回忆：

设 $S\subset\mathbb{R}^n$ $S\neq\Phi$, $S=\{\vec{0}\}$.

设 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k$ 是 S 中线性无关的向量

则 (i) S 中存在极大线性无关组

$\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_k$, $\vec{v}_{k+1},\cdots\vec{v}_d$ （扩充引理）

(ii) S 中任何极大线性无关组~~都~~恰好含有 d 个向量

记号. 设 $S=\{\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\}\subset\mathbb{R}^n$

$\langle S\rangle$ 也记作 $\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_k\rangle$

§1.5 基底与维数

定义：设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间，$\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_d\in V$

如果 (i) $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_d$ 线性无关

(ii) $V=\langle\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_d\rangle$

则称 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_d$ 是 V 的一组基

注 设 $\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_k\in V$（子空间）

则 $\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_k$ 的任何线性组合也在 V 中

验证(i) ~~$\{\vec{w}_1,\cdots\vec{w}_k\}$~~

$\vec{w}_1,\cdots\vec{w}_k\in V\Rightarrow\langle\vec{w}_1,\cdots\vec{w}_k\rangle\subset V$

验证(ii). 设 $\vec{w}=\alpha_1\vec{w}_1+\cdots+\alpha_k\vec{w}_k$，其中 $\alpha_1,\cdots\alpha_k\in\mathbb{R}$. 对 k 归纳即可.

命题 1.3 设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 中是子空间

且 $V\neq\{\vec{0}\}$. 则

(i) V 有基底

(ii) V 中任何两组基底所含向量的个数相同.

证：(i) 设 $\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_d$ 是 V 的极大线性无关组，则 $\forall\vec{v}\in V$

$\vec{v},\vec{v}_1\cdots\vec{v}_d$ 线性相关

由命题 1.1(iv) $\vec{v}\in\langle\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_d\rangle$

即 $V \subset \langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_d \rangle$

由上面的径可知 $\langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_d \rangle \subset V$

$$V = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_d \rangle$$

于是 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_d$ 是 V 的一组基

(ii) 设 $\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k$ 是 V 的另一组基

则 $\forall \vec{v} \in V$，$\vec{v}$ 是 $\vec{w}_1, \cdots \vec{w}_k$ 的线性组合. 于是

$\vec{v}, \vec{w}_1, \cdots \vec{w}_k$ 线性相关.

即 $\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k$ 是 V 的极大线性无关组. 由~~命~~题1.2可知 $k=d$. 因

定义: 设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 是子空间, $V \neq \{\vec{0}\}$

~~则~~ $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_d$ 是 V 的一组基.

则 d 称为 V 的维数. 特别地

$\{\vec{0}\}$ 的维数定义为 0. V 的维数

记为 $\dim V$.

例: $\mathbb{R}^n$ 的一组基底是

$\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \cdots \vec{e}^{(n)}$ 称为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基

于是 $\dim \mathbb{R}^n = n$

例 设 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一维子空间

则 L 有基底 $\vec{v}$

$$L = \langle \vec{v} \rangle = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

L 是过原点的直线

例: 计算

$$(H) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间的基

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{x_3 + x_4}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)$$

(H) 的通解为 $\begin{pmatrix} \frac{x_3-x_4}{2} \\ \frac{x_3+x_4}{2} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

取 $x_3=1,\ x_4=0$　　取 $x_3=0,\ x_4=1$

$\vec{v}_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\vec{v}_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

是 (H) 的解空间 sol(H) 的两个线性无关的解

$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2=\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2} \\ \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{sol}(H)$$

由通解形式可知

$$\mathrm{sol}(H) = \cancel{\{\alpha_1\vec{v}_1}\ \langle \vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle$$

于是 $\dim(\mathrm{sol}(H)) = 2$.

命题1.4 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 且 $U \subset V$. 如果 $\dim U \subset \dim V$ 则 $U=V$.

证: 设 $\vec{u}_1,\dots\vec{u}_d$ 是 U 的一组基. 由扩充引理. V 中有极大线性无关组 $\vec{u}_1,\dots\vec{u}_d,\vec{u}_{d+1},\dots\vec{u}_s$ 且 该极大线性无关组也是 V 的一组基. 因为 $\dim U=\dim V$, 所以 $s=d$. 即 $\vec{u}_1,\dots\vec{u}_d$ 也是 V 的基

于是 $U=\langle\vec{u}_1,\dots\vec{u}_d\rangle$, $V=\langle\vec{u}_1,\dots\vec{u}_d\rangle$

$\Rightarrow U=V$

命题1.5 (基扩充定理)

设 $V \subseteq \mathbb{R}^n$ 是子空间. $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_k \in V$ 线性无关. 则 V 中有一组基 $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_k,\vec{v}_{k+1},\dots\vec{v}_d$

