无限集的情形.

例: 设 $S=\{2,3,4,5,\cdots\}\subsetneq \mathbb{Z}^+$

$$\varphi: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow S$$
$$n \longmapsto n+1$$

设 $m,n\in\mathbb{Z}^+$ $\varphi(m)=\varphi(n)\Rightarrow m+1=n+1$

$\Rightarrow m=n$. 所以 φ 是单射.

$\forall s\in S$ $s-1\in\mathbb{Z}^+$ $\varphi(s-1)=s$

所以 φ 是满射. 于是 φ 是双射

$\mathbb{Z}^+$ 和 S 等势.

定义: 如果集合 S 与 $\mathbb{Z}^+$ 之间有双射存在. 则称 S ~~与之~~ 是可数集 或称 S的~~基数~~是可数的

例 证明 $\mathbb{Z}$ 是可数集

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^+$$
$$n \longmapsto 2n+2 \quad n\geq 0$$
$$n \longmapsto 2(-n)+1 \quad n<0$$

自己验证 φ 是双射

其它可数集. 所有偶数(奇数)的集合

有理数的集合

无穷的非可数集. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^+$ 中所有子集组成的集合, 所有由1和0组成的无穷序列的集合

§6 二元关系

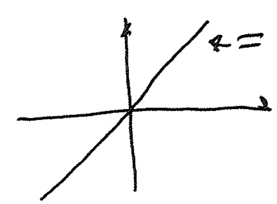
§6.1 二元关系的定义

定义: 设 S 是一个集合, $R\subset S\times S$. 则称 R 是 S 上的一个二元关系

如果 $(a,b)\in R$, 则称 a 与 b 有关系 R 记为 aRb.

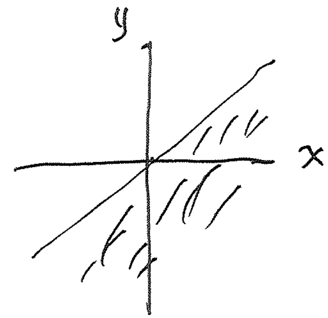
例: $\mathbb{R}$上 "等于" 是二元关系

"=" 对应的子集是 $\{(a,a)\mid a\in\mathbb{R}\}$



例 $\mathbb{R}$ 上的"大于"关系

$>$ 对应的集合是



例：S 是国科大一年级新生

$R = \{(a,b) \in S\times S \mid a,b$ 在同一教室里听过课$\}$

§6.2 等价关系

定义：设集合 S 上的一个二元关系记为 $\sim$

如果 $\sim$ 满足以下三个条件

(i) $\forall a \in S$ $\quad a \sim a$ (自反律)

(ii) 设 $a,b \in S$，如果 $a\sim b$，则 $b \sim a$ (对称律)

(iii) 设 $a,b,c \in S$，如果 $a\sim b$，$b \sim c$，则 $a \sim c$ (传递律)

则称 $\sim$ 是等价关系

例 (i) "$=$" 是等价关系

(ii) 设 S 是平面上所有三角形的集合

$\sim$ 代表三角形相似

则 $\sim$ 是等价关系

(iii) 设 $S = \mathbb{R}^2$ 定义 $(a,b) \sim (c,d)$

如果 $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2}$.

则 $\sim$ 是等价关系

(iv) 设 S 是某中学所有学生的集合

$\forall a,b \in S$ 定义 $a \sim b$ 如果 a 和 b 同班. 则 $\sim$ 是等价关系 (同结合)

例★ (v) 设 $n \in \mathbb{Z}^+$ $\quad a \in \mathbb{Z}$

由整数的除法可知，$\exists!\ q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ 且 $0 \le r < n$

使得 $a = qn + r$

称 q 是 a 关于 n 的商

r 是 a 关于 n 的余数

(除法性质的验证)

