§6 矩阵的初等等价

注 由矩阵的求逆过程可知

任何可逆矩阵都是若干个初等矩阵之积. 由推论5.3可知

初等矩阵 ~~是若干~~ 之积必可以

例: 设 $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{E_{21}(-2)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-5&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{5})}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-3)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\0&1&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=E_{12}(-3)E_2(-\tfrac{1}{5})E_{21}(-2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{E_{12}}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&0&1\\1&3&1&0\end{array}\right) \quad ①$$

$$\xrightarrow{E_1(\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\1&3&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-1)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2(\frac{2}{5})}\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-\frac{1}{2})}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\0&1&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=E_{12}(-\tfrac{1}{2})E_2(\tfrac{2}{5})E_{21}(-1)E_1(\tfrac{1}{2})E_{12}.$$

定理 6.1 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. $\operatorname{rank}(A)=r$

则 $\exists\, P\in M_m,\ Q\in M_n$, P, ~~Q 都可逆~~

使得 $$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & O_{r\times(n-r)}\\ O_{(m-r)\times n} & O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}$$

证：由行的Gauss消去法可知 存在m阶可逆矩阵 P_1 使得

$$P_1A=\begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \bar a_{1j_1} & \cdots & \bar a_{1j_2} & \cdots & \bar a_{1j_r} & \cdots & \bar a_{1n} \\ \vdots & & 0 & \bar a_{2j_2} & \cdots & \bar a_{2j_r} & \cdots & \bar a_{2n} \\ & & & & \ddots & \bar a_{rj_r} & \cdots & \bar a_{rn} \\ 0\cdots 0 & & & O & & & & \end{pmatrix}$$

其中 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n$. $a_{j_1}\ne 0 \cdots a_{j_2}\ne 0 \cdots a_{j_r}\ne 0$

∃ m阶第三类~~矩阵~~初等矩阵之积 P_2，使得

$$P_2P_1A=\begin{pmatrix} 0\cdots 0 & 1 & \cdots & \tilde a_{1j_2} & \cdots & \tilde a_{1j_r} & \cdots & \tilde a_{1n} \\ 0 & & & 1 & & \tilde a_{2j_r} & \cdots & \tilde a_{2n} \\ & & & & \ddots & 1 & \cdots & \tilde a_{rn} \\ & & & O_{(m-r)\times n} & & & & \end{pmatrix}$$

j_1

∃ 第三类n阶初等矩阵之积 Q_1 使得

$$P_2P_1AQ_1=\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2r} & \cdots & b_{2n} \\ & O & & \ddots & 1 & b_{r\,r+1} & \cdots\ b_{rn} \\ & & & O & & & \end{pmatrix}$$

∃ n阶可逆矩阵 Q_2 使得

$$P_2P_1AQ_1Q_2=\begin{pmatrix} E_r & 0 & \cdots & 0 \\ O & 1 & 0\cdots & 0 \\ O & & O & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

令 $P=P_2P_1$, $Q=Q_1Q_2$ 即可. ▢

例 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. $\text{rank}(A)=r>0$

则 (i) A 可以写成 r 个秩为1的矩阵之和

(ii) ~~但~~ A 不可能写成 s(≤?) 个秩为1的矩阵之和，~~其中~~ $s<r$

证：由定理6.1 可知. $\exists P\in M_m,\ Q\in M_n$ ~~都可逆~~. 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

令 U_i 为在 i行 i列处为1, ~~其它处都为零~~ 的 $m\times n$ 阶矩阵，$i=1\cdots r$.

则 $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=U_1+U_2+\cdots+U_r$

且 $\text{rank}(U_i)=1$, $i=1\cdots r$

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}Q^{-1}=P^{-1}(U_1+\cdots+U_r)Q^{-1}$$

$$=\underbrace{P^{-1}U_1Q^{-1}}_{B_1}+\cdots+\underbrace{P^{-1}U_rQ^{-1}}_{B_r}.$$

则 $\operatorname{rank}(B_i)=1$, $i=1\cdots r$ （推论5.1） (i) 成立

~~证~~ (ii) 第八次作业习题2.

~~定理~~ 定义：设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 我们称 A, B 是初等等价的，记为 $\sim_e$.

