说明 $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ 可以写成若干素数之积，是指

$$m = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$$

其中 $p_1, \cdots, p_s$ 是素数，$k_1, \cdots k_s \in \mathbb{Z}^+$

当 $s=1$ $k_1=1$ 时 $m = p_1$.

第二章 矩阵

§1 ~~坐标~~ 向量

§1.1 坐标空间

$(a_1, \cdots, a_n)$ 是 $1\times n$ 阶矩阵 $\longrightarrow$ 行向量

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 是 $n\times 1$ 阶矩阵 $\longrightarrow$ 列向量

$$\mathbb{R}^{n\times 1} := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

称为 n 维列向量（实）空间.

$$\mathbb{R}^{1\times n} := \{ (a_1, \cdots a_n) \mid a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R} \}$$

称为 n 维行向量（实）空间

今后 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 简记为 $\mathbb{R}^n$. 关于 $\mathbb{R}^n$ 的结论对于 $\mathbb{R}^{1\times n}$ 也成立.

$\mathbb{R}^n$ 中的元素称为（列）向量，特别地

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 称为零向量，记作 $\vec{0}_n$ 或 $\vec{0}$

$\mathbb{R}^n$ 中的两种运算

$\boxed{\text{加法}}$ 设 $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$，$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\boxed{\text{数乘}}$ 设 $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

加法的运算规律

(1) 交换律 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$$

(2) 结合律. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

(3) 加法单位元 $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{v}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{v} = \vec{v}$$

(4) 加法逆元 设 $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$

则 $\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v} = \vec{0}$

数乘的运算规律.

(1) 交换律. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$(\alpha\beta)\vec{v} = (\beta\alpha)\vec{v}$$

(2) 结合律

$$\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$$

(3) 单位元

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

(把实数放在向量的右侧也一样)

加法与数乘相同作用满足的规律

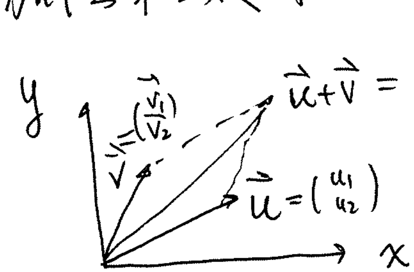
分配律. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

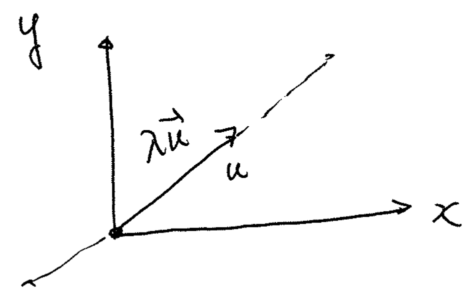
$$\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u}+\cancel{\beta}\alpha\vec{v}$$

$$(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$$

加法和数乘统称为线性运算

加法和数乘的几何意义





$\lambda>0$ $\lambda\vec{u}$ 同向伸(缩) λ倍

$\lambda<0$ $\lambda\vec{u}$ 反向伸(缩) λ倍

$\lambda=0$. $\lambda\vec{u}=\vec{0}$

§1.2 线性相关性

定义1 设 $\vec{u}, \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 如果存在

$\alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$. 使得

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k$$

则称 $\vec{u}$ 是 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 的线性组合

例: 设 $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

问 $\vec{u}$ 是不是 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 的线性组合 ?

设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_1 \\ 3\alpha_1 \\ 4\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 = 1 \\ 3\alpha_1 = 1 \\ 4\alpha_1 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

$\vec{u}$ 是 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 的线性组合 $\Leftrightarrow$ $(*)$ 相容

因为 $(*)$ 不相容. 所以 $\vec{u}$ 不是 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 的线性组合.

例 设

$$(L) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(L) 相容 $\Leftrightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ 的线性组合

令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$

$\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \cdots \vec{A}^{(n)}$ 是 n 个 A 的列向量

(L) 相容 $\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ 是 $\vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(n)}$ 的线性组合.