给定 $n\in\mathbb{Z}$ 且 $n\geq 2$　定义关系 $\equiv_n$ 如下

设 $a,b\in\mathbb{Z}$．　a 关于 n 的余数是 r

b 关于 n 的余数是 s

如果 $r=s$．则称 a 与 b 关于 n 同余

记为 $a\equiv_n b$．或 $a\equiv b \mod n$

验证："$\equiv_n$" 是等价关系

记号　如果 存在 $c\in\mathbb{Z}$ 使得 $a=cn$ ~~a关于n的余数是0~~，则称 n 整除 a．记为 $n\mid a$．

引理 6.1　$a\equiv_n b \iff n\mid(a-b)$

证："$\Rightarrow$"　由整数除法可知

$$a=pn+r$$

$$b=qn+r.$$

其中 p 是 a 关于 n 的商，r 是余数

q 是 b … n 的商，r 是余数

$$a-b=(p-q)n \Rightarrow n\mid(a-b)$$

"$\Leftarrow$" 设 $n\mid(a-b)$

则存在 $c\in\mathbb{Z}$，使得

$$(a-b)=cn$$

设 $a=pn+r$　其中 p,q 分别是 a,b 关于 n 的商，

$b=qn+s$　r,s 是余式

不妨设 $r\geq s$

$$a-b=(p-q)n+(r-s)$$

$$cn=(p-q)n+(r-s) \quad (*)$$

$$(c-p+q)n=r-s$$

因为 $n>r$．$n>s$．$r\geq s\geq 0$

所以 $n>r-s$．

由 $(*)$ 可知．$r-s=0$．　$r=s \Rightarrow a\equiv_n b$．

验证 自反律

$a-a=0$，$n\mid 0 \Rightarrow n\mid(a-a) \Rightarrow a\equiv_n a$

设 $a\equiv_n b$，则 $n\mid(a-b)$．$\Rightarrow \exists\, c\in\mathbb{Z}$

使得 $(a-b)=cn$，$b-a=(-c)n \Rightarrow n\mid(b-a)$

$\Rightarrow b\equiv_n a$．对称律成立

传递律. 设 $a \equiv_n b$, $b \equiv_n c$.

则 $n \mid (a-b)$, $n \mid (b-c)$

$\exists\, u, v \in \mathbb{Z}$, 使得

$\cancel{n = u(a-b)}$ $a-b = un$, $b-c = vn$

$a-c = (u+v)n \Rightarrow n \mid (a-c)$

$\Rightarrow a \equiv_n c$. 传递律成立

于是 $\equiv_n$ 是等价关系

定义 设 S 是集合, $\sim$ 是 S 上的等价关系.

设 $a \in S$

$\bar{a} = \{ b \in S \mid a \sim b \} \subset S$

称为 $\boxed{\text{~~元素 a 关于~~}}$ 关于元素 a 的等价类

例 (i) "$=$" $\quad \bar{a} = \{a\}$

(ii) "$\sim$" 相似 　所有的等边三角形构成一个等价类
这时三个角都是 $60°$

(iii) 距离. 位于单位元上的所有点构成一个等价类

(iv) 同班同学. 每个班是一个等价类

(v) 设 $n = 2$

$\bar{0} = \{$偶数集

$\bar{1} =$ 奇数集

$\bar{2} =$ 偶数集, $\bar{3} =$ 奇数集

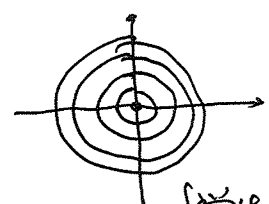
定义: 设 S 是一个集合, $\sim$ 是 S 上的一个等价关系. S 关于 $\sim$ 的所有等价类构成的集合, 称为 S 关于 $\sim$ 的商集. 记为 $S/\sim$

(i) $\mathbb{R}/= \; = \{ \{r\} \mid r \in \mathbb{R} \}$

(ii) 记平面上所有三角形的集合为 T

$T/\sim \; = \{ \{t\} \mid \{t\}$ 中元素的三个角与 t 的三个角相应相等 $\}$

(iii) $\mathbb{R}^2/\sim \; = \{ x^2+y^2=r^2 \mid r \in \mathbb{R}, 且\ r \geq 0 \}$



(iv) $\{学生\}/同班同学 = \{ 班 \}$

$\mathbb{Z}/\equiv_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$\mathbb{Z}/\equiv_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots \overline{n-1}\}$

