例:

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & & -1 & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

求 F_n 与 $F_{n-1}, F_{n-2} \cdots F_0$ 之间的关系

解: 按第一行展开.

$$F_n = F_{n-1} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 3$$

$$F_1 = 1 \qquad F_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (F_1 = 1,\ F_2 = 2)$$

$1, 2, 3, 5, 8, \cdots;$ $\qquad F_{20} = 10946.$

(Fibonacci 数列)

由常系数线性递归方程理论

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

例: 设 A 是奇数阶斜对称矩阵

证明: A 不满秩

证: 设 $A \in M_n$, n 是奇数

$|A| = |A^t| = |-A| = (-1)^n|A| = -|A|$

$\Rightarrow 2|A| = 0$. 因为 $2 \neq 0$. 所以 $|A| = 0$

于是 A 不满秩. (命题2-1). □

§2.2. 乘法定理

定理2.2 设 $A \in M_n$, $B \in M_m$, $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}_{m+n}$$

则 $\Delta = |A||B|$.

证：对 n 归纳.

$n=1$　$A=(a)$.　$\Delta = \begin{vmatrix} a & c_1 \cdots c_m \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{vmatrix}$

按第一列展开，得 $\Delta = a|B| = |A||B|$

设 $n-1$ 时定理成立. 当 n 时

设 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\cdots n \\ j=1\cdots n}}$

则 $\Delta = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} & C \\ O & B \end{vmatrix}$

按第一列展开 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$，$A_{i1}$ 是 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 的代数余子式

其中 $A_{i1} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} N_{i1} & C_{i1} \\ O & B \end{vmatrix}$，

其中 $N_{i1} \in M_{n-1}$，$C_{i1} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times m}$

由归纳假设

$A_{i1} = (-1)^{i+j} |N_{i1}||B|$

于是 $\Delta = |B| \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+j} |N_{i1}| \right)$

$= |B| \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \tilde{A}_{i1}$　（其中 $\tilde{A}_{i1}$ 是 A 的代数余子式）

$= |B||A|$.　（定理2.1.）　∎

另证：$f: \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(n)}) \longmapsto \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}$

f 是多重线性 斜对称的

于是 $f(\vec{A}^{(1)}, \cdots \vec{A}^{(n)}) = \lambda \det(A)$，其中 $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\vec{e}^{(1)}, \cdots, \vec{e}^{(n)}) = \begin{vmatrix} E_n & C \\ O & B \end{vmatrix}$

按第1列，第2列 ⋯ 第n列展开

$f(\vec{e}^{(1)}, \cdots \vec{e}^{(n)}) = |B|$

$\Rightarrow \lambda = |B| \Rightarrow \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$.

推论2.1 (i) $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$

(ii) $\begin{vmatrix} D & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} A & D \\ O & B \end{vmatrix}$

其中 A, B, 与定理2.2 中的相同

$C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$

证：令 $M = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ O & B^t \end{pmatrix}$ 则 $M^t = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$

由定理2.2. $|M| = |A^t||B^t| = |A||B|$
$\quad\|$
$|M^t|$

(i) 成立.

把 A 的第一列逐个对换到 $\begin{pmatrix} D & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的第一列

(共经过 m 次对换)

得到矩阵 U_1

再把 U_1 中的第 m+2 列逐个对换到第二列，

(共经过 m 次对换)

得到矩阵 U_2,

……

最后得到

$U_n = \begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} D & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |U_n| = (-1)^{mn} |A||B|$ 证

例：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$

定理2.3 设 $A, B \in M_n$. 则

$|AB| = |A||B|$

证：$f: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\vec{B}^{(1)}, \cdots \vec{B}^{(n)}) \longmapsto \det(AB)$

$\forall\ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f(\vec{B}^{(1)}, \alpha\vec{B}^{(j)} + \beta\vec{y}, \vec{B}^{(n)})$

$= \det(A(\vec{B}^{(1)}, \alpha\vec{B}^{(j)} + \beta\vec{y}, \cdots \vec{B}^{(n)})$