定义2 设 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 如果存在 $\alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}^n$ 不全为零，使得 $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$

则称 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性相关．否则称

$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ 线性无关．

例：判断 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

是否线性相关？ 解

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$

则 $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$ 解只有 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

于是 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 线性无关

例

$$(H) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $\vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(n)}$ 为 A 的列向量

则 (H) 有非平凡解 $\Leftrightarrow$ $\vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(n)}$ 线性相关

例 线性组合，线性相关．线性无关的几何意义

证 $\vec{u}$ 是 $\vec{v}$ 的线性组合 $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$．使得 $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}$ 同向或反向

$\vec{u}, \vec{v}$ 线性相关．$\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$．不为零

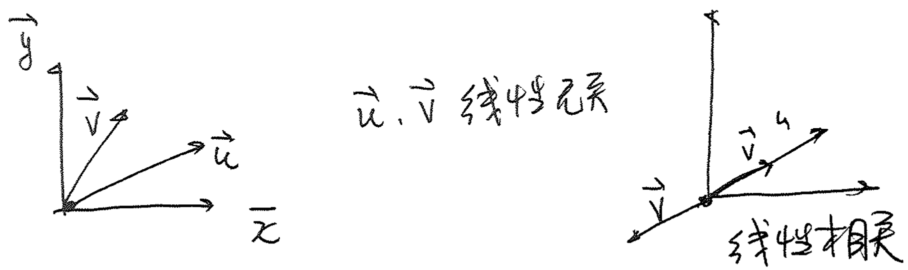
使得 $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$

情形1 $\alpha \neq 0$． $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{v}$． 即 $\vec{u}$ 是 $\vec{v}$ 的线性组合

同理 当 $\beta \neq 0$ 时 $\vec{v}$ 是 $\vec{u}$ 的线性组合.

于是 $\vec{u}, \vec{v}$ 线性相关 $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ 同向或反向

换言之 $\vec{u}, \vec{v}$ 线性无关 $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ 不在同一直线上



引理1.1 设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$. ~~如果~~ $k > m$

则 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k$ 一定线性相关

证: 设 $\vec{v}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $j = 1, \cdots, k$,

~~$\alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$ 令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mk} \end{pmatrix}$~~

~~$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \alpha_1$~~

设 $\alpha_1, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$.

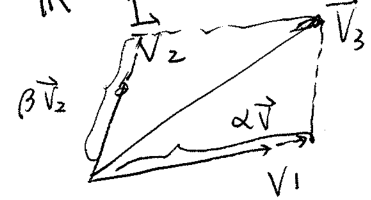
$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1k}\alpha_k = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2k}\alpha_k = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mk}\alpha_k = 0 \end{cases} \quad (H)$$

当 $k > m$ 时 (H) 有非零解 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$

于是 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性相关. ▢

例: $\mathbb{R}^2$ 中的三个向量



$\vec{v}_3 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2$

例 设 $\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$ $\vec{e}^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}^m$. 证明它们线性无关

证 设 $\alpha_1 \vec{e}^{(1)} + \alpha_2 \vec{e}^{(2)} + \cdots + \alpha_m \vec{e}^{(m)} = \vec{0}$

则 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$

▢

命题1.1 设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\in\mathbb{R}^m$ $1\leq i\leq k$

(i) 如果 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_i$ 线性相关，则 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 也线性相关

(ii) 如果 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 线性无关，则 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_i$ 也线性无关

(iii) $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 中某个向量是其它向量的线性组合

(iv) 设 $\vec{v}\in\mathbb{R}^m$ 且 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k$ 线性无关

$\vec{v},\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 线性相关

$\Leftrightarrow \exists!\ \alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$

使得 $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_k\vec{v}_k$

证：(i) 因为 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_i$ 线性相关，所以存在 $\alpha_1,\cdots\alpha_i\in\mathbb{R}$，不全为零，使得

$$\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_i\vec{v}_i=\vec{0}$$

于是 $\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_i\vec{v}_i+0\cdot\vec{v}_{i+1}+\cdots+0\,\vec{v}_k=\vec{0}$

而 $\alpha_1,\cdots\alpha_i,\underbrace{0\ \cdots\ 0}_{k-i}$ 中有非零实数

于是 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_i,\vec{v}_{i+1},\cdots\vec{v}_k$ 线性相关

(ii) 是 (i) 的逆否命题 ✓

(iii) 设 "$\Rightarrow$" $\exists\,\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$. 不全为零

