§4.4 线性方程组 (revisited)

设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2m} \\ & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

(L) $A\vec{x} = \vec{b}$

(H) $A\vec{x} = \vec{0}_m$

记号 设 $S \subset \mathbb{R}^n$. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{v} + S = \{\vec{v} + \vec{w} \mid \vec{w} \in S\}$$

称为 S 关于 $\vec{v}$ 的平移

命题 4.3 设 V_H 是 $A\vec{x} = \vec{0}_m$ 的解的集合. V_L 是 $A\vec{x} = \vec{b}$ 的解的集合.

则 (i) V_H 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间

(ii) 如果 $\vec{v}_0 \in V_L$. 则 $V_L = \vec{v}_0 + V_H$

证: 设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V_H$. $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = \alpha_1 A\vec{v}_1 + \alpha_2 A\vec{v}_2 = \alpha_1 \vec{0}_m + \alpha_2 \vec{0}_m = \vec{0}_m$$

于是 $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 \in V_H$. 即 V_H 是子空间

$\forall \vec{w} \in \vec{v}_0 + V_H$. $\exists \vec{v} \in V_H$ 使得

$$\vec{w} = \vec{v}_0 + \vec{v}$$

$$A\vec{w} = A(\vec{v}_0 + \vec{v}) = A\vec{v}_0 + A\vec{v} = \vec{b} + \vec{0}_m = \vec{b}$$ 于是 $\vec{w} \in V_L$

即 $\vec{v}_0 + V_H \subset V_L$

反之 设 $\vec{u} \in V_L$

$$A(\vec{u} - \vec{v}_0) = A\vec{u} - A\vec{v}_0 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}_m$$

所以 $\vec{u} - \vec{v}_0 \in V_H$ 且 ~~$\vec{u} - \vec{v}_0 \in$~~ $\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{u} - \vec{v}_0$

$\Rightarrow \vec{u} \in \vec{v}_0 + V_H \Rightarrow V_L \subset \vec{v}_0 + V_H$. ∎

(L) ~~的~~相容 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|\vec{b})$ } 定理2.3

(L) 确定 $\Longleftrightarrow$ (L) 相容且 $\mathrm{rank}(A) = n$ 推论2.2

(H) 有非平凡解 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) < n$

定理3.3

$\dim V_H + \mathrm{rank}(A) = n$

§5 方阵

§5.1 方阵的代数运算

记 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 $M_n(\mathbb{R})$

设 $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$

加法：$A+B=B+A$

$A+(B+C)=(A+B)+C$

$A+O_{n\times n}=A$

$A+(-A)=O_{n\times n}$

乘法：$A(BC)=(AB)C$

$AE_n=E_nA=A$

分配律 $A(B+C)=AB+AC$

$(B+C)A=BA+CA$

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$A(\alpha B)=(\alpha A)B=\alpha(AB)$

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

为此 我们称 $M_n(\mathbb{R})$ 是一个代数

注：当只考虑加法和乘法时
$M_n(\mathbb{R})$ 称为（非交换环）

例：设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

展开 $(AB)^2$，$(A+B)^2$ $(A+B)(A-B)$

(1) $(AB)^2=(AB)(AB)=ABAB$

(2) $(A+B)^2=(A+B)(A+B)$

$=A(A+B)+B(A+B)$

$=A^2+AB+BA+B^2$

(3) $(A+B)(A-B)$

$=A(A-B)+B(A-B)$

$=A^2+A(-B)+BA+B(-B)$

$=A^2-AB+BA-B^2$

注 当 $AB=BA$ 时

$(AB)^2=A^2B^2$ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

例：设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

证明 (i) $A^n = A^{n-2} + A^2 - E \quad (n \geq 3)$

(ii) 计算 A^{100}

证：(i) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + A^2 - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A^3$$

$n=3$ 时 (i) 成立

设 n 时 (i) 成立

$$A^{n+1} = AA^n$$
$$= A(A^{n-2} + A^2 - E)$$
$$= A^{n-1} + A^3 - A = A^{n-1} + A + A^2 - E - A$$
$$= A^{n-1} + A^2 - E = A^{(n+1)-2} + A^2 - E$$