如果存在 $P\in M_m(\mathbb{R})$ 可逆，$Q\in M_n(\mathbb{R})$ 可逆

使得

$$PAQ=B$$

验证：$\sim_e$ 是等价关系

$$E_m A E_n = A \Rightarrow \text{自反律成立}$$

设 $A\sim_e B$. 则存在可逆方阵 P, Q

使得 $PAQ=B$. 于是

$$A=P^{-1}BQ^{-1} \Rightarrow B\sim_e A$$

$\Rightarrow$ 对称律成立

设 $A\sim_e B$, $B\sim_e C$. 则存在可逆矩阵

P, Q, S, T 使得

$$A=PBQ \quad B=SCT.$$

则 $A=PSCTQ=(PS)C(TQ)$

于是 $A\sim_e C$. $\boxed{}$

由定理6.1 可知. 当 $\operatorname{rank}(A)=r$ 时

$$A\sim_e \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

于是 由传递律 $A\sim_e B \Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$

由此可得

推论 6.1 $\mathbb{R}^{m\times n}/\sim_e$ 共有 $\min(m,n)+1$ 个等价类

~~它们~~ 每个类所类中的矩阵的秩分别是

$0, 1, \cdots \min(m,n)$. $\boxed{}$

§7 仿射子空间，线性流形

回忆：设 $S\subset\mathbb{R}^n$, $S\neq\emptyset$, $\vec{v}_0\in\mathbb{R}^n$

$$\vec{v}_0+S=\{\vec{v}+\vec{v}_0 \mid \vec{v}\in S\}$$

称为 S 关于 $\vec{v}_0$ 的平移

当 S 是子空间时. $\vec{v}_0+S$ 称为仿射子空间或线性流形

引理7.1 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性流形

$$W=\vec{v}_1+V_1=\vec{v}_2+V_2$$

其中 $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in\mathbb{R}^n$，$V_1,V_2$ 是子空间 则

$$V_1=V_2 \text{ 且 } \vec{v}_1-\vec{v}_2\in V_1$$

证: ~~设 $\vec{u}_1\in V_1$ 则 $\vec{v}_1+\vec{u}_1\in W$ 于是存在 $\vec{u}_2\in V_2$ 使得~~

先证: $\vec{v}_1-\vec{v}_2\in V_1$

$\because \vec{0}\in V_2$, $\therefore \vec{v}_2\in W$. 于是 $\exists\, \vec{v}\in V_1$ 使得 $\vec{v}_2=\vec{v}_1+\vec{v}$. 于是 $\vec{v}_1-\vec{v}_2=-\vec{v}\in V_1$

再证: $\boxed{\cancel{V_1\subset V_2}}$ $V_2\subset V_1$

设 $\vec{u}_1\in V_1$. 则 $\vec{v}_1+\vec{u}_1\in W$

于是存在 $\vec{u}_2\in V_2$. 使得

$$\vec{v}_1+\vec{u}_1=\vec{v}_2+\vec{u}_2$$

于是 $\cancel{\vec{u}_1=-(\vec{v}_1-\vec{v}_2)+\vec{u}_2}$ $\vec{u}_2=(\vec{v}_1-\vec{v}_2)+\vec{u}_1\in V_2$

即 $V_1\subset V_2$

同理可证 $V_2\subset V_1$ □

定义: 设 W 是线性流形. 且

$$W=\vec{v}_0+V$$

其中 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中子空间. 称 V 是 W 的方向

$\dim W$ 定义为 $\dim V$.

特别地 当 $\dim W=1$ 时, 称 W 是 $\mathbb{R}^n$ 中直线

当 $\dim W=n-1$ 时. 称 W 是 $\mathbb{R}^n$ 超平面.

引理7.2 设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 是 真子空间

则 V 是某个齐次线性方程组的解.

证: ~~法1~~. 设 V 的一组基是 $\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d$

法1. 由基扩充定理.

$\mathbb{R}^n$ 有一组基 $\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d,\vec{b}_{d+1},\cdots\vec{b}_n$.

考虑 映射 $\varphi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$

$$\vec{x}=x_1\vec{b}_1+\cdots+x_n\vec{b}_n\longmapsto x_{d+1}\vec{b}_{d+1}+\cdots+x_n\vec{b}_n$$

可直接验证: φ 是线性映射. $\ker(\varphi)=V$

设 φ 在 标准基下的矩阵为 $A\in M_n$

则 $\ker(\varphi)$ 是 $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ 的 解空间. □

法2 $\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d$ 是行向量.