使得 $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_k\vec{v}_k=\vec{0}$

不妨设 $\alpha_1\neq 0$. 则

$$\cancel{\vec{v}_1=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{v}_2-\cdots-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\vec{v}}$$

$$\vec{v}_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{v}_2+\cdots+\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\vec{v}_k=\vec{0}$$

$$\vec{v}_1=\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\vec{v}_2+\cdots+\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_1}\right)\vec{v}_k$$

"$\Leftarrow$" 不妨设 $\vec{v}_1=\beta_2\vec{v}_2+\cdots+\beta_k\vec{v}_k$，其中 $\beta_2,\cdots\beta_k\in\mathbb{R}$.

$$\vec{v}_1+(-\beta_2)\vec{v}_2+\cdots+(-\beta_k)\vec{v}_k=\vec{0}$$

于是 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots\vec{v}_k$ 线性相关

(iv) "$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$" 因为 $\vec{v},\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 线性相关

则存在 $\alpha,\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$ 不全为零. 使得

$$\alpha\vec{v}_1+\alpha_1\vec{v}_1+\cdots+\alpha_k\vec{v}_k=\vec{0}$$

~~断~~ 假设 $\alpha=0$.

则 ~~存在~~ $\alpha_1\vec{V_1}+\alpha_2\vec{V_2}+\cdots+\alpha_k\vec{V_k}=\vec{0}$

且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ 不全为零. 于是

$\vec{V_1}, \vec{V_2}, \cdots \vec{V_k}$ 线性相关. $\rightarrow\leftarrow$.

于是 $\alpha\neq 0$

$$\vec{V}=\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)\vec{V_1}+\cdots+\left(-\frac{\alpha_k}{\alpha}\right)\vec{V_k}.$$

即 $\vec{V}$ 是 $\vec{V_1}, \cdots, \vec{V_k}$ 的线性组合.

设 $\vec{V}=\lambda_1\vec{V_1}+\cdots+\lambda_k\vec{V_k}=\mu_1\vec{V_1}+\cdots+\mu_k\vec{V_k}$,

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k, \mu_1,\cdots \mu_k\in\mathbb{R}$

则 $(\lambda_1-\mu_1)\vec{V_1}+\cdots+(\lambda_k-\mu_k)\vec{V_k}=\vec{0}$

因为 $\vec{V_1},\cdots,\vec{V_k}$ 线性无关. 所以

$\lambda_1=\mu_1, \cdots, \lambda_k=\mu_k$ ▨

<u>例</u>: 设 $\vec{V_1},\cdots\vec{V_k}$ 线性无关, $\alpha_1\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$

$\vec{V}=\alpha_1\vec{V_1}+\cdots+\alpha_k\vec{V_k}$, 且 $\alpha_1\neq 0$

求证 $\vec{V}, \vec{V_2}, \cdots, \vec{V_k}$ 也线性无关

证: 由命题1.1 (ii)

$\vec{V_2},\cdots\vec{V_k}$ 也线性无关

假设 $\vec{V}, \vec{V_2}, \cdots \vec{V_k}$ 线性相关

由命题1.1 (iv) $\exists\beta_2,\cdots\beta_k\in\mathbb{R}$

$$\vec{V}=\beta_2\vec{V_2}+\cdots+\beta_k\vec{V_k}$$
$$=0\cdot\vec{V_1}+\beta_2\vec{V_2}+\cdots+\beta_k\vec{V_k}$$

~~于是~~ 与线性组合的唯一性矛盾 ▨

引理1.2（线性表示引理）

设 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_k$; $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_l \in \mathbb{R}^m$ 且 $\vec{u}_i$ 是 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_l$ 的线性组合，$i=1,\cdots k$.

如果 $k>l$，则 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_k$ 线性相关

例： $\vec{u}_1=\lambda_1\vec{v}$， $\vec{u}_2=\lambda_2\vec{v}$， $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$

$$\lambda_2\vec{u}_1-\lambda_1\vec{u}_2=(\lambda_2\lambda_1)\vec{v}-(\lambda_1\lambda_2)\vec{v}=\vec{0}$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\vec{0}$ 时 $\vec{u}_1=\vec{u}_2=\vec{0}\Rightarrow\vec{u}_1,\vec{u}_2$ 线性相关

当 λ_1 和 λ_2 不全为零时，$\vec{u}_1,\vec{u}_2$ 线性无关

注：如果一组向量中含有 $\vec{0}$，则这组向量线性相关

引理1.2的证明.

