)$

反之 设 $a \in (R \cap S) \cup (R \cap T)$

则 $a \in R \cap S$ 或 $a \in R \cap T$

即 $a \in R$ 且 $a \in S$ 或 $a \in R$ 且 $a \in T$

$\Rightarrow a \in R$ 且 ($a \in S$ 或 $a \in T$)

$\Rightarrow a \in R$ 且 $a \in S \cup T$

$\Rightarrow a \in R \cap (S \cup T)$

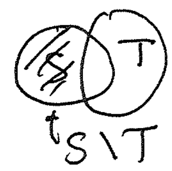
$\Rightarrow (R \cap S) \cup (R \cap T) \subset R \cap (S \cup T)$

$\Rightarrow$ 第一个分配律成立. （类似可证第二个分配律）

□

定义 设 S, T 是两个集合

$$S \setminus T = \{ s \in S \mid s \notin T \}$$



称为 S 与 T 的差

例 $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}^+ = \{0\}$ $\quad \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$

定义 设 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是集合

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2, \cdots, x_n \in S_n \}$$

称为 $S_1, \cdots, S_n$ 的笛卡儿积

当 $S_1 = S_2 = \cdots = S_n = S$ 时

$\underbrace{S \times \cdots \times S}_{n}$ 记为 S^n

例 $\mathbb{R}^{1 \times n} = \{ (x_1, \cdots x_n) \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \}$

称为 n 维~~行~~实空间

$$\mathbb{R}^{n \times 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \cdots x_n \in \mathbb{R} \right\}$$ 称为 n 维

实(列)空间.

定义 设 S, T 是两个集合

$f \subset S \times T$ 使得

对于任意 $s \in S$, 存在唯一的 $t \in T$

使得 $(s, t) \in f$.

则称 f 是从 S 到 T 的一个映射

$\forall s \in S, \exists!\, t \in T$, s.t.

$(s, t) \in f$.

则称 f 是从 S 到 T 的映射.

故 $(s, t) \in f$. 由 t 的唯一性.

记 $t = f(s)$

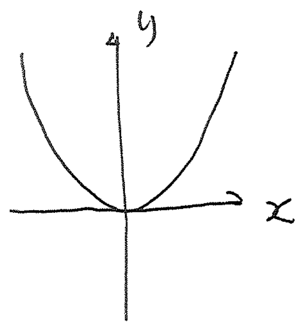
设 f 是 ~~$S\times T$~~ 从 S 到 T 的一个映射

我们把 f 写成 $f: S \longrightarrow T$

$$s \longmapsto f(s)$$

例：$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2$$



$$y = f(x) = x^2$$

$$\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

例：$S = \{a, b, c\} \quad T = \{1, 2\}$

$\varphi: S \longrightarrow T$

$$a \longmapsto 1$$
$$b \longmapsto 2$$
$$c \longmapsto 1$$

$$\varphi = \{(a,1), (b,2), (c,1)\} \subset S \times T$$

定义：设 $f: S \rightarrow T$ 是映射

S 是 f 的定义域（原像集）

$\mathrm{im}(f) = \{t \in T \mid \exists s \in S$，使得 $f(s) = t\}$

称为 f 的像.

~~设 $f \in T$~~.

例 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2.$$

$\mathrm{im}(f) = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$

定义：设 $f: S \longrightarrow T$ 是映射

如果 $\forall s_1, s_2 \in S$，$s_1 \neq s_2$，

则 $f(s_1) \neq f(s_2)$

则称 f 是单射

例：$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$，$x \mapsto x^2$ 不是单射

（$\mathbb{R}^+$ 代表正实数集）

例：$f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$，$x \mapsto x^2$ 是单射

定义：设 $f: S \longrightarrow T$ 是映射.

如果 $\forall t \in T$, $\exists s \in S$ s.t. $f(s)=t$

则称 f 是满射

例： $\varphi: \{a,b,c\} \longrightarrow \{1,2\}$ φ 是满射

$a \longmapsto 1$
$b \longmapsto 1$
$c \longrightarrow 2$

定义：设 $f: S \rightarrow T$ 是映射. 如果 f 既是单射

又是满射，则称 f 是双射.