令 $B=(\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d)\subset\mathbb{R}^{n\times d}$ 且 $\operatorname{rank}(B)=d$

考虑方程组

$$B^t\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\vec{0}_d \text{ 的解空间 } U$$

则 $\dim U=n-d$. 设 $\vec{a}_{d+1},\cdots\vec{a}_n$ 是 U 的一组基. $A=(\vec{a}_{d+1},\cdots,\vec{a}_n)$ 是 $n\times(n-d)$ 的矩阵. 且 $\operatorname{rank}(A)=n-d$

$$B^tA=\underbrace{(\vec{0}_d,\cdots\vec{0}_d)}_{n-d}$$

于是 $A^tB=\underbrace{(\vec{0}_{n-d},\cdots\vec{0}_{n-d})}_{d}$

即 $\vec{b}_1,\cdots\vec{b}_d$ 是 $A^t\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\vec{0}_{n-d}$ (*) 的解

$\because \operatorname{rank}(A^t)=n-d$. (*) 的解空间的维数是 d 于是 V 是 (*) 的解空间 □

注. 由上述证明 (法2) 可知

当 $\dim V=d$ 时

V 是 $A_{(n-d)\times n}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\vec{0}_{n-d}$ 的解

且 $\dim A=n-d$

例 $d=0$ $x_1=0,\ \cdots,\ x_n=0$ $A=\begin{pmatrix}1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & 1\end{pmatrix}$

$d=n-1$ $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$, a_i不全为零

即过原点的超平面是一个齐次线性方程组的解

$d=1$. 过原点 $A\in\mathbb{R}^{(n-1)\times n}$ $\operatorname{rank}(A)=n-1$

即过原点的直线是 $n-1$ 个超平面的交.

定理6.1 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 中 d 维线性流形 且 ~~$W\subset$~~ $W\neq\mathbb{R}^n$. 设 $d=\dim W<n$

则 存在 $A\in\mathbb{R}^{(n-d)\times n}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$

使得 W 恰好是

$A\vec{x}=\vec{b}$ 的解的集合

且 $\operatorname{rank}(A)=n-d$.

证: 设 $W=\vec{v}_0+V$, 其中 $\vec{v}_0\in\mathbb{R}^n$, $V\subset\mathbb{R}^n$ 是子空间

由引理7.2及其证明可知:

$\exists\ A\in\mathbb{R}^{(n-d)\times n}$ 使得

$A\vec{x}=\vec{0}_n$ 的解空间是 V, 其中 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

且 $\operatorname{rank}(A)=n-d$. 设 $\vec{b}=A\vec{v}_0$. 考虑方程组

$A\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{v}_0$ 是其一个解

由命题4.3 $\quad W=\vec{v}_0+V$ 是该方程组解的集合.

∎

注: 超平面是一个线性方程的解集

直线是 $n-1$ 个线性方程的公共解集

即 $n-1$ 个超平面的交

例 设 $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $P_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. 求过 P_1,P_2,P_3 的平面方程

解: 设方程为 $ax+by+cz=d$

则 $\begin{cases}a=d\\ b=d\\ c=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-d=0\\ b-d=0\\ c-d=0\end{cases}$

该方程组的解空间是 $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

于是平面方程为 $x+y+z=1$.

例: 设 $P_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个不同点. 证明: 过 P_0P_1 的直线是参数方程

$$\begin{cases}x=x_0+(x_1-x_0)t\\ y=y_0+(y_1-y_0)t\\ z=z_0+(z_1-z_0)t\end{cases}$$

的轨迹.

证: 由定理7.1 $\exists\ A\in\mathbb{R}^{2\times3}$, $\vec{b}\in\mathbb{R}^2$

使得过 P_0P_1 的直线 L 是 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{b}$ 的解, 且 $\operatorname{rank}(A)=2$

于是 $A\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}=\vec{b}$, $A\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\vec{b}$. 由此可知

$A\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\\z_1-z_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 且 $\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\\z_1-z_0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

由此可知 $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$ 的解空间是 $\left\langle\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\\z_1-z_0\end{pmatrix}\right\rangle$

于是 $L=\left\{\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\\z_1-z_0\end{pmatrix}t\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$ ∎

例：设 $P_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ 求直线 P_0P_1 的参数方程，并把 P_0P_1 表示为两个超平面的交