$= \det(A\vec{B}^{(1)}, \cdots A(\alpha\vec{B}^{(j)} + \beta\vec{y}), \cdots A\vec{B}^{(n)})$

$= \det(A\vec{B}^{(1)}, \cdots, \alpha A\vec{B}^{(j)} + \beta A\vec{y}, \cdots A\vec{B}^{(n)})$

$= \alpha \det(A(\vec{B}^{(1)}, \cdots \vec{B}^{(j)} \cdots \vec{B}^{(n)})) + \beta \det(A(\vec{B}^{(1)}, \cdots \underset{j}{\vec{y}}, \cdots \vec{B}^{(n)}))$

$= \alpha f(\vec{B}^{(1)}, \cdots \vec{B}^{(n)}) + \beta f(\vec{B}^{(1)}, \cdots \underset{j}{\vec{y}}, \cdots \vec{B}^{(n)})$ 由

于是 f 是 n 重线性的.

$f(\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{B}^{(n)}) = \det(A\vec{B}^{(1)},\cdots A\vec{B}^{(n)})$

$\because$ det 是斜对称的. $\therefore$ f 是斜对称的

于是 $f(\vec{B}^{(1)},\dots\vec{B}^{(n)}) = \lambda\det(B)$

取 $B=E_n$ 则 $\underset{\lambda}{\underset{\parallel}{f(\vec{B}^{(1)},\dots\vec{B}^{(n)})}} = \det(AB) = \det(A)$

由此可知 $\det(A)\det(B) = \det(AB)$.

<u>另证:</u> 如果 A 不满秩. 则 $|A|=0$

AB 不满秩. 于是 $|AB|=0$

由此可知定理成立.

设 A 可逆. 则 A 是若干个初等矩阵 $P_1\dots P_k$ 之积

断言: 设 P 是 n 阶初等矩阵 $C\in M_n$.

则 $|PC|=|P||C|$

<u>断言的证明</u>

情形 1. 设 $P=E_{ij}^{(n)}$, 其中 $i,j\in\{1,\dots n\}$, $i\neq j$

$|PD|=-|D|$ 而 $|P|=-1$.

所以 $|PD|=|P||D|$

情形 2 设 $P=E_{ij}^{(n)}(\lambda)$.

$|PD|=|D|$ 而 $|P|=1$. 于是 $|PD|=|P||D|$

情形 3. 设 $P=E_i^{(n)}(\lambda)$, $\lambda\neq 0$

$|PD|=\lambda|D|$ 而 $|P|=\lambda$ 于是 $|PD|=|P||D|$

断言成立

因为 $A=P_1P_2\cdots P_k$.

所以 $|AB|=|(P_1P_2\cdots P_k)B|$

$=|P_1(P_2\cdots P_k)B| = |P_1||(P_2\cdots P_k)B|$

$=\cdots=|P_1||P_2|\cdots|P_k||B|$

$=\cdots=|P_1P_2\cdots P_k||B|$ (反复利用断言)

$=|A||B|$ $\square$

例: $A = \begin{pmatrix} (a_0+b_0)^n, & (a_0+b_1)^n, & \cdots, & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ & \cdots & & \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$

计算 $\det(A)$

$$(a_i+b_j)^n = \binom{n}{0} a_i^n + \binom{n}{1} a_i^{n-1} b_j + \cdots + \binom{n}{n-1} a_i b_j^{n-1} + b_j^n$$

$$= \left(\binom{n}{0} a_i^n, \binom{n}{1} a_i^{n-1}, \cdots \binom{n}{n-1} a_i, \binom{n}{n} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ b_j \\ \vdots \\ b_j^{n-1} \\ b_j^n \end{pmatrix}$$