例： $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ 是双射
$x \longmapsto x^2$

~~例 定义：设 $f: S \longrightarrow T$ 是映射，~~
~~如果 f 既是单射又是满射. 则称~~
~~f 是双射.~~

定义 设 $f: S \longrightarrow T$ 是映射. $U \subset T$

$$f^{-1}(U)=\{s \in S \mid f(s) \in U\}$$

称为 U 在 f 下的原像集.

设 $t \in T$ $f^{-1}(\{t\})$ 称为 t 在 f 下的纤维(fibre)

简记为 $f^{-1}(t)$.

例 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$

$$f^{-1}([1,-1])=\mathbb{R}$$
$$f^{-1}(0)=\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$f^{-1}((1,-1))=\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2k+1}{2}\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

例☆：设 $f: S \longrightarrow T$ 映射

f 是单射 $\Longleftrightarrow$ $\forall t \in T$ $f^{-1}(t)$ 至多含一个元素

f 是满射 $\Longleftrightarrow$ $\forall t \in T$. $f^{-1}(t)$ 至少含一个元素

f 是双射 $\Longleftrightarrow$ $\forall t \in T$ $f^{-1}(t)$ 含且仅含一个元素.

若干常见的映射

例：$id_S: S \longrightarrow S$，$s \longmapsto s$ 恒同映射
(e_S) （双射）

例：$f: S \longrightarrow S$，$s \longmapsto c$，$c \in S$
常值映射

例：设 $S \subset T$，$f: S \longrightarrow T$，$s \longmapsto s$
嵌入映射，单射

例：$f_S: S \times T \longrightarrow S$，$(s, t) \longmapsto s$
从 $S \times T$ 到 S 的投射，f_S 满射

例：设 $f: S \longrightarrow T$，$S' \subset S$
$f|_{S'}: S' \longrightarrow T$，$s \longmapsto f(s)$
f 在 S' 上限制

定义：设 $f: S \to T$，$g: T \to U$ 是两个映射，定义

$$h: S \longrightarrow U, \quad s \longmapsto g(f(s))$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & T \arrow[d, "g"] \\ & U \end{tikzcd}$$

称 h 是 f 与 g 的复合映射，记为 $g \circ f$

验证良定义

设 $(s, u), (s, v) \in g \circ f$

$u = g(f(s))$，$v = g(f(s)) \Rightarrow u = v$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & T \arrow[d, "g"] \\ & U \end{tikzcd}$$

命题 ~~定理~~ 5.1 设 $f: S \to T$，$g: T \longrightarrow U$
(i) 如果 f, g 是单射，则 $g \circ f$ 也是单射
(ii) 如果 f, g 是满射，则 $g \circ f$ 也是满射
(iii) 如果 f, g 是双射，则 $g \circ f$ 也是双射.

证：(i) 设 $s_1, s_2 \in S$ $s_1 \neq s_2$

$f(s_1) \neq f(s_2) \Rightarrow g(f(s_1)) \neq g(f(s_2))$

(∵ f 单)　　(∵ g 单)、

(ii) $\forall u \in U$, $\exists t \in T$ s.t.

$u = g(t)$ (∵ g 满射)

$\exists s \in S$ s.t.

$t = f(s)$ (∵ f 满射

$g \circ f(s) = g(f(s)) = g(t) = u$.

$g \circ f$ 满射.

(iii) 由 (i) (ii) 直接可得 ☒

定理5.1 设 $f: S \to T$, $g: T \to U$,

$h: U \to V$ 是映射

则 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, dashed, "h \circ (g \circ f)"] \arrow[drr, dashed, bend left, "(h \circ g) \circ f"] & T \arrow[d, "g"] \arrow[dr, dashed, "h \circ g"] & \\
& U \arrow[r, "h"] & V
\end{tikzcd}$$

(即复合满足结合律)

证：设 $s \in S$.

$h \circ (g \circ f)(s)$

$= h(g \circ f(s)) = h(g(f(s)))$

$(h \circ g) \circ f(s) = h \circ g(f(s)) = h(g(f(s)))$

于是 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ☒

例 设：$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$　$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+1$

$g \circ f(x) = g(x^2) = x^2+1$

$f \circ g(x) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$

$g \circ f \neq f \circ g$.

定义：设 $f: S \to T$, $g: T \to S$

如果 $g \circ f = id_S$, $f \circ g = id_T$

则称 g 是 f 的一个逆映射.