证: 扩充引理的直接推论 ▨

命题1.6 设 $\cancel{S}\ V=\langle \vec{v_1},\dots \vec{v_m}\rangle \subset \mathbb{R}^n$

则存在 $\vec{u_1},\dots \vec{u_d} \in \{\vec{v_1},\dots \vec{v_m}\}$

使得 $\vec{u_1},\dots \vec{u_d}$ 是 $\vec{v_1},\dots \vec{v_m}$ 的一组基

注 $\vec{v_1},\dots,\vec{v_m}$ 称为 V 的一组生成元

证: 设 $\vec{u_1},\dots \vec{u_d}$ 是 $\{\vec{v_1},\dots \vec{v_m}\}$ 中的极大线性无关组. 则 $\forall j\in\{1,\dots m\}$

$\exists\ \alpha_{1j},\dots \alpha_{dj}$, 使得

$$\vec{v_j}=\sum_{i=1}^{d}\alpha_{ij}\vec{u_i}$$

$\forall\ \vec{v}\in V$. $\exists\ \beta_1,\dots \beta_m\in\mathbb{R}$ 使得

$$\vec{v}=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\vec{v_j}=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{d}\alpha_{ij}\vec{u_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{d}\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{m}\beta_j\alpha_{ij}}_{\lambda_i}\Big)\vec{u_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\vec{u_i}$$ 于是 $V=\langle \vec{u_1},\dots \vec{u_d}\rangle$ $\boxed{}$

例 设 $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

计算 $\langle \vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\rangle$ 的一组基

由命题1.6 及其证明. 我们只要求 $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ 的一个极大线性无关组即可

$\vec{v_1},\vec{v_2}$ 显然线性相关

设 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ 且

$$\alpha_1\vec{v_1}+\alpha_2\vec{v_2}=\vec{v_3}$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(L)\quad\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2=1\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ 2\alpha_2=1\end{cases}$$

$\alpha_2=\frac{1}{2}$. $\alpha_1=-\frac{1}{2}$ 是 (L) 的解

于是 $\frac{1}{2}\vec{v_1}+\frac{1}{2}\vec{v_2}=\vec{v_3}$

即 $\vec{v_1},\vec{v_2}$ 是 $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$ 的极大线性无关组

$\dim\langle \vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\rangle=2$.

§2 矩阵的秩

§2.1 行空间与列空间

记号 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 记 $\mathbb{R}$ 上所有 $m\times n$ 阶矩阵的集合

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{A}^{(1)} & \vec{A}^{(2)} & \cdots\ \vec{A}^{(n)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{--- } \vec{A}_1 \\ \text{--- } \vec{A}_2 \\ \\ \text{--- } \vec{A}_m \end{array}$$

A 的 m 个行向量记为 $\vec{A}_1,\cdots,\vec{A}_m$

A 的 n 个列向量记为 $\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}$

注 $\vec{A}_1,\cdots,\vec{A}_m\in\mathbb{R}^{1\times n}$, $\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n)}\in\mathbb{R}^m$

定义：$\langle\vec{A}_1,\cdots,\vec{A}_m\rangle$ 称为 A 的行空间 记为 $V_r(A)$. $\langle\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}\rangle$ 称为 A 的列空间. 记为 $V_c(A)$

注 $V_r(A)\subset\mathbb{R}^{1\times n}$, $V_c(A)\subset\mathbb{R}^m$

本节的目的：证明

$$\underbrace{\dim V_r(A)}_{A\text{的行秩}} = \underbrace{\dim V_c(A)}_{A\text{的列秩}}$$

A 的行秩 = A 的列秩

例：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$V_r(A)=\langle(1,0,0,\cdots 0),(0\,1\,0\cdots 0),\cdots(0,0\cdots 0\,1)\rangle$

$$V_c(A)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\dim V_r(A)=n$ $\quad\dim V_c(A)=n$

注. 上述 A 称为单位方阵

~~引理2.1~~

回忆：矩阵的三类初等行变换

(i) 交换两行位置

(ii) 把一行~~乘以某~~乘一个实数加到另行上

(iii) 把一行~~数~~乘以非零实数

~~$A = (\vec{A}_1, \cdots \vec{A}_2 \cdots \vec{A}_j \cdots A)$~~

(i) $A = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_i \\ \vdots \\ \vec{A}_j \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_j \\ \vdots \\ \vec{A}_i \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots i \\ \\ \cdots j \\ \\ \\ \end{array}$

(ii) $A \longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_i \\ \vdots \\ \vec{A}_j + \lambda \vec{A}_i \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix}$ $\quad i \neq j$

(iii) $A \longrightarrow \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \lambda \vec{A}_i \\ \vdots \\ \vec{A}_m \end{pmatrix}$ $\quad \lambda \neq 0$