设 $\vec{u}_j=a_{1j}\vec{v}_1+\cdots+a_{lj}\vec{v}_l$，其中 $a_{ij}\in\mathbb{R}$

~~i=1,⋯,l~~，$j=1,\cdots k$

设 $\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$

$$\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_k\vec{u}_k$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\vec{u}_j=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\left(\sum_{i=1}^{l}a_{ij}\vec{v}_i\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{l}(\alpha_j a_{ij}\vec{v}_i)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k}\alpha_j a_{ij}\vec{v}_i$$
$$=\sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\alpha_j\right)\vec{v}_i \quad (*)$$

考虑线性齐次方程组

(H) $\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\alpha_j=0$， $i=1,\cdots l$.

其中 a_{ij} 为系数. 因为 $k>l$，所以

(H) 有非平凡解 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}$

代入 $(*)$ 得 $\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_k\vec{u}_k=\vec{0}$

$\Rightarrow\vec{u}_1,\cdots\vec{u}_k$ 线性相关 $\square$

§1.3 极大线性无关组

设 $S \subset \mathbb{R}^m$ 且 $S \neq \{\vec{0}\}$，$S \neq \emptyset$

则 S 中必有一组线性无关的向量.

定义：设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \subset S$ 线性无关

且 $\forall \vec{v} \in S$. $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k, \vec{v}$ 线性相关

则称 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 是 S 中的一个极大线性无关组.

引理 1.3 （扩充引理）

设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \in S$ 线性无关. 则

S 中有极大线性无关组 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \cdots \vec{v}_d$

证：如果 $\forall \vec{v} \in S$. $\vec{v}, \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性相关，则 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 是极大线性无关组.

否则 $\exists \vec{v}_{k+1} \in S$ 使得 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}$ 线性无关

对 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}$ 用同样的方法 要么我们得到极大线性无关组. 要么找到 $\vec{v}_{k+2} \in S$ ~~使得~~ 把已知 $k+1$ 个线性无关向量扩充为 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \vec{v}_{k+2}$

~~但扩充只~~ 由引理1.1. S 中至多有 m 个线性无关的向量. 于是扩充在有限次内终止. 即我们得到一个包含 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 的极大线性无关组 □

含有有限多个向量的极大线性无关组

命题1.2 设 $S \subset \mathbb{R}^m$ 且 $S \neq \emptyset$, $S \neq \{\vec{0}\}$

则 S 中必有极大线性无关组.

进而：设 $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k$ 和 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_l$ 是 S 的两个极大线性无关组. 则 $k = l$

证：设 $\vec{v} \in S$ 且 $\vec{v} \neq \vec{0}$，则 $\vec{v}$ 线性无关. ~~于是~~ 由引理1.3. S 有极大线性无关组

设 $\vec{u}_1,\cdots\vec{u}_k$；$\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_l$ 是 S 中两个极大线性无关组. 且 $k\geq l$

假设 ~~如果~~ $k>l$. 由极大线性无关组定义

$\vec{u}_j,\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_l$ 线性相关

由命题1.1 (iv). $\vec{u}_j$ 是 $\vec{v}_1\cdots\vec{v}_l$ 的线性组合

$j=1,\cdots k$

由线性表示引理 $\vec{u}_1,\cdots\vec{u}_k$ 线性相关 ※

由此可知 $k=l$. ▨

例 设 $S=\left\{\underset{\vec{v}_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}},\underset{\vec{v}_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}},\underset{\vec{v}_3}{\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}}\right\}$

求 S 的一个极大线性无关组

$\vec{v}_1$ 非零 线性无关

$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2=\vec{0}$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{matrix}\alpha_1+\alpha_2=0\\2\alpha_1+\alpha_2=0\\4\alpha_1+\alpha_2=0\end{matrix}$ $\Longleftrightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$

$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 线性无关

$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\alpha_3\vec{v}_3=\vec{0}$

$\Longleftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0\\4\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3=0\end{cases}$

$\Longleftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\-\alpha_2-\alpha_3=0\\-3\alpha_2-3\alpha_3=0\end{cases}$

$\Longleftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}$

有非平凡解

于是 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ 线性相关

$\vec{v}_1,\vec{v}_2$ 是 极大线性无关组

同理可得

$\vec{v}_2,\vec{v}_3$
$\vec{v}_1,\vec{v}_3$ 也是极大线性无关组

约定 设 $T=\{\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k\}\subset\mathbb{R}^m$ 如果 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$ 线性无(相)关. 则称 T 是线性无(相)关的 ~~极~~ 集合.