令 $C = (c_{ij})_{\substack{i=0,1\cdots n \\ k=0,1\cdots n}}$

$$c_{ik} = \binom{n}{k} a_i^{n-k}$$

$$D = (d_{kj})_{\substack{k=0\cdots n \\ j=0\cdots n}} \qquad d_{kj} = b_j^k$$

设 $F = CD = (f_{ij})_{\substack{i=0,\cdots n \\ j=0\cdots n}}$

$$f_{ij} = \sum_{k=0}^{n} c_{ik} b_{kj} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_i^{n-k} b_j^k$$

$$= (a_i+b_j)^n = A$$

$$\det(A) = \det(C)\det(D)$$

$$\det(C) = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \det \begin{bmatrix} a_0^n & a_0^{n-1} & \cdots & 1 \\ a_1^n & a_1^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_n^n & a_n^{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right] (-1)^{n+(n-1)+\cdots+1} V_{n+1}(a_0, a_1, \cdots a_n)$$

$$\det(D) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_0 & b_1 & & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_0^n & b_1^n & & b_n^n \end{bmatrix} = V_{n+1}(b_0, b_1, \cdots b_n)$$

$$\Rightarrow \det(A) = \left[\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right] (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} V_{n+1}(a_0, \cdots a_n) V_{n+1}(b_0, \cdots b_n)$$

例 Sylvester's equalities

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

则 ① $n + \operatorname{rank}(E_m + AB) = m + \operatorname{rank}(E_n + BA)$

② $\det(E_m + AB) = \det(E_n + BA)$

证: 设 $M_0 = \begin{pmatrix} E_m+AB & O_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(M_0) = n + \mathrm{rank}(E_m+AB)$

希望：通过左或右乘可逆矩阵 把 M_0 变为

$$\begin{pmatrix} E_n+BA & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & E_m \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & A \\ O_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}}_{P_1} M_0 = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m+AB & O_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_m+AB & A \\ O_{n\times m} & E_n \end{pmatrix} =: M_1$$

$$M_1 \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O_{m\times n} \\ -B & E_n \end{pmatrix}}_{Q_1} = \begin{pmatrix} E_m+AB & A \\ O_{n\times m} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & O_{m\times n} \\ -B & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix} =: M_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O_{m\times n} \\ B & E_n \end{pmatrix}}_{P_2} M_2 = \begin{pmatrix} E_m & O_{m\times n} \\ B & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n+BA \end{pmatrix} =: M_3$$

$$M_3 \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{Q_2} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n+BA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n+BA \end{pmatrix} =: M_4$$

(*) $\quad P_2 P_1 M_0 Q_1 Q_2 = M_4$

因为 $\det(P_1) = \det(P_2) = \det(Q_1) = \det(Q_2) = 1$

所以 $\mathrm{rank}(M_0) = \mathrm{rank}(M_4)$ [第2章 ~~定理~~ 推论5.1]

$|M_0| = |M_4|$ [定理2.2. 2.3]

$\quad \| \qquad\quad \|$

$|E_m+AB| \quad |E_n+BA|$

$\square$

注：由 (*) $\quad P_1 M_0 Q_1 = P_2^{-1} M_4 Q_2^{-1}$

对比 p103. 提示.

§3 行列式的应用

§3.1 伴随矩阵

记号 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ A_{ij} 记 A 的关于 i 行 j 列的代数余子式，$i,j\in\{1,\dots n\}$.

回忆 定理2.1

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (\text{按第}i\text{行展开})$$

$$=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (\text{按第}j\text{列展开}$$

设 $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$，$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$

技巧1： $\det\begin{pmatrix}\vec{A_1}\\ \vdots\\ \vec{A_{i-1}}\\ \vec{\alpha}\\ \vec{A_{i+1}}\\ \vdots\\ \vec{A_n}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k A_{ik}$

技巧2： $\det(\vec{A_1},\dots,\vec{A}^{(j-1)},\vec{\beta},\vec{A}^{(j+1)},\dots\vec{A}^{(n)})$

$$=\sum_{k=1}^{n}\beta_k A_{kj}$$

定义： Kronecker's symbol

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j.\end{cases} \qquad i,j\in\{1,\dots n\}$$