设 $k \in \{0, 1, \cdots n-1\}$

$\bar{k} = \{mn+k \mid m \in \mathbb{Z}\}$. $\cancel{= mn+k}$

引理6.1 设$\sim$是S上的等价关系, $a, b \in S$

(i) $\bar{a} = \bar{b} \iff a \sim b$

(ii) $a \nsim b \iff \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$

证: (i) "$\Rightarrow$" 设 $\bar{a} = \bar{b}$

由自反律 $b \in \bar{b} \Rightarrow b \in \bar{a}$

$\Rightarrow a \sim b$

"$\Leftarrow$" 设 $a \sim b$

设 $x \in \bar{a}$, $x \sim a$. 由传递律 $x \sim b$

即 $x \in \bar{b}$. 于是 $\bar{a} \subset \bar{b}$. 同理

$\bar{b} \subset \bar{a}$

(ii) "$\Rightarrow$" 假设 $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$

则 $a \sim c$ $b \sim c \Rightarrow a \sim b$ $\rightarrow\leftarrow$

"$\Leftarrow$" 由(i)可得 $\square$

定义 设 $\sim$ 是S上的等价关系

$a \in S$

$\forall b \in \bar{a}$ 称 b 是 $\bar{a}$ 的一个代表元

$\mathbb{Z}/\equiv_2$ 中 $\bar{0} = \bar{2} = \bar{4} = \overline{-2} = \cdots$

$\bar{1} = \bar{3} = \bar{5} = \overline{-5} = \cdots$

商映射. (自然投射)

设$\sim$是集合S上的一个等价关系

$\pi: S \longrightarrow S/\sim$

$s \longmapsto \bar{s}$

π是满射.

定义: 设S是集合. $\mathcal{P}$是S的一些非空子集的 ~~集合~~ 满足以下条件:

(i) $\forall s \in S$ $\exists P \in \mathcal{P}$ 使得 $s \in P$

(ii) $\forall P, Q \in \mathcal{P}$, $P \neq Q$

$P \cap Q = \emptyset$ (disjoint)

则称$\mathcal{P}$是S的一个划分(partition)

~~命题~~ 6.1 设 S 是集合，$\sim$ 是 S 上的等价关系，则 $S/\sim$ 是 S 的一个划分

证：$\forall a \in S \quad a \in \bar{a}$ 且 $\bar{a} \in S/\sim$

于是 (i) 满足。

$\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in S/\sim$

$\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow a \nsim b$ （引理 6.2 (ii)）

$\Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ （引理 6.2 (ii)）

显然 $S/\sim$ 不含有空集。 ☒

注：称该划分是由 $\sim$ 诱导出的划分

~~命题~~ 6.2 设 S 是集合，$\mathcal{P}$ 是 S 的一个划分

定义二元关系 $\sim_{\mathcal{P}}$ 如下：

$\forall a, b \in S \quad a \sim_{\mathcal{P}} b$ 如果

$\exists P \in \mathcal{P}$ 使得 $a, b \in P$.

则 $\sim_{\mathcal{P}}$ 是 ~~满足~~ 等价关系。

证：~~自反律对称成立~~

验证自反律。设 $a \in S$，则 $\exists P \in \mathcal{P}$ 使得 $a \in P$

$a, a \in P$ 于是 $a \sim_{\mathcal{P}} a$ 自反律成立

设 $a \sim_{\mathcal{P}} b$，则存在 $P \in \mathcal{P}$，使得 $a, b \in P$

则 $b, a \in P$ 即 $b \sim_{\mathcal{P}} a$，对称律成立

设 $a \sim_{\mathcal{P}} b$，$b \sim_{\mathcal{P}} c$，则存在 $P, Q \in \mathcal{P}$

使得 $a, b \in P$，$b, c \in Q$

于是 $P \cap Q \neq \emptyset$，由此可知 $P = Q$

即 $a, c \in Q \Rightarrow a \sim_{\mathcal{P}} c$ ☒

称 $\sim_{\mathcal{P}}$ 是由划分 $\mathcal{P}$ 诱导出的等价关系。

注：自己验证以下结论

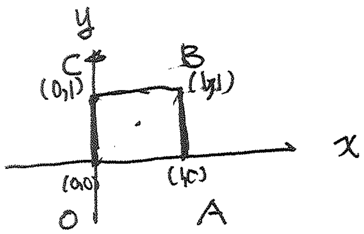
设 $\sim$ 是 S 上的等价关系，则 分划 $S/\sim$ 诱导的等价关系等于 $\sim$