解：直线方程为
$$\begin{cases} x=0+2t\\ y=1-t\\ z=0+3t \end{cases}$$

$\because$ $x=2t$，$\frac{x}{2}+y=1$，$\frac{3x}{2}-z=0$

直线方程为
$$\begin{cases} \frac{x}{2}+y=1\\ \frac{3x}{2}-z=0 \end{cases}$$

§8 矩阵分块

回忆：设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B\in\mathbb{R}^{s\times n}$

$C=AB$

设 $A=(a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m\\k=1,\dots,s}}$　$B=(b_{kj})_{\substack{k=1,\dots,s\\j=1,\dots,n}}$

$C=(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\j=1,\dots,n}}$

矩阵乘法

① $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{is}b_{sj}=\vec{A}_i\vec{B}^{(j)}$

② ~~有~~ $C=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ \vec{A}_mB\end{pmatrix}=(A\vec{B}^{(1)},\cdots,A\vec{B}^{(n)})$

③ 设 $B=(B_1,B_2)$，$B_1\in\mathbb{R}^{s\times t}$，$B_2\in\mathbb{R}^{s\times(n-t)}$

则 $C=AB=(AB_1,AB_2)$　(引理8.1)

④ 设 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$，$A_1\in\mathbb{R}^{t\times s}$，$A_2\in\mathbb{R}^{(m-t)\times s}$

则 $C=AB=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\end{pmatrix}$

验证：$C=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_t\\ \vec{A}_{t+1}\\ \vdots\\ \vec{A}_m\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}\vec{A}_1B\\ \vdots\\ \vec{A}_tB\\ \hline \vec{A}_{t+1}B\\ \vdots\\ \vec{A}_mB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1B\\A_2B\end{pmatrix}$

引理8.1. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$，$B\in\mathbb{R}^{s\times k}$

设 $A=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_p\end{pmatrix}$ 其中 A_i 是 s列的矩阵

$B=(B_1,\cdots B_q)$，B_j 是 s行的矩阵

则 $AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix} = (AB_1, \cdots, AB_q)$

证明：与引理8.1和规则4的证明类似

引理8.2 ~~设 假设与引理8.1相同~~

假设与引理8.1相同，则

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1, & \cdots & A_1B_q \\ & \cdots & \\ A_pB_1 & \cdots & A_pB_q \end{pmatrix}$$

证：$AB = (AB_1, \cdots, AB_q)$

$$= \left(\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} B_1, \cdots, \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} B_q \right) = \begin{pmatrix} A_1B_1 & \cdots & A_1B_q \\ \vdots & & \vdots \\ A_pB_1 & & A_pB_q \end{pmatrix}$$

引理8.3 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$，$B \in \mathbb{R}^{s\times n}$

设 $A = (A_1, \cdots, A_p)$，其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m\times s_i}$，$i=1,\cdots,p$

$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix}$，其中 $B_i \in \mathbb{R}^{s_i\times n}$ $i=1,\cdots,p$

$s_1 + s_2 + \cdots + s_p = s$

则 $AB = A_1B_1 + \cdots + A_pB_p$

证：令 $A = (a_{ik})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ k=1,\cdots,s}}$，$B = (b_{kj})_{\substack{k=1,\cdots,s \\ j=1,\cdots,n}}$

令 $l \in \{1, 2, \cdots, p\}$

$A_l = \left(a^{(l)}_{ik_l}\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ k_l=1,\cdots,s_l}}$ $B_l = \left(b^{(l)}_{k_l j}\right)_{\substack{k_l=1,\cdots,s_l \\ j=1,\cdots,n}}$

令 $t_0 = 0$，$t_l = s_1 + \cdots + s_l$，$l = 1, 2, \cdots, p$

则 $t_p = s_1 + \cdots + s_p = s$

我们有

$a^{(l)}_{ik_l} = a_{i,\, t_{l-1}+k_l}$，$b^{(l)}_{k_l, j} = b_{t_{l-1}+k_l,\, j}$

设 $C = AB = (c_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$

$C_l = A_l B_l \left(c^{(l)}_{ij}\right)_{\substack{i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n}}$

定理的结论等价于

$$C = C_1 + \cdots + C_l$$

即 $c_{ij} = c^{(1)}_{ij} + \cdots + c^{(l)}_{ij}$.