由于当 (i) 成立

$$A^{100} = A^{98} + A^2 - E = (A^{96} + A^2 - E) + (A^2 - E)$$
$$\cancel{= \cdots = 50(A^2 - E)}$$
$$= A^2 + 49(A^2 - E) = 50A^2 - 49E$$
$$= \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 \\ 50 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§5.2 $M_n(\mathbb{R})$ 的中心:

为简单 $M_n(\mathbb{R})$ 记为 M_n

定义: M_n 的中心是指

$$C_{M_n} = \{ M \in M_n \mid \forall A \in M_n \ AM = MA \}$$

例: $O_{n\times n}$, $E_n \in C_{M_n}$

定理 5.1 $M \in C_{M_n} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$, $M = \alpha E_n$

注: 称 αE_n 为数乘矩阵.

证: "$\Leftarrow$" 设 $A \in M_n$

$$M(\alpha E_n) = \alpha(ME_n) = \alpha M$$

$$(\alpha E_n)M = \alpha(E_n M) = \alpha M$$

于是 $M \in C_{M_n}$

"$\Rightarrow$" 设 $M \in C_{M_n}$

设 L_{ij} 为 n 阶方阵. 在 i 行 j 列处的元素是 1, 其它处元素是 0.

$i=1,\cdots,n$. $j=1,\cdots,n$

设 $M = (m_{ij})_{\substack{i=1,\cdots,n \\ j=1,\cdots,n}}$ 则

$$E_{ij}M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} O_{1\times n} \\ \vdots \\ O_{1\times n} \\ \vec{M_j} \\ O_{1\times n} \\ \vdots \\ O_{1\times n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ - \ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$ME_{ij} = \begin{array}{cccccc} (\vec{O}_n, & \cdots & \vec{O}_n & \vec{M}^{(i)}, & \vec{O}_n, \cdots & \vec{O}_n) \\ & & & j & & \end{array}$$

$ME_{ij} = E_{ij}M \Rightarrow m_{ki} = 0 \quad k \neq i$

且 $m_{ii} = m_{jj}$ $\quad k=1,\cdots,n$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,n$

令 $\alpha = m_{11}$. 则 $M = \begin{pmatrix} \alpha & & O \\ & \alpha & \\ O & & \alpha \end{pmatrix} = \alpha E_n$ $\boxed{\square}$

例 计算 设 $A \in M_n$. $\alpha \in \mathbb{R}$. 展开

$$(A - \alpha E_n)^3$$

$$= A^3 - 3\alpha A^2 + 3\alpha^2 A - \alpha^3 E_n$$

§5.3 可逆元

设 $A\in M_n$. 如果存在 $B\in M_n$, 使得

$$AB=BA=E_n$$

则称 A 是可逆元, B 称为 A 的一个逆元.

例 E_n 可逆. $O_{n\times n}$ 不可逆.

注: 逆元的唯一性.

设 A 是可逆元, B, C 是 A 的逆

$AB=E_n \Rightarrow C(AB)=CE_n=C$

$\Rightarrow (CA)B=C \Rightarrow E_nB=C \Rightarrow B=C$.

记号 A 是逆元 记为 A^{-1}

定理5.2 $A\in M_n$ 可逆 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A)=n$

证: 法1 设 $\varphi_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是以 A 为矩阵表示的线性映射

"$\Rightarrow$" 设 A 可逆. 则 $A^{-1}\in M_n$.

令 $\varphi_{A^{-1}}$ 是以 A^{-1} 为矩阵表示的线性映射

则 $\varphi_A\circ\varphi_{A^{-1}}=\varphi_{AA^{-1}}=\varphi_{E_n}$

同理 $\varphi_{A^{-1}}\circ\varphi_A=\varphi_{E_n}$

因为 φ_{E_n} 是恒同映射. 所以

φ_A 可逆. 特别地

φ_A 是满射. 即 $\dim(\operatorname{im}(\varphi_A))=n$

于是 $\operatorname{rank}(A)=n$.

断言: 如果 φ_A 是双射. 则 φ_A^{-1} 也是线性映射.

