回忆：设 F 是域

F 上的线性方程组

F 上的矩阵

从 F^n 到 F^m 的线性映射

F 上方阵的行列式

$F[x]$　F 上的一元多项式环

- $F[x]$ 中有带余除法，辗转相除和 Bezout 关系
- $F[x]$ 上有赋值同态
- $F[x]$ 是唯一因子分解整环.

定理：设 $f \in F[x] \setminus \{0\}$

则存在 $\alpha \in F$，$m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}^+$

和两两互素的不可约多项式

$$f_1, \dots, f_k \in F[x] \setminus F$$

使得

$$f = \alpha f_1^{m_1} \cdots f_k^{m_k} \qquad (*)$$

[称 $(*)$ 为 f 的一个不可约因式分解]

如果 $f = \beta g_1^{n_1} \cdots g_l^{n_l}$ 是 f 的另个不可约因式分解　则

$l = k$. 在适当调整下标后，我们有

g_i 与 f_i 在 F 上相伴，$n_i = m_i$

$i = 1, 2, \dots k$.

定义：在 $(*)$ 中，如果 $m_i = 1$，则称 f_i 是单因子，否则称为重因子

m_i 称为 f_i 的重数.

例：$f=(x^2+4)(x^2-2)^2(x-\sqrt{2})\in\mathbb{R}[x]$

计算 f 的不可约分解和每个不可约因子的重数

解 $f=(x^2+4)(x^2+\sqrt{2})^2(x^2-\sqrt{2})^3$

(x^2+4) 是单因子

$(x^2+\sqrt{2})$ 是二重因子

$(x^2-\sqrt{2})$ 是三重因子

问题：给定 $f\in\mathbb{R}[x]\setminus\mathbb{R}$，判定 f 是否有重因子。

结论 f 有重因子 $\Longleftrightarrow \deg\gcd(f,f')>0$

注：该结论对特征零的域上的一元多项式都成立。

第五章 复数和多项式

§1. 复数域

§1.1. 定义：

$$\mathbb{C}=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

在本节中 $\sqrt{-1}$ 记为 i.

给定：$z=a+bi$ 称为复数，其中 $a,b\in\mathbb{R}$

a 称为 z 的实部，记为 $\mathrm{Re}(z)$

b 称为 z 的虚部：记为 $\mathrm{Im}(z)$

当 $\mathrm{Im}(z)=0$ 时 $z=a$ 是实数

当 $\mathrm{Re}(z)=0$ 时 $z=bi$ 是纯虚数

设 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$.

其中 $a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$

定义：$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$

可直接验证：

$(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ 是一个交换环

例 设 $z_1 = 2-3i$，$z_2 = 1+i$.

$z_1 + z_2 = 3-2i$

$z_1 z_2 = (2-3i)(1+i)$

$= 2-3i + (2-3i)i$

$= 2-3i + 2i \cancel{+} 3i^2$

$= 2-3i+2i+3 = 5-i$

定义：设 $a, b \in \mathbb{R}$，$z = a+bi$

z 的共轭是 $a-bi$. 记为 $\bar{z}$

引理 1.1. 设 $z \in \mathbb{C}$

则 (i) $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

(ii) $z \neq 0 \iff z \cdot \bar{z} > 0$

证：设 $z = a+bi$，$a, b \in \mathbb{R}$

$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi)$

$= (a+bi)a - (a+bi)bi$

$= a^2 + abi - abi + b^2$

$= a^2 + b^2$.

由此可知 (i), (ii) 成立.

定理 1.1. 交换环 $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ 是域

证：只要证明 $\mathbb{C}$ 中的非零元都可逆即可.

设 $z = a+bi$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$.

且 $z \neq 0$.

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \neq 0$

由引理 1.1 得 $z \cdot \left(\frac{1}{a^2+b^2}\bar{z}\right) = 1$ ∎

命题1.1 $\bar{\ }: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \mapsto \bar{z}$

是 $\mathbb{C}$ 上的自同构.

证: 设 $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

其中 $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i}$$

$$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i$$

$$= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i)$$

$$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i}$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i)$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (-a_1 b_2 - a_2 b_1) i$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$\bar{1} = 1$.

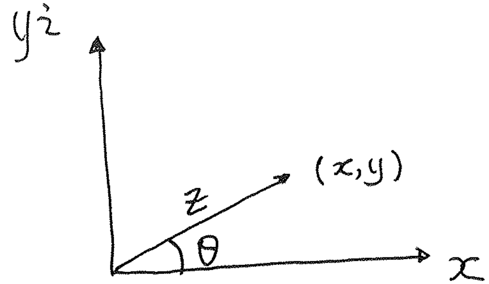
于是 $\bar{\ }$ 是同态. $\Rightarrow$ $\bar{\ }$ 是单射

$\forall z \in \mathbb{C}$ $\bar{z} \in \mathbb{C}$ $\bar{\bar{z}} = z$.

于是 $\bar{\ }$ 是满射. 从而 $\bar{\ }$ 是同构.

注: $\forall z \in \mathbb{C}$, $\bar{\bar{z}} = z$.