设 $\mathcal{P}$ 是 S 的一个划分，则

$\mathcal{P} = S/\sim_{\mathcal{P}}$

等价关系的应用

Ⅰ 粘合



$S = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \}$

$\cancel{\sim := \{ \{(a,b), (\alpha,b)\} \mid a \in (0,1),\ b \in [0,1] \}}$

$\cup$

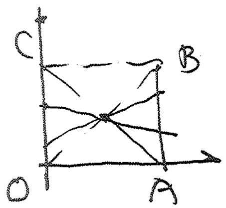
$P = \{ \{(a,b)\} \mid a \in \{0,1\},\ b \in [0,1] \}$

$\cup \{ \{(0,b), (1,b)\} \mid b \in [0,1] \}$

$S/\sim_P$ 把 ~~OC 与 AB~~ OABC 粘合为圆柱

$Q = \{ \{(a,b)\} \mid a \in \{0,1\},\ b \in [0,1] \} \cup$

$\{ \{(0,b), (1,1-b)\} \mid b \in \{0,1\} \}$



$S/\sim_Q$ 把 OABC 粘合为 Möbius 带

Ⅱ 映射的分解.

设 S, T 是两个集合 $f: S \to T$ 是映射. 定义 S 上的二元关系如下:

设 $a, b \in S$ $\quad a \sim_f b$ 如果 $f(a) = f(b)$

即 $a \sim_f b$ 如果 a, b 在同一个 f 的纤维中.

验证: $\sim_f$ 是等价关系

因为 $f(a) = f(a)$, 所以 $\forall a \in S$. $a \sim_f a$

设 $a \sim_f b$. 则 $f(a) = f(b)$. 于是 $f(b) = f(a)$

$\Rightarrow b \sim_f a$

设 $a \sim_f b$, $b \sim_f c$. 则 $f(a) = f(b)$, $f(b) = f(c)$

于是 $f(a) = f(c)$. 于是 $a \sim_f c$.

定义: $\bar{f}: S/\sim_f \longrightarrow T$

$\bar{a} \longmapsto f(a)$

良定义: 设 $\bar{a} = \bar{b}$ 则 $f(a) = f(b)$

于是 $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(\bar{b})$.

断言1 $\bar{f}$ 是单射.

设 $\bar{a},\bar{b}\in S/\sim_f$, $\bar{a}\neq\bar{b}$

则 $a\not\sim_f b$ （引理6.1 (i)）

此时 $f(a)\neq f(b)\Rightarrow \bar{f}(\bar{a})\neq\bar{f}(\bar{b})$

断言2 $f=\bar{f}\circ\pi_f$

其中 π_f 代表从 S 到 $S/\sim_f$ 的自然投射

即

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_f"'] & & T \\ & S/\sim_f \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

是交换图

$\forall a\in S$ $\pi_f(a)=\bar{a}$ $\bar{f}\circ\pi_f(a)=\bar{f}(\bar{a})=f(a)$ ▢

定理6.1. 任何一个映射可以分解为一个满射和一个单射的复合.

注：设

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_f"'] & & T \\ & S/\sim_f \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_f"'] & & T \\ & S/\sim_f \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

是两个交换图 则 $g=h$.

设 $\bar{a}\in S/\sim_f$ 其中 $a\in S$

由 $g\circ\pi_f(a)=f(a)=h\circ\pi_f(a)$

$\Rightarrow g(\bar{a})=h(\bar{a})$. $\Rightarrow g=h$.

回忆：同学关系的例子

§6.3 序关系.

