由~~例★~~ 引理2.2

$$\dim V_c(A) = \dim V_c(B)$$

由 例★ $\dim_c(B) = r \Rightarrow \dim V_c(A) = \dim V_c(B) = r$ $\square$

§2.2 矩阵~~秩~~的秩

引理2.3 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，B 由 A 通过若干次初等行变换得到，则 $\dim V_c(B) = \dim V_c(A)$.

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(H) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$A \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (H_1) \begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

(H) 与 (H_1) 同解 等价

$$A \to \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 3+\lambda & 4+2\lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3+\lambda \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4+2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(H_2) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ (3\alpha_1 + 4\alpha_2) + \lambda(\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0 \end{cases}$$

(H) 与 (H_2) 同 等价

~~引理2.~~

$$A \to \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \neq 0$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \lambda \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(H_3) \begin{cases} \lambda(\alpha_1 + 2\alpha_2) = 0 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

(H) 与 (H_3) 等价

引理2.3的证明：　设 $n\in\{1,\dots,k\}$

设 $1\le j_1<\cdots<j_k\le n$

(H)：$\alpha_1\vec{A}^{(j_1)}+\cdots+\alpha_k\vec{A}^{(j_k)}=\vec{0}$

其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ 是未知数

情形1　A 通过调换 i、j 行得到 B

(H_1)：$\alpha_1\vec{B}^{(j_1)}+\cdots+\alpha_k\vec{B}^{(j_k)}=\vec{0}$

则 (H_1) 是由 (H) 通过调换第 i 个和第 j 个方程组得到．于是 (H) 与 (H_1) 等价

即 $\vec{A}^{(j_1)},\dots,\vec{A}^{(j_k)}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \vec{B}^{(j_1)},\dots,\vec{B}^{(j_k)}$ 线性无关

情形2　A 通过把第 i 行通乘入加到第 j 行得到 B

(H_2)：$\alpha_1\vec{B}^{(j_1)}+\cdots+\alpha_k\vec{B}^{(j_k)}=\vec{0}$

则 (H_2) 通过把第 i 个方程通乘入加到第 j 个方程

~~还是~~ 同样的推理可知 $\vec{A}^{(j_1)},\dots,\vec{A}^{(j_k)}$ 线性无关 $\Longleftrightarrow \vec{B}^{(j_1)},\dots,\vec{B}^{(j_k)}$ 无关．

关于第三类初等变换有同样的结果，

设 $\vec{A}^{(j_1)},\dots,\vec{A}^{(j_r)}$ 是 $\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(n)}$ 中的极大线性无关组．则 $\vec{B}^{(j_1)},\dots,\vec{B}^{(j_r)}$ 是 $\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(n)}$ 中的极大线性无关组

于是 $\dim V_c(A)=\dim V_c(B)$．$\boxtimes$

定理2.1　设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

则 $\dim V_r(A)=\dim V_c(A)$

证：由 Gauss 消去法．通过第1和2类初等行变换

A 变为阶梯型 B

由引理2.4, 2.3

$\dim V_r(A)=\dim V_r(B)$

$\dim V_c(A)=\dim V_c(B)$

由例 $\dim V_r(B) = \dim V_c(B)$

$\Longrightarrow \quad \dim V_r(A) = \dim V_c(A)$ $\square$

定义：设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. $\dim V_r(A)$ 称为 A 的秩，记为 $\mathrm{rank}(A)$.

例. 计算

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

的秩

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank}(A)=2$$

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank}(A)=2.$$

§2.3 秩与线性方程组

定理 2.2 设

$$(L) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

令 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

则 (L) 相容 $\Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

证 注意到 $V_c(A) \subset V_c(B)$

(2) 有解 $\Longleftrightarrow \exists\, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_n \vec{A}^{(n)} = \vec{b}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{b} \in V_c(A)$$

$$\Longleftrightarrow \quad V_c(A) = V_c(B)$$

$$\left(\begin{array}{l} V_c(A) \subset V_c(B) \quad \checkmark \\ V_c(A) \quad \vec{A}^{(1)}, \cdots, \vec{A}^{(n)}, \vec{b} \in V_c(A) \\ \qquad \Rightarrow V_c(B) \subset V_c(A) \end{array} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dim V_c(A) = \dim_c(B) \qquad (\text{命题}1.4)$$

$\boxtimes$

例：证明

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_1 = a_4 \end{cases}$$

有解 $\Longleftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{1 \quad -1 \quad 0 \quad 0}}^{A}} & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_1 + a_4 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a_1 + a_2 + a_4 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{array} \right)$$

$\mathrm{rank}(A) = 3$, $\mathrm{rank}(B) = 3 \Longleftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ $\boxtimes$

定理2.3 设

$$(L)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$

~~设(A)相容~~
~~设 A 是相容的，则~~ 则

(L) ~~会~~是确定的 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=n$

证："$\Rightarrow$" 令 $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

因为 A 是确定的，所以

$\exists!\ \alpha_1,\cdots\alpha_n\in\mathbb{R}$，使得

$\vec{b}=\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{A}^{(n)}$

假设 $\boxed{\vec{A}^{(1)}\cdots A}$ $\mathrm{rank}(A)<n$

则 $\vec{A}^{(1)},\cdots,\vec{A}^{(n)}$ 线性相关

于是 $\exists\ \beta_1,\cdots\beta_n\in\mathbb{R}$ 不全为零

使得

$\beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}=\vec{0}$

于是 $\vec{b}=(\alpha_1+\beta_1)\vec{A}^{(1)}+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)\vec{A}^{(n)}$

即 $\begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}$ 也是 (L) 的一组解．

且与 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 不同．矛盾

"$\Leftarrow$" 因为(A)相容，所以

$\exists\ \alpha_1,\cdots\alpha_n\in\mathbb{R}$．使得

$\vec{b}=\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots\vec{A}^{(n)}$

因为 $\mathrm{rank}(A)=n$，所以 $\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}$ 线性无关

~~所以~~ 由命题1.1(iv)．$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 是 (L) 的唯一解．□

推论2.1．设 (L) 中 $m=n$．则

(L) 确定 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=n$

证 "$\Rightarrow$" ~~显然~~ 定理2.3的直接推论

$\vec{b},\vec{A}^{(1)}\cdots\vec{A}^{(n)}\in\mathbb{R}^n$

"$\Leftarrow$" 于是 $\vec{A}^{(1)}\cdots\vec{A}^{(n)}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的

$\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}$ 线性无关．

一组基．于是 $\vec{b}\in\langle\vec{A}^{(1)},\cdots\vec{A}^{(n)}\rangle$，(L)相容

$\Rightarrow$ (L) 确定．

推论(2).2 若 $\vec{b}=\vec{0}$，则

(L) 只有平凡解 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A)=n$

证：此时 (L) 相容

其它由定理2.3得出