断言的证明: 设 $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{y}\in\mathbb{R}^n$

$\exists\, \vec{u}, \vec{v}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\varphi_A(\vec{u})=\vec{x}$, $\varphi_A(\vec{v})=\vec{y}$

$\varphi_A(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$ ($\because \varphi_A$ 线性)

$\varphi_A^{-1}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\alpha\varphi_A^{-1}(\vec{x})+\beta\varphi_A^{-1}(\vec{y})$

于是 φ_A^{-1} 是线性的. 断言成立

"$\Leftarrow$" 设 $\text{rank}(A)=n$

则 $\text{im}(\varphi_A)$ 的维数是 n

又 $\text{im}(\varphi_A) \subset \mathbb{R}^n$

所以 $\text{im}(\varphi_A) = \mathbb{R}^n$

于是 φ_A 是满射. 由推论 3.2

φ_A 是双射. 由此意. φ_A^{-1} 的逆映射

也是线性映射 记为 φ_B, 其中 $B \in M_n$

的这子逆的矩阵. 则

$$id_{\mathbb{R}^n} = \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$$
$$\parallel$$
$$\varphi_{E_n}$$

于是 $AB=E_n$
(定理3.2)

同理 $BA = E_n$ 于是 A 可逆

<u>法2</u> "$\Leftarrow$" 设 $\text{rank}(A)=n$

则 $\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$ 是 $\mathbb{R}^{(n)}$ 的一组基

$$\vec{e}^{(j)} = \alpha_{1j}\vec{A}^{(1)} + \alpha_{2j}\vec{A}^{(2)} + \dots + \alpha_{nj}\vec{A}^{(n)}$$

其中 $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots \alpha_{nj} \in \mathbb{R}$
$j=1,2,\dots n$

$$E_n = (\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \dots, \vec{e}^{(n)})$$
$$= (\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{B}$$

$$= AB$$

因为 $\text{rank}(A)=n$, 所以 $\text{rank}(A^t)=n$

由上述推理 $\exists\, C \in M_n$ 使得

$$A^t C = E_n$$

于是 $C^t A = E_n$

$$C^t AB = B \Rightarrow C^t E_n = B \Rightarrow C^t = B$$

于是 $BA = E_n$. 即 A 可逆.

"$\Rightarrow$" 设 A 可逆. 则 $\exists\, B \in M_n$ 使得

$$AB = E_n$$

$\text{rank}(AB) = n \leq$ ~~Main(~~ $\text{rank}(A) \leq n$
定理4.7

于是 $\text{rank}(A)=n$ $\boxtimes$

术语：~~A~~ 设 $A \in M_n$. 如果 $\mathrm{rank}(A)=n$

则称 A 是满秩的，（非奇异的，可逆的）（~~退化~~ 非退化）

full rank nonsingular invertible

当 $\mathrm{rank}(A)<n$ 亏秩的，（奇异的，不可逆的）（退化）

defective singular non-invertible

推论5.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in M_m$, $C \in M_n$

如果 B, C 都满秩，则

$$\mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(A), \quad \mathrm{rank}(AC)=\mathrm{rank}(A)$$

证：由定理4.1 (i), $\mathrm{rank}(BA) \leqslant \mathrm{rank}(A)$

$$A = E_m A = B^{-1}BA = B^{-1}BA$$

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B^{-1}(BA)) \leqslant \mathrm{rank}(BA)$$

（定理4.1 (i)）

于是 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(BA)$

同理（或用转置）可证

$$\mathrm{rank}(AC)=\mathrm{rank}(A) \quad \square$$

推论5.2 设 $A, B \in M_n$ 如果 $AB=E_n$

或 $BA=E_n$. 则 A 可逆且 $A^{-1}=B$

证：设 $AB=E_n$

则 $\mathrm{rank}(A) \geqslant \mathrm{rank}(E_n)=n \Rightarrow \mathrm{rank}(A)=n$

于是 ~~rank~~ A 可逆（定理5.1）$\square$

同理 $BA=E_n \Rightarrow A$ 可逆.