定义. 设 $\leq$ 是 S 上的二元关系

~~如果~~ ~~设 $a,b\in S$.~~

~~如果~~ $\forall a\in S$ $a\leq a$, （自反） $a\leq b$, $b\leq a\Rightarrow a=b$ （反对称）

且 $a\leq b$, $b\leq c\Rightarrow a\leq c$ （传递）

则称 $\leq$ 是 S 上的一个偏序

设 $\preccurlyeq$ 是 S 上的一个偏序关系

如果 $\forall a, b \in S$　$a \preccurlyeq b$ 或 $b \preccurlyeq a$.

则称　a、b 是一个全序关系.

例 "$\leqslant$"　"$\geqslant$" 是 $\mathbb{R}$ 上的全序

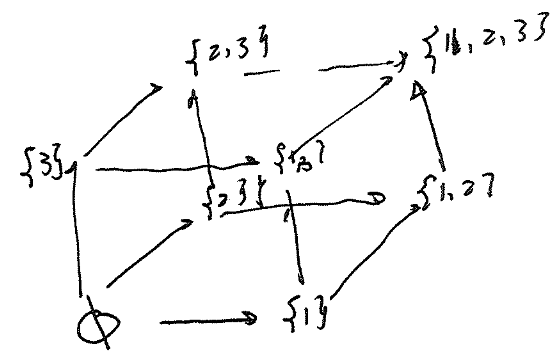
例：整除　$|$　是 $\mathbb{Z}^+$ 上的偏序

$2|4$　　2 和 5 没有整除关系

例：设 S 是集合　$P(S)$ 是 S 的所有子集的集合　则　$\subset$ 是 $P(S)$ 中的偏序关系.

$S = \{1, 2, 3\}$

$P(S) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$



↑ 代表 ∪

定义：设 $\preccurlyeq$ 是 S 上的序关系

如果 $\exists a \in S$.　使得 $\forall b \in S$，~~$b \neq a$~~

$b \preccurlyeq a$

则称 a 是最大元（同样可以定义最小元）

如果不存在 $b \in S$，$b \neq a$

使 $a \in S$　且

使得　$a \preccurlyeq b$.　则称 a 是极大元

（同样可以定义极小元）

在上例中.　$\{1,2,3\}$ 是最大元，ϕ 是最小元

如果 $T = P(S) \setminus \{\phi, \{1,2,3\}\}$

$\{1,2\}$　$\{2,3\}$　$\{1,3\}$ 是极大元

$\{1\}$　$\{2\}$　$\{3\}$ 是极小元

设 (E) 是实系数的 n 元线性方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

定义：$sol(E) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1=\alpha_1, \dots x_n=\alpha_n \\ \text{是 (E) 的解} \end{matrix} \right\}$

称之为 (E) 的解集合)

设 (E') 是另一个实系数线性方程组

定义：称 (E) 与 (E') 等价 如果 $sol(E)=sol(E')$

记为 $(E) \sim (E')$

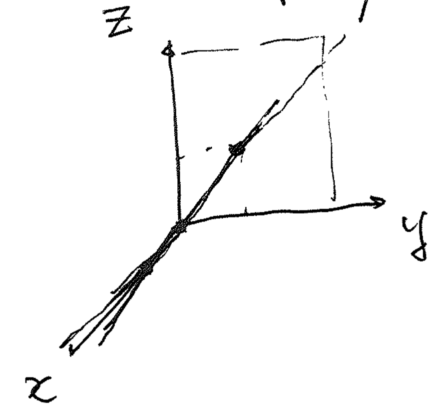
$$\overline{(E)} = \begin{cases} \emptyset & \text{当 (E) 不相容} \\ \mathbb{R}^{n\times 1} \text{中一个点，} & \text{当 (E) 是 n 元的确定的} \\ \mathbb{R}^{n\times 1} \text{中一条线，} & \text{当 (E) 由 sol(E) 由一个自由参数刻化} \\ \vdots & \\ \mathbb{R}^{n\times 1} \text{中超平面} & \text{当 sol(E) 由 n-1 个自由参数刻化} \\ \mathbb{R}^{n\times 1} & \text{当 sol(E) 由 n 个自由参数刻化 } (a_{ij}=0,\ b_j=0) \end{cases}$$

回忆：

例：(E) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ 5x+4y+z=5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 1-z \\ y = z \\ z \text{ 任意} \end{cases}$$

$sol(E) = \left\{ \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$



$\boxed{sol(E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right.}$

$sol(E) \subsetneq sol(E')$

(E) 确定　　sol(E') 由一个自由参数描述

sol(E) 是 sol(E') 直线的一个点

§7. 置换

记号 设 X 是有限集. X 中元素的个数记为 $|X|$. 设

设 $f: X \longrightarrow X$ 是双射.