$$c_{ij}^{(l)} = \sum_{k_q=1}^{s_q} a_{ik_q}^{(l)} b_{k_q j}^{(l)} = \sum_{k_q=1}^{s_q} a_{i,t_{q-1}+k_q} b_{t_{q-1}+k_q,j}$$

$$= \sum_{k=t_{q-1}+1}^{t_q} a_{ik} b_{kj}$$

$$\sum_{l=1}^{p} c_{ij}^{(l)} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=t_{q-1}+1}^{t_q} a_{ik} b_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{t_p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} = c_{ij} \quad \boxed{}$$

定理8.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$，$B \in \mathbb{R}^{s\times n}$

把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ & \cdots & & \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kp} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{iq} \in \mathbb{R}^{m_i \times s_q}$　$i=1,\cdots k,\ q=1,\cdots p$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1l} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2l} \\ & \cdots & & \\ B_{p1} & B_{p2} & \cdots & B_{pl} \end{pmatrix} \quad B_{qj} \in \mathbb{R}^{s_q \times n_j}$$

$q=1,\cdots p$
$j=1,\cdots,l.$

则 $AB = \left(\sum_{q=1}^{p} A_{iq} B_{qj} \right)_{\substack{i=1,\cdots,k \\ j=1,\cdots l}}.$

证：设 $A_i = (A_{i1}, A_{i2}, \cdots A_{ip})$

$\cancel{A}$　　$B_j = \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{pj} \end{pmatrix}$

$i=1,\cdots k,\quad j=1,\cdots l$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \end{pmatrix} (B_1 \cdots B_l)$$

$$= (A_i B_j)_{\substack{i=1,\cdots k \\ j=1\cdots l}} \quad \text{(引理8.2)}$$

$$A_i B_j = (A_{i1}, \cdots A_{ip}) \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{pj} \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{p} A_{iq} B_{qj}$$

(引理8.3) $\boxed{}$

例：设 $U, V, A, B, C, D \in M_n$

计算 $\begin{pmatrix} U & O \\ O & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 和

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & O \\ O & V \end{pmatrix}$

和 $\begin{pmatrix} U & O \\ O & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} UA & UB \\ VC & VD \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & O \\ O & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AU & BV \\ CU & DV \end{pmatrix}$

应用　利用分块矩阵证明矩阵秩的(不)等式

引理8.4. 设 $\vec{u}_1, \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k \in \mathbb{R}^l$

其 $\vec{u}_i$ 由 $\vec{v}_i$ 的第 $j_1, j_2, \cdots j_l$ 个~~坐标~~组成

$(j_1 < j_2 < \cdots < j_l)$

则 (i) $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k$ 线性相关. 则 $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k$ 线性相关

(ii) $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k$ 线性无关. 则 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k$ 线性无关

证: (i) 设 $\alpha_1 \ldots \alpha_k \in \mathbb{R}$. 不全为零且

$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}_n$

则 $\alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}_l$.

(ii) (i) 的逆否命题

推论8.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, B是A中第 $i_1, \cdots i_k$ 行 $j_1, \cdots j_l$ 列组成的子矩阵. 则 $\operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(B)$.

引理8.5 设 $\vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k \in \mathbb{R}^m$, $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$

设 $\vec{u}_i' = \begin{pmatrix} \vec{u}_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big\}n$　$i = 1, \cdots k$

$\vec{u}_i'' = \begin{pmatrix} \vec{u}_i \\ \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{pmatrix}$, $\alpha_{i1}, \cdots \alpha_{in} \in \mathbb{R}$

设 $\vec{v}_i' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vec{v}_i \end{pmatrix} \Big\}m$, $\vec{v}_i'' = \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \vdots \\ \beta_{im} \\ \vec{v}_i \end{pmatrix}$. $\beta_{i1}, \cdots \beta_{im} \in \mathbb{R}$

$i = 1, \cdots k$

~~则 (i) $\dim\langle \vec{u}_1', \cdots \vec{u}_k', \vec{v}_1', \cdots \vec{v}_k' \rangle = \dim\langle \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k \rangle + \dim\langle$~~

设 $U = \langle \vec{u}_1, \cdots \vec{u}_k \rangle$, $V = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k \rangle$

$U' = \langle \vec{u}_1', \cdots \vec{u}_k' \rangle$　$V' = \langle \vec{v}_1', \cdots \vec{v}_k' \rangle$

$U'' = \langle \vec{u}_1'', \cdots \vec{u}_k'' \rangle$　$V'' = \langle \vec{v}_1'', \cdots \vec{v}_k'' \rangle$