注 极大线性无关组是 S 中线性无关集关于"$\subseteq$"的极大元.

§1.4 子空间

定义: 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 非空, 如果 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U$$

则称 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 (线性闭集)

例 证明 ~~$\vec{0} \in U$~~ 如果 U 是子空间 则 $\vec{0} \in U$.

证: 设 $\vec{u} \in U$ $\quad 0\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{u} = \vec{0} \in U$.

注 $\{\vec{0}\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间. 称为零子空间

引理 1.4 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 是子空间, $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k \in U$. 则 $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k$ 的任意线性组合也在 U 中

证: 对 k 归纳

$k=1$. 显然

设 $k-1$ 时引理成立.

当 k 时 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\vec{u}_{k-1} \in U.$$

$$\alpha_k\vec{u}_k \in U$$

$$\Rightarrow \alpha_1\vec{u}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\vec{u}_{k-1} + \alpha_k\vec{u}_k \in U \quad \square$$

例 $\mathbb{R}^2$ 中的子空间是 $\{\vec{0}\}$ ~~$\{\lambda\vec{u}\}$~~ 给定 $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ $V_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2$. 没有其它的子空间

证: 设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 中的子空间且 $U \neq \{\vec{0}\}$

则 U 含有极大线性无关组. 由引理1.1 U 的极大线性无关组含有一个或两个向量

情形1 U 的极大线性无关组为 $\vec{u}$

则 $\forall \vec{v} \in U$ $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = \lambda\vec{u}$.

而且 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\vec{u} \in U$. 于是 $U = V_{\vec{u}}$

<u>情形2</u> $\mathcal{U}$ 的极大线性无关组是 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$

则 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 也是 $\mathbb{R}^2$ 的极大线性无关组

于是 $\vec{e}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 都是 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 的线性组合. ~~于是 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$~~

$\Rightarrow \vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)} \in \cancel{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \alpha_1 \vec{e}^{(1)} + \alpha_2 \vec{e}^{(2)} \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix} \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathcal{U} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathcal{U}$. ▨

例 考虑齐次线性方程组

$$(H)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

则 $\mathrm{sol}(H)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间

设 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$ 是 (H) 的解

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

我们要证明. $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \in \mathrm{sol}(H)$

$$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \begin{pmatrix}\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1\\\lambda\alpha_2 + \mu\beta_2\\\vdots\\\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\end{pmatrix}$$

对 $i = 1, \ldots m$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda\alpha_j + \mu\beta_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{ij}\alpha_j + \mu a_{ij}\beta_j)$$
$$= \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\right) + \mu\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j\right)$$
$$= 0$$

于是 $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \in \mathrm{sol}(H)$

$\mathrm{sol}(H)$ 称为 (H) 的解空间.

定义：设 $S \subset \mathbb{R}^m$，$S \neq \emptyset$.

S 中向量的所有线性组合构成的集合记为 $\langle S \rangle$，称为 S 生成的子空间

验证 $\langle S \rangle$ 是子空间

设 $\vec{u}, \vec{v} \in \langle S \rangle$

则 $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{u}_k$，$\vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \cdots + \beta_l \vec{v}_l$

其中 $\alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$，$\beta_1, \ldots \beta_k \in \mathbb{R}$

$\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_k, \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k \in S$

设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = (\lambda\alpha_1)\vec{u}_1 + \cdots + (\lambda\alpha_k)\vec{u}_k + (\mu\beta_1)\vec{v}_1 + \cdots + (\mu\beta_l)\vec{v}_l \in \langle S \rangle$$

$\Rightarrow \langle S \rangle$ 是子空间

注：设 $S \subset \mathbb{R}^m$，$S \neq \emptyset$.
U 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间．如果 $S \subset U$

则 $\langle S \rangle \subset U$．换言之 $\langle S \rangle$ 是包含集合 S 的最小子空间．

注 设 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$

$\vec{u}$ 是 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ 的线性组合

$\Leftrightarrow \vec{u} \in \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle$

特别地 设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵 $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

则 $(A | \vec{b})$ 对应的线性方程相容

$\Leftrightarrow \vec{b} \in \langle \vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \ldots \vec{A}^{(n)} \rangle$