注 $E_n=(\delta_{ij})_{n\times n}$

引理3.1 $\forall\, i,j\in\{1,\dots n\}$

i) $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}|A|$

ii) $\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik}=\delta_{ji}|A|$

证： i) 当 $j=i$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}=|A|=|A|\delta_{jj} \quad (\text{定理}2.1)$$

当 $j\neq i$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{\substack{\parallel\\ \beta_k}}{a_{ki}}A_{kj}=\det(\vec{A}^{(1)},\dots\vec{A}^{(i)},\dots\vec{A}^{(j-1)},\overset{j}{\vec{A}^{(i)}},\underbrace{\dots}_{\vec{A}^{(j+1)}}\vec{A}^{(n)})$$

$$(\because\ \vec{A}^{(i)}=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix})$$

$$=0=|A|\,\delta_{ij}.$$

ii) 同理. 利用行展开和技巧1. $\boxed{\,}$

~~引理3.2~~

定义：A 的伴随矩阵

$$A^{\vee} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

注：如果令 $A^{\vee} = (a'_{ij})_{n\times n}$

$$a'_{ij} = A_{ji}.$$

引理3.2 $\quad A^{\vee}A = AA^{\vee} = |A|E_n$

证：设 $A^{\vee} = (a'_{ik})_{\substack{i=1\cdots n\\ k=1\cdots n}}$ $\quad A = (a_{kj})_{\substack{k=1\cdots n\\ j=1\cdots n}}$

设 $B = (b_{ij}) = \cancel{(a'_{ik})}\, A^{\vee}A$

则 $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik}\cdot a_{kj}$

$= \sum_{k=1}^{n} A_{ki}\cdot a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{ki}$

$= \delta_{ji}|A|$ $\quad$ (引理3.1 (ii))

于是 $\cancel{b_{ij} =}$ $A^{\vee}A = |A|E_n$

同理 $AA^{\vee} = |A|E_n$

例：设 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 计算 $A^{\vee}$, $|A|$

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & -12 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$|A| = 12$

定理3.1 设 A 可逆. 则 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{\vee}$

证：由引理3.1

$A^{\vee}A = |A|E_n$ $\qquad$ 于是

由命题1.1. $|A| \neq 0$.

$\left(\frac{1}{|A|}A^{\vee}\right)A = E_n$

由第二章推论5.2 $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^{\vee}$

注：若 $\forall i,j \in \{1,2\dots n\}$ $a_{ij} \in \mathbb{Z}$

则 $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ 于是 A^{-1} 中第 i 行第 j 列的元素是 $\frac{A_{ji}}{|A|} \in \mathbb{Q}$，且 $|A|$ 是 A^{-1} 中所有元素的公分母.

定理 3.2 (Cramer's rule) 设 A 可逆

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

则 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的唯一解是

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad 其中$$

$$A_i = (\vec{A}^{(1)}, \dots \vec{A}^{(i-1)}, \vec{b}, \vec{A}^{(i+1)}, \dots \vec{A}^{(n)}).$$

$i=1,\dots n$

证：$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$$\vec{x} = \frac{1}{|A|} A^{\vee} \vec{b} \quad (定理 3.1)$$

于是 $\forall i \in \{1,\dots n\}$ $x_i = \frac{1}{|A|} \vec{A^{\vee}_i} \cdot \vec{b}$

$$= \frac{1}{|A|}(A_{1i}, A_{2i}, \dots A_{ni}) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{ki} = \frac{|A_i|}{|A|} \quad (按列 i) \quad \blacksquare$$

例 设 $A \in M_3$ 与前例相同. 解

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$|A| = 12$

例：设 $A \in M_3$ 与前例相同. 计算 $|A|, A^{-1}, A^{\vee}$ 并解方程组 $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_3(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad |A| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$|A| = 12 \qquad A^{\vee} = |A| A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & -12 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