则　$\dim(U' + V') = \dim U + \dim V$

$\dim(U' + V'') \geq \dim U + \dim V$

$\dim(U'' + V') \geq \dim U + \dim V$

证：(i) 注意到 $\dim U = \dim U'$, $\dim V = \dim V'$

$\because$ $U' \cap V' = \{\vec{0}_{m+n}\}$

$\therefore$ $\dim(U'+V') = \dim U' + \dim V'$ (维数公式)

$= \dim U + \dim V$

(ii) 设 $\vec{b}_1, \cdots \vec{b}_d$ 是 U 的基 $\vec{c}_1, \cdots \vec{c}_e$ 是 V 的基

$$\vec{b}_i'' = \begin{pmatrix} \vec{b}_i \\ \alpha_{i1} \\ \vdots \\ \alpha_{in} \end{pmatrix} \quad i=1, \cdots k. \quad \vec{c}_i' = \begin{pmatrix} \vec{0}_m \\ \vec{c}_i \end{pmatrix}, \ i=1, \cdots k$$

则 $\vec{b}_1'', \cdots \vec{b}_d'', \ \vec{c}_1', \cdots \vec{c}_e' \in U''+V'$

设 $\lambda_1, \cdots \lambda_d, \mu_1 \cdots \mu_e \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lambda_1 \vec{b}_1'' + \cdots + \lambda_d \vec{b}_d'' + \mu_1 \vec{c}_1' + \cdots + \mu_e \vec{c}_e' = \vec{0}_{m+n}$$

则 $\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_d \vec{b}_d = \vec{0}_m \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0$

于是 $\mu_1 \vec{c}_1' + \cdots + \mu_e \vec{c}_e' = \vec{0}_{m+n}$

$\Rightarrow \mu_1 \vec{c}_1 + \cdots + \mu_e \vec{e}_e = \vec{0}_n$

$\Rightarrow \mu_1 = \cdots = \mu_e = 0$

由此可知 $\vec{b}_1'', \cdots \vec{b}_d'', \vec{c}_1', \cdots \vec{e}_e'$ 线性无关

于是 $\dim(U''+V') \geq d+e = \dim(U) + \dim(V)$ □

推论8.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, B 是 A 中第 $i_1, \cdots i_k$ 行和 $j_1 \cdots j_k$ 列组成的子矩阵. 则

$$\operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(B)$$

证：由引理8.1直接可得

推论8.2 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k+l}$

$C \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $D \in \mathbb{R}^{k \times n}$

则 (i) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

(ii) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

(iii) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

(iv) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

(v) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$

(vi) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & A \\ B & D \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

例：设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 证明

$$\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

证：设 $P_0 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}_{2m\times 2n}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} E_m & O \\ E_m & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} A & O \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & O \\ E_m & E_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ A+B & B \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(P_0) \geqslant \operatorname{rank}(P_2) \geqslant \operatorname{rank}(A+B)$$

$$\operatorname{rank}(P_0) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \qquad \boxed{}$$

例 设 $A, B \in M_n$ ~~$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A \in$~~

证明 $\operatorname{rank}(E_m - AB) \le \operatorname{rank}(E_n - A) + \operatorname{rank}(E_n - B)$

证：

$$P_0 = \begin{pmatrix} E_n - A & O \\ O & E_n - B \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} E_n & O \\ E_n & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n - A & O \\ O & E_n - B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_n - A & O \\ E_n - A & E_n - B \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 \begin{pmatrix} E_n & B \\ E_n & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_n - A & O \\ E_n - A & E_n - B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & B \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_n - A & B - AB \\ E_n - A & E_n - AB \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rank}(E_n - AB) \le \operatorname{rank}(P_2) \le \operatorname{rank}(P_0) \le \operatorname{rank}(E_n - A) + \operatorname{rank}(E_n - B)$$

例：设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$

证明 $\operatorname{rank}(AB) \geqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - s$

证：

$$P_0 = \begin{pmatrix} E_s & O \\ O & AB \end{pmatrix}_{(m+s)\times(n+s)}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} E_s & O \\ A & E_m \end{pmatrix} P_0 = \begin{pmatrix} E_s & O \\ A & E_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & O \\ O & AB \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_s & O \\ A & AB \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 \begin{pmatrix} E_s & -B \\ A & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & O \\ A & AB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & -B \\ O & E_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_s & -B \\ A & O \end{pmatrix}$$

$$s + \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(P_0) \geqslant \operatorname{rank}(P_2) \geqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \qquad \boxed{}$$