推论5.3 设 $A_1, \cdots, A_k \in M_n$. 都可逆

则 $A_1, \cdots A_k$ 也可逆且

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

证：由定理5.1 $\mathrm{rank}(A_i)=n$, $i=1 \cdots k$

由推论5.1 $\mathrm{rank}(A_1 \cdots A_k) = n$

$$(A_1 \cdots A_k)(A_k^{-1} \cdots A_1^{-1})$$

$$=(A_1 \cdots A_{k-1})(A_k A_k^{-1})(A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1})$$

$$=(A_1 \cdots A_{k-1})\, E_n\, (A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1})$$

$$=(A_1 \cdots A_{k-1})(A_{k-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}) \quad \text{（再用归纳法）}$$

$$=E$$

由推论5.2 $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1} \quad \square$

建议：利用线性映射的语言 证明上述推论.

推论5.4 设 $A\in M_n$ 可逆，则 A^t 也可逆且 $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

证：A可逆 $\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=n \Rightarrow \operatorname{rank}(A^t)=n$

$\Rightarrow A^t$ 可逆 （定理5.2）

例，设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\end{pmatrix}$ 证明 A可逆 $\Leftrightarrow \alpha_1,\dots,\alpha_n$ 都不等于零. 此时 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1}\end{pmatrix}$

证：A可逆 $\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=n \Rightarrow \alpha_1\neq0,\dots,\alpha_n\neq 0$

反之. 设 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^{-1}\end{pmatrix}$ $AB=E$. ∎

定义. 设 $A\in M_n$ 如果存在 $k\in\mathbb{Z}^+$，使得

$$A^k=O_{n\times n}$$

则称 A 是幂零矩阵

例 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

例：证明幂零矩阵一定不可逆

证：假设A可逆 $A^{-1}A^k=O_{n\times n}\Rightarrow A^{k-1}=O_{n\times n}$

$\cdots \Rightarrow A=O_{n\times n}$ $\rightarrow\leftarrow$

例 ~~幂~~ ~~定义~~. 设 $A\in M_n$. ~~如果存在 $k\in\mathbb{Z}^+$~~，$A^2=A$

~~证明 A可逆 $\Leftrightarrow A=E$~~

~~证：$\Leftarrow$ 显然~~

~~$\Rightarrow A=A^{-1}A=E$~~

例 设 $A\in M_n$. ~~且 $\exists k\in\mathbb{Z}^+$~~. $A^k=A$（幂等阵）

证明 A可逆 $\Leftrightarrow A=E$

证 "$\Leftarrow$" 显然.

"$\Rightarrow$" 设A可逆. $A^k=A\Rightarrow A^{k-1}(A-E)=O$

因为 $\operatorname{rank}(A)=n$，thus $\operatorname{rank}(A^{k-1})=n$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A-E)=0$ （推论5-1

$\Rightarrow A-E=O$ ∎

例 设 $A,B,C\in M_n$. $AB=AC$

如果A可逆，则 $B=C$.

证：$A^{-1}AB=A^{-1}AC \Rightarrow B=C$ ∎

§5.4 初等矩阵

定义. 设 $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$. $E_{ij}^{(n)}\in M_n$ 是把 E_n 中 i行与j行互换得到的矩阵，则称 $E_{ij}^{(n)}$ 为第一类初等矩阵

命题5-1. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，则

(1) $E_{ij}^{(m)}=\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_j\\ \vdots\\ A_i\\ \vdots\\ A_m\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -i\\ \\ -j\\ \\ \\ \end{matrix}$.

(ii) $AE_{ij}^{(n)}=(\vec{A}^{(1)},\dots,\underset{i}{\vec{A}^{(j)}},\dots,\underset{j}{\vec{A}^{(i)}},\dots,\vec{A}^{(n)})$