例 $f: S \to T$　$id_T \circ f = f$

$f \circ id_S = f$

定理5.1 设 $f: S \longrightarrow T$, 是映射

(i) f 可逆 $\Longleftrightarrow$ f 是双射

(ii) 设 g, h 是 f 的逆映射, 则 $g = h$.

证: (i) "$\Rightarrow$" 设 f 可逆 $g: T \to S$ 是 f 的一个逆: 设 $s_1, s_2 \in S$

$f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow g(f(s_1)) = g(f(s_2))$

$\Rightarrow g \circ f(s_1) = g \circ f(s_2) \Rightarrow id_S(s_1) = id_S(s_2)$

$\Rightarrow s_1 = s_2$ 即 f 是单射

"$\Leftarrow$" 设 $t \in T$. $\because f \circ g = id_T$

$f \circ g(t) = id_T(t) = t$

$f(g(t)) = t$ 且 $g(t) = s$

于是 f 是满射.

"$\Leftarrow$" 因为 f 是双射, 所以 $\forall t \in T$, $f^{-1}(t)$ 有且仅有一个元素 (例外). 记该元素为 $s_t \in S$

定义: $g: T \longrightarrow S$

$t \longrightarrow s_t$

是良定义的映射 $\forall s \in S$

$f^{-1}(f(s)) = \{s\}$

$g \circ f(s) = g(f(s)) = s$ $\quad g \circ f = id_S$

$\forall t \in T$

$f \circ g(t) = f(s_t) = t$. 于是 $f \circ g = id_T$.

于是 g 是 f 的一个逆.

(ii) 设 g_1, g_2 是 f 的逆

$g_1 \circ f = id_S$

$(g_1 \circ f) \circ g_2 = id_S \circ g_2 = g_2$

$\parallel$

$g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_T = g_1$

于是 $g_1 = g_2$ $\quad$ □

记号 设 $f: S \to T$ 有逆 则记 f 的逆为 f^{-1}

注: 区别 $f^{-1}(T)$. $f^{-1}(t)$ 逆像集

当 f 有逆时. f^{-1} 是逆映射.

推论 5.1 设 $f: S \to T$, $g: T \to U$ 是可逆映射. 则 $g\circ f$ 可逆, 且 $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

证: 由定理 5.2, f, g 是双射
由命题 5.1 $g\circ f$ 是双射. 于是
由定理 5.7 $g\circ f$ 可逆

$$\begin{tikzcd} S & T \arrow[l, "f^{-1}"'] \\ & U \arrow[u, "g^{-1}"'] \arrow[ul, "\cancel{g^{-1}\circ f^{-1}}\ f^{-1}\circ g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$(f^{-1}\circ g^{-1})$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)$$
$$= f^{-1}(g^{-1}\circ(g\circ f))$$
$$= f^{-1}((g^{-1}\circ g)\circ f) = f^{-1}(id_T\circ f)$$
$$= f^{-1}\circ f = id_S$$

同理可验证 $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = id_U$ ▨

推论 5.2 设 $f: S \to T$ 可逆. 则 f^{-1} 也可逆. 则 $(f^{-1})^{-1} = f$

证: $f\circ f^{-1} = id_T$ $f^{-1}\circ f = id_S$
于是 $f = (f^{-1})^{-1}$ ▨

应用 设 S, T 是两个集合. 如果存在双射 $f: S \to T$. 则称 S 和 T 是等势的.

命题 5.2. 设 S 和 T 都有限集. 则 S 和 T 等势 $\Longleftrightarrow$ S 和 T 含有元素的个数相等

证: "$\Longleftarrow$" 设 $S = \{s_1, s_2, \cdots s_n\}$
$T = \{t_1, t_2, \cdots t_n\}$
$\varphi: S \longrightarrow T$
$t_i \longmapsto s_i$, $i = 1, \cdots n$.
φ 显然是双射

"$\Longrightarrow$" 设 f 是双射 $S = \{s_1, \cdots s_n\}$
因为 f 是单射. 所以 $f(s_1), \cdots f(s_n)$ 两两不同
~~于是~~ 且都在 T 中. 于是 T 至少含有个元素. 因为 f 是满射 $T \subset \{f(s_1), \cdots f(s_n)\}$
于是 T 中至多有 n 元素. 即 T 恰好含有 n 个元素. ▨