引理2.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

B 是 A 通过有限次行变换得到的矩阵

则 $V_r(A) = V_r(B)$. 特别地. $\dim V_r(A) = \dim V_r(B)$

证：如果 B 是通过一次第一类初等行变换得到的，则

$\{\vec{A}_1, \cdots \vec{A}_m\} = \{\vec{B}_1, \cdots \vec{B}_m\}$

显然 $V_r(A) = V_r(B)$

如果 B 是通过一次第二类初等行变换得到的 则

$\vec{B}_j = \vec{A}_j + \lambda \vec{A}_i$，且 $\vec{B}_k = \vec{A}_k$, $k = 1, 2 \cdots j-1, j+1 \cdots m$

$B_j \in V_r(A)$, $\quad \vec{B}_1, \cdots \vec{B}_j, \cdots \vec{B}_m \in V_r(A)$

$\Rightarrow V_r(B) \subset V_r(A)$

$\vec{A}_j = \vec{B}_j - \lambda \vec{A}_i = \vec{B}_j - \lambda \vec{B}_i \quad (\because i \neq j)$

$\Rightarrow \vec{A}_j \in V_r(B) \Rightarrow \vec{A}_1, \cdots \vec{A}_j, \cdots \vec{A}_m \in V_r(B)$

$\Rightarrow V_r(A) \subset V_r(B) \Rightarrow V_r(A) = V_r(B)$

如果 B 是通过第3类初等变换得到的

则 $\vec{B}_j = \lambda \vec{A}_j$, $\vec{B}_k = \vec{A}_k$, $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$

$\vec{B}_j \in V_r(A)$, $\vec{A}_j = \frac{1}{\lambda}\vec{B}_j \in V_r(B)$ $(\lambda \neq 0)$

于是 $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m \in V_r(B)$
$\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_m \in V_r(A)$ $\Longrightarrow V_r(B) = V_r(A)$

$\boxed{}$

初等列变换

(i) $A = (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(i)}, \dots, \vec{A}^{(j)}, \dots, \vec{A}^{(n)})$

$\longrightarrow (\vec{A}^{(1)}, \dots, \underset{i}{\vec{A}^{(j)}}, \dots, \underset{j}{\vec{A}^{(i)}}, \dots, \vec{A}^{(n)})$

(ii) $A \longrightarrow (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(i)}, \dots, \vec{A}^{(j)} + \lambda \vec{A}^{(i)}, \dots, \vec{A}^{(n)})$

$i \neq j$. $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $A \rightarrow (\vec{A}^{(1)}, \dots, \lambda \vec{A}^{(j)}, \dots, \vec{A}^{(n)})$

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

引理2.2 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. B 是由 A 通过有限若干次初等列变换得到的矩阵.

则 $V_c(A) = V_c(B)$. 特别地

$$\dim V_c(A) = \dim V_c(B)$$

例: 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ & 0 & & & 0 & \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ 都不为零

证明 $\dim V_r(A) = \dim V_c(A) = r$

$$V_r(A) = \langle \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}, \dots, \vec{A}^{(m)} \rangle$$

$$= \langle \vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)} \rangle$$

若 $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \alpha_2 \vec{A}^{(2)} + \dots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} = \vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1 a_{11} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 a_{22} = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_r a_{rr} = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0$

于是 $\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$ 线性无关

$$\dim V_r(A) = r$$

由第二类列变换

$$A \to \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & & & \\ & & & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & & & 0 & & \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\to \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & a_{33} & a_{3r} & \cdots & a_{3n} \\ & & & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & & & & 0 & \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\to \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & & & & \\ & & & & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & & \end{pmatrix}}_{B}$$

$$V_c(B) = \langle \vec{B}^{(1)} \cdots \vec{B}^{(n)} \rangle = \langle \vec{B}^{(1)}, \cdots \vec{B}^{(r)} \rangle$$

$$\dim_c(B) = r$$

例 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & a_{1,j_1+1} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2,j_1+1} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & 0 & & \ddots & & & \\ & & & & & & a_{rj_r} & \cdots & a_{rn} \\ & & 0 & & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

$a_{1j}\neq 0$
$a_{2j_2}\neq 0$
a_r

证明 $\dim(V_r(A)) = \dim(V_c(A)) = r$

证：A 通过

例 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cancel{a_{1j}} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \cdots a_{2j_r} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & & & & a_{rj_r} & \cdots & a_{rn} \\ & & & & 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

其中 $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$. $a_{1j_1}\neq 0$, $a_{2j_2}\neq 0$, $\cdots a_{rj_r}\neq 0$

证明 $\dim V_r(A) = \dim V_c(A) = 0$

证 A 通过第一类和第三类列变换可变为

$$B = \begin{pmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_r} & \cdots & a_{1j_n} \\ 0 & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_r} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & 0 & \ddots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rj_n} \\ 0 & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

其中 $j_1, \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots n$ 的一个置换