证：(i) 当 $k\notin\{i,j\}$ 时

$E_{ij}^{(m)}A$ 的第 k 行与 E_mA 的第 k 行一样

于是它是 $\vec{A}^{(k)}$　　$E_{ij}^{*}=E-L_{ii}-L_{jj}+L_{ij}+L_{ji}$

$E_{ij}^{(m)}A$ 的第 i 行与 E_mA 的第 j 行一样

于是它是 $\vec{A}^{(j)}$

同理 $E_{ij}^{(m)}A$ 的第 j 行是 $\vec{A}^{(i)}$

(ii) 当 $k\notin\{i,j\}$ 时

$AE_{ij}^{(n)}$ 的第 k 列是 $A\vec{e}^{(k)}=\vec{A}^{(k)}$

$AE_{ij}^{(n)}$ …第 i 列是 $A\vec{e}^{(j)}=\vec{A}^{(j)}$

$AE_{ij}^{(n)}$ …第 j 列是 $A\vec{e}^{(i)}=\vec{A}^{(i)}$

$\boxtimes$

推论5.5 $E_{ij}^{(n)}$ 可逆.

证：$E_{ij}^{(n)}\cdot E_{ij}^{(n)}=E_n$.

~~定义 设 A~~

定义 设 $\lambda\in\mathbb{R}$，$i,j\in\{1,\dots,n\}$，$i\neq j$

$E_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 是把 E_n 的第 j 行乘以 λ 加到第 i 行上得到的 n 阶方阵，称为第三类初等矩阵

注：$E_{ij}^{(n)}(\lambda)$ 也可以通过把 E_n 的第 i 列乘 λ 加到第 j 列得到.

命题5.2 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

(i) $E_{ij}^{(m)}A=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vec{A}_i+\lambda\vec{A}_j\\ \vec{A}_j\\ \vec{A}_m\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -i\\ -j\\ \\ \end{matrix}$

(ii) $AE_{ij}^{(m)}=(\vec{A}^{(1)},\dots,\underset{i}{\vec{A}^{(i)}},\dots,\underset{j}{\vec{A}^{(j)}+\lambda\vec{A}^{(i)}},\dots,\vec{A}^{(n)})$

证：$E_{ij}^{(m)}=E_m+\lambda L_{ij}^{(m)}$　（其中 $L_{ij}^{(m)}$ 是在 ij 处元素为1，其它为零的 m 阶方阵.）

$$E^{(m)}_{ij}(\lambda)A=\left(E_m+\lambda L^{(m)}_{ij}\right)A$$
$$=A+\lambda L^{(m)}_{ij}A=A+\lambda\begin{pmatrix}0_{1\times n}\\ \vdots\\ 0_{1\times n}\\ \vec{A}_j\\ 0_{1\times n}\\ \vdots\\ 0_{1\times n}\end{pmatrix}\text{---}\ i$$
$$=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_{i-1}\\ \vec{A}_i+\lambda\vec{A}_j\\ \vec{A}_{i+1}\\ \vdots\\ \vec{A}_m\end{pmatrix}$$

(ii) $$AE^{(n)}_{ij}(\lambda)=A\left(E_n+\lambda L^{(m)}_{ij}\right)$$
$$=A+\lambda A L^{(n)}_{ij}=A+\lambda(\vec{0}_n,\dots,\vec{0}_n,\underset{\underset{j}{\vdots}}{\vec{A}^{(i)}},\vec{0}_n,\dots,\vec{0}_n)$$
$$=(\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(j-1)},\vec{A}^{(j)}+\lambda\vec{A}^{(i)},\vec{A}^{(j+1)},\dots,\vec{A}^{(n)})$$ ☒

推论5.6 $E^{(n)}_{ij}(\lambda)$ 可逆

证 $E^{(n)}_{ij}(\lambda)E^{(n)}_{ij}(-\lambda)=E_n$.

定义：设 $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，$i\in\{1,\dots,n\}$

$$E^{(n)}_i(\lambda)\ \cancel{是}=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1,\lambda,1,\dots,1}_{n})$$

称为第三类初等矩阵

注 $E^{(n)}_i(\lambda)$ 是可逆矩阵

注 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$

$$E^{(m)}_i A\ \cancel{把i行}=\begin{pmatrix}\vec{A}_1\\ \vdots\\ \vec{A}_{i-1}\\ \lambda\vec{A}_i\\ \vec{A}_{i+1}\\ \vdots\\ \vec{A}_m\end{pmatrix}$$

$$AE^{(n)}_i=(\vec{A}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(i-1)},\lambda\vec{A}^{(i)},\vec{A}^{(i+1)},\dots,\vec{A}^{(n)})$$

(请回见第3节对角矩阵相乘的例子).