例 设 $A \in M_n$ 证明 $|A^{\vee}| = |A|^{n-1}$ $(n \geq 2)$

证: ~~如果 A 可逆，则~~ 由引理3.2 和乘法定理

$$|A^{\vee}||A| = |A|^n$$

若 $|A| \neq 0$. 则 $|A^{\vee}| = |A|^{n-1}$

若 $|A| = 0$

则 $A^{\vee} A = O_{n\times n}$

当 $A = O_{n\times n}$ 时 显然 $A^{\vee} = O_{n\times n}$ 于是 $|A^{\vee}| = 0$

当 $A \neq O_{n\times n}$ 时 $\mathrm{rank}(A) > 0$

由 $A^{\vee} A = O_{n\times n}$ 可知 $\mathrm{rank}(A^{\vee}) < n$

（第二章，推论5.1）

于是 $|A^{\vee}| = 0$. （命题1.1）

由此可知. $|A^{\vee}| = |A|^{n-1}$. ■

§3.2 矩阵的秩

定义：设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $i_1, \dots i_k \in \{1, \dots m\}$

$j_1 \dots j_k \in \{1, \dots n\}$. 令 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$

则 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1}, & a_{i_1,j_2} & \cdots a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1}, & a_{i_2,j_2} & \cdots a_{i_2,j_k} \\ & \cdots & \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots a_{i_k,j_k} \end{vmatrix}$$

称为 A 的一个 k 阶子式 记为

$$M_A \begin{pmatrix} i_1, \cdots i_k \\ j_1, \cdots j_k \end{pmatrix}.$$

约定 A 的 0 阶子式都为 1

注：$i_1 \cdots i_k \in \{1, \dots m\}$. 不必两两不同

$j_1 \cdots j_k \in \{1, \dots n\}$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 4 & 5 & 6 & y \\ 7 & 8 & 9 & z \end{pmatrix}$

$M_A\begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\4 & 5\end{vmatrix}$, $M_A\begin{pmatrix}1,2\\3,4\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3 & x\\6 & y\end{vmatrix}$

$M_A\begin{pmatrix}2,1\\3,4\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}6 & y\\3 & x\end{vmatrix}$ $M_A\begin{pmatrix}2,1\\4,3\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}y & 6\\x & 3\end{vmatrix}$

$M_A\begin{pmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}7 & 8\\7 & 8\end{vmatrix}$

注：若 $i_1,\cdots,i_k$ 中有两数相同……$\Rightarrow M_A\begin{pmatrix}i_1,\cdots i_k\\j_1,\cdots j_k\end{pmatrix}=0$
或 $j_1\cdots j_k$

注：若 $s_1,\cdots s_k$ 是 $i_1,\cdots i_k$ 的一个置换
$t_1\cdots t_k$ 是 $j_1\cdots j_k$ ……

$\Rightarrow M_A\begin{pmatrix}s_1,\cdots s_k\\t_1\cdots t_k\end{pmatrix} = \pm M_A\begin{pmatrix}i_1,\cdots i_k\\j_1\cdots j_k\end{pmatrix}$

特别地 $M_A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_k\\j_1,\cdots j_k\end{pmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow M_A\begin{pmatrix}s_1,\cdots,s_k\\t_1,\cdots,t_k\end{pmatrix}\neq 0$.

引理 3.3. 设 $\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_k \in \mathbb{R}^n$ 线性无关
则 $B=(\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_k)\in\mathbb{R}^{n\times k}$ 中有一个 k 阶子式非零

证：$\text{rank}(B)=k \Rightarrow B$ 中有 k 行线性无关

设 $\vec{B}_{i_1},\cdots\vec{B}_{i_k}$ 线性无关

则 $\begin{pmatrix}\vec{B}_{i_1}\\ \vdots \\ \vec{B}_{i_k}\end{pmatrix}\in M_k$ 满秩

$M_B\begin{pmatrix}i_1,\cdots i_k\\1,\cdots k\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vec{B}_{i_1}\\ \vdots \\ \vec{B}_{i_k}\end{pmatrix}\neq 0$ ▨

引理 3.4 设 $M_A\begin{pmatrix}i_1,\cdots i_k\\j_1,\cdots j_k\end{pmatrix}\neq 0$，其中 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