则称 f 是 X 上的一个置换 (permutation)

令 $|X|=n$. 不妨设 $X=\{1,2,\cdots n\}$

X 上的所有的置换的集合记为 S_n

X 中元素 记为 $\sigma, \tau, \cdots \alpha, \beta, \pi$.

引理7.1 $|S_n| = n!$

证: $\sigma(1)$ 有 n 种选择

$\sigma(2)$ 有 $n-1$ . . .

$\vdots$

$\sigma(n)$ 有一种选择

所有置换总有 $n!$ 个.

设 $\sigma, \tau \in S$

则 $\sigma \circ \tau \in S$. 记为 $\sigma\tau$

$\sigma^{-1} \in S$

恒同 e_X 记为 e. 于是 $\sigma e = e\sigma = \sigma$, $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e$

σ 表示为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$

其中 $i_1, \cdots i_n \in X$. 两两不同

例 设 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

~~引理7.2 设$\sigma\in S_n$. 则存在正~~

记号：$\underbrace{\sigma\cdots\sigma}_{k}$ 记为 σ^k

σ^0 定义为 e

$\underbrace{\sigma^{-1}\cdots\sigma^{-1}}_{k}$ 记为 σ^{-k}

由复合的结合律可知．$\forall k, m\in\mathbb{Z}$

$$\sigma^k\cdot\sigma^m=\sigma^{k+m}$$

$$(\sigma^k)^m=\sigma^{km}$$

引理7.2 设$\sigma\in S_n$. 则存在正整数k

使得 $\sigma^k=e$.

证：考虑序列

$\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \ldots\ldots$

无穷个元素都在 S_n 中．于是存在 $\underset{k\neq m}{k, m\in\mathbb{Z}^+}$

使得 $\sigma^k=\sigma^m$

不妨设 $k<m$

则 $\sigma^{m-k}=e$ 且 $m-k\in\mathbb{Z}^+$ ▢

定义 $\sigma\in S_n$，k是最小的正整数

使得 $\sigma^k=e$. 则称k是σ的阶(order)

例 设 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ 计算σ的阶

$$\sigma^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

$$\sigma^3=\sigma^2\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\sigma^4=\sigma^3\cdot\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e$$

σ的阶是 4.

设 $\sigma \in S_n$ $\quad X = \{1, 2, \cdots, n\}$

定义：$\cancel{\forall \alpha, \beta \in S_n}$ $\forall a, b \in X$,

$a \overset{\sigma}{\sim} b$ 如果 存在 $k \in \mathbb{Z}$，使得

$$a = \sigma^k(b)$$

验证等价关系

(1) 自反性. $a \overset{\sigma}{\sim} \sigma^0(a)$

(2) 对称性. 假设 $a \overset{\sigma}{\sim} b$. 则 $\exists k \in \mathbb{Z}$

使得 $\quad a = \sigma^k(b)$

$$\sigma^{-k}(a) = \sigma^{-k}(\sigma^k(b)) = \sigma^{-k}\sigma^k(b) = b$$

由 $b = \sigma^{-k}(a)$ 可知 $b \overset{\sigma}{\sim} a$.

(3) 传递性 设 $a \overset{\sigma}{\sim} b$, $b \overset{\sigma}{\sim} c$

则 $a = \sigma^k(b)$, $b = \sigma^l(c)$, $k, l \in \mathbb{Z}$

$$a = \sigma^k(\sigma^l(c)) = \sigma^k\sigma^l(c) = \sigma^{k+l}(c).$$

$\Rightarrow a \overset{\sigma}{\sim} c$.