于是由 Gauss 消去法可知.

定理5.3 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 存在 m阶初等矩阵 $P_1,\dots,P_k$ 使得

$P_k\cdots P_2P_1A$ 为阶梯型

证 由命题5.1, 5.2 可得 ☒

定理5.4 设 $A \in M_n$ 则

A 可逆 $\Longleftrightarrow$ 存在n阶初等矩阵 $P_1 \cdots P_k$

使得

$$P_k \cdots P_1 A = E$$

<u>证:</u> "$\Leftarrow$" 设 $P = P_k \cdots P_1$ 则 $PA = E$

由推论5.2 A 可逆

"$\Rightarrow$" 由定理5.3 存在初等矩阵 $P_1 \cdots P_l$

使得

$B = P_l \cdots P_1 A$ 且 B 是阶梯型

因为 $P_l, \cdots P_1$ 都可逆. 所以

$$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A) = n$$

(推论5.1)

于是 B 不可能有一行全是 0. 又因为

B是方阵.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & O & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $b_{11}, b_{22}, \cdots b_{nn}$ 都不是零

从而 ∃ 第3类初等矩阵 $P_s \cdots P_{l+1}$ 使得

$$P_s \cdots P_{l+1} P_l \cdots P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{1n} \\ & 1 & c_{23} \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

∃ $P_k, \cdots P_{s+1}$ 初等矩阵

$$P_k \cdots P_{s+1} P_s \cdots P_{l+1} P_l \cdots P_1 A = E_n$$ ▨

§5.5 矩阵求逆

设 $A \in M_n$ 判定 A 是否可逆. 如果可逆

求 A^{-1}

引理5.1 设 $B \in \mathbb{R}^{n \times s}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times t}$

$M = (B, C) \in \mathbb{R}^{n \times (s+t)}$ 由 B, C

拼成. 设 ~~$P \in M_n$~~ $Q \in \mathbb{R}^{k \times n}$

则 $QM = (QB, QC)$

证: $QM = Q(\vec{M}^{(1)}, \cdots \vec{M}^{(s)}, \vec{M}^{(s+1)}, \cdots \vec{M}^{(s+t)})$

$= (Q\vec{M}^{(1)}, \cdots Q\vec{M}^{(s)}, Q\vec{M}^{(s+1)}, \cdots Q\vec{M}^{(s+t)})$

$= (Q\vec{B}^{(1)}, \cdots Q\vec{B}^{(s)}, Q\vec{C}^{(1)}, \cdots Q\vec{C}^{(t)})$

$= (QB, QC).$

求逆方法：设 $A\in\mathbb{R}^n$ 求 A^{-1}

设 $B=(A, E_n)\in\mathbb{R}^{n\times(2n)}$

由定理5.4 ∃ 初等矩阵 P. 使得

$$PA=E_n \quad 于是 \quad P=A^{-1}$$

于是 $PB=(PA, P)=(E_n, A^{-1})$

换言之：~~把~~ 通过初等行变换把

B的前n列组成的 ~~矩阵~~ n阶方阵化为 E_n 时

后n列组成的 ~~矩阵~~ n阶方阵必然是 A^{-1}

如果在初等行变换过程中得出B的前n阶

方阵奇异，则A不可逆

例：$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$ 求 A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{21}(-2)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-5&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_2(-\frac{1}{5})}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{12}(-3)}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\0&1&\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}\end{pmatrix}$$

验证：$\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{-1}{5}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad ✓$$

例：$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

计算 A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

~~求逆的另一种方法：设 $A \in M_n$，则 $E, A, A^2, \cdots, A^{n^2}$ 可以看成 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中~~

例：设 A 是幂零矩阵，证明 E−A 可逆

证：设 $A^k = O$

$$\left(\overset{E-A}{\cancel{A-E}}\right)\left(A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + E\right)$$

$$= E - A^k = E$$

所以：E−A 可逆 且它的逆是

$$\left(A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + E\right).$$