则 $\vec{A}_{i_1},\cdots\vec{A}_{i_k}$ 线性无关，$\vec{A}^{(j_1)},\cdots\vec{A}^{(j_k)}$ 线性无关

证：设 ~~$\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$~~ $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\cdots m\\ j=1\cdots n}}$

$\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$

若 $\alpha_1\vec{A}^{(j_1)}+\cdots+\alpha_k\vec{A}^{(j_k)} = \vec{0}_n$

则 $\alpha_1\begin{pmatrix}a_{i_1j_1}\\ \vdots \\ a_{i_kj_k}\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}a_{i_1j_2}\\ \vdots \\ a_{i_kj_k}\end{pmatrix}+\cdots+\alpha_k\begin{pmatrix}a_{i_1j_k}\\ \vdots \\ a_{i_k,j_k}\end{pmatrix}=\vec{0}_k$ 则

令 $B=\begin{pmatrix}a_{i_1j_1} & \cdots & a_{1j_k}\\ & \cdots & \\ a_{i_kj_1} & \cdots & a_{kj_k}\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_k\end{pmatrix}=\vec{0}_k$

由 $\det(B)=M\begin{pmatrix}i_1,\cdots i_k\\j_1\cdots j_k\end{pmatrix}\neq 0$ 可知 B 可逆

$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_k\end{pmatrix}=B^{-1}\vec{0}_k=\vec{0}_k \Rightarrow \vec{A}^{(j_1)},\cdots\vec{A}^{(j_k)}$ 线性无关

同理可证: $\vec{A}_{i_1}^{t}, \dots \vec{A}_{i_k}^{t}$ 线性无关

于是 $\vec{A}_{i_1}, \dots \vec{A}_{i_k}$ 也线性无关. ☒

定理 3.3 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则下列三个断言等价

(i) $\operatorname{rank}(A) = r$

(ii) $\forall k \in \{r+1, r+2, \dots \min(m,n)\}$ A的k阶子式都为零, 且∃A的一个r阶子式非零

(iii) A的任意 r+1阶子式都为零, 且∃A的一个r阶子式非零

证: (i) ⇒ (ii) 设 $k \in \{r+1, r+2, \dots \min(m,n)\}$

若 $M\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \vec{A}^{(j_1)}, \dots \vec{A}^{(j_k)}$ 线性无关 $\Rightarrow \operatorname{rank}(A) \geq k > r$ →←

(引理3.4)

设 $\vec{A}^{(j_1)} \dots \vec{A}^{(j_r)}$ 线性无关. 则由引理3.3

$\exists\, i_1, \dots i_r \in \{1, \dots m\}$ 使得

$M_B\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$. 其中 $B = (\vec{A}^{(j_1)} \dots \vec{A}^{(j_r)})$

但 $M_A\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r \end{pmatrix} = M_B\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \neq 0$

(ii) ⇒ (iii) 显然.

(iii) ⇒ (i). ∵ ∃一个r阶子式非零 (引理3.4) 有

∴ $\operatorname{rank}(A) \geq r$

假设 $\operatorname{rank}(A) > r$. 则 $\exists\, j_1, \dots j_r, j_{r+1}$

使得 $\vec{A}^{(j_1)}, \dots \vec{A}^{(j_r)}, \vec{A}^{(j_{r+1})}$ 线性无关

类似 (i) ⇒ (ii) 中的推理. A中有 r+1阶子式非零. →← ☒

~~推论3.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$~~

~~rank(A) 等于 A 中非零子式的最大阶数~~

~~问题: 已知 rank(A) = r. 找出 A 中一个 r 阶非零子式~~

~~命题3.1. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. rank(A) = r > 0 $\vec{A}^{(j_1)}, \dots \vec{A}^{(j_r)}$ 线性无关. 若 $\vec{A}_{i_1}, \dots \vec{A}_{i_r}$ 线性无关. 则 $M\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_r \end{pmatrix} \neq 0$~~