§1.2. 复数的几何解释



$z = x + yi$

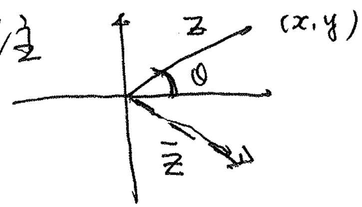
z 的模长定义为

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\arg(z) = \theta$ 称为 z 的幅角, $\theta \in [0, 2\pi)$

$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$ 称为 z 的极表示

注



$|z| = \sqrt{z \bar{z}}$

命题1.2

(i) 设 $z_1=|z_1|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

$z_2=|z_2|(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

则 $z_1z_2=|z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$

(ii) 设 $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$. $n\in\mathbb{N}$

则 $z^n=|z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(iii) 设 z 同(ii)中, $z\neq0$

$z^{-1}=\frac{1}{|z|}(\cos\theta-i\sin\theta)=\frac{1}{|z|}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

证: (i) $z_1z_2=|z_1||z_2|(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=|z_1||z_2|[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+(\cos\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_2\sin\theta_1)i$

$=|z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$

(ii) $z^2=|z|^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$

再用归纳法即可

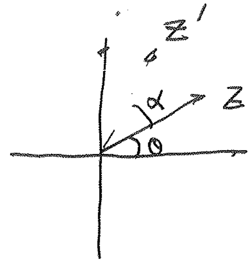
(iii) $z\cdot\frac{1}{|z|}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$=\cos0+i\sin0=1$

于是 $z^{-1}=\frac{1}{|z|}(\cos\theta-i\sin\theta)$ □

例 乘法与旋转



$z'=z(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

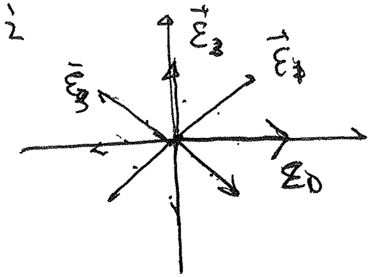
$=|z|(\cos(\theta+\alpha)+i\sin(\theta+\alpha))$.

命题1.3 方程 $z^n=1$ 有n个不同的复数解 $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$

$k=0,1,2,\dots,n-1$

证: $\varepsilon_k^n=\cos2k\pi+i\sin2k\pi=1$

(命题1.2.(ii))



显然 $\vec\varepsilon_0\dots\vec\varepsilon_{n-1}$ 两两不同

定义: 称 $\varepsilon_0,\dots\varepsilon_{n-1}$ 为n次单位根

例: 设 $U_n=\{\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_{n-1}\}$ 则 $(U_n,\cdot,1)$ 是一个循环群.

证：设 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ 是群

要证 $U_n \subset \mathbb{C}^*$ 是群，只要证：

$\forall\, i,j \in \{0,1,\cdots,n-1\}$，$\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1} \in U_n$

注意 $(\varepsilon_i \varepsilon_j^{-1})^n = \varepsilon_i^n (\varepsilon_j^n)^{-1} = 1$

于是 U_n 是子群 且 $U_n = \langle \varepsilon_1 \rangle$. ▨

定义：设 $\varepsilon_k \in U_n$，如果 $\langle \varepsilon_k \rangle = U_n$

则称 ε_k 是本原单位根 （自己验证与书上的定义等价）

例：找出 U_{12} 中所有本原单位根

$$\varphi: U_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$$
$$\varepsilon_k \longmapsto \bar{k} \qquad k = 0,1,\cdots 11$$

是同构

$\langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}_{12} \Longleftrightarrow \gcd(k,12) = 1$

$\Longleftrightarrow k = 1, 5, 7, 11$

U_{12} 中本原单位根是 $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}$

§1.4 $\mathbb{C}$ 的矩阵表示

设 $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$

设 $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$，$M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$

可直接验证：

$M_1 - M_2$，$M_1 M_2 \in F$ 且 $M_1 M_2 = M_2 M_1$

例如：$M_1 M_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ -(a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}$

~~$M_1 \neq 0$~~ 注意到 $|M_1| = a_1^2 + b_1^2$

于是 $M_1 \neq 0 \Longleftrightarrow M_1$ 可逆

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} & -\frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} \\ \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{a_2}{a_1^2+b_1^2} \end{pmatrix} \in F$$

于是 F 是域

$$\varphi: F \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longmapsto a + bi$$

$$\varphi(M_1+M_2) = \varphi\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$
$$= (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$
$$= \varphi(M_1)+\varphi(M_2)$$

$$\varphi(M_1M_2) = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$$
$$= \varphi(M_1)\varphi(M_2)$$

$\varphi(E) = 1.$

φ是单同态. φ显然是满射

φ是同构.

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = i$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

§1.4 Euler 公式

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^n\theta}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}i + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

注 $i^{2n} = (-1)^n \quad i^{2n+1} = (-1)^n i$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}$$

Euler 公式
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

特别地 $\theta = \pi$
$$e^{i\pi} = -1 \quad 即 \quad e^{i\pi}+1 = 0$$

§1.5 代数学基本定理

定理：设 $f\in\mathbb{C}[x]$ 且 $\deg f>0$

则 f 在 $\mathbb{C}$ 中有一个根

推论 1.1 设 $p\in\mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C}$ 不可约

则 $\deg p=1$

证：假设 $\deg p>1$. 由代数学基本定理. $\exists\, r\in\mathbb{C}$ 使得 $p(r)=0$

由余式定理 $p=(x-r)g$, $g\in\mathbb{C}[x]$

矛盾. ☒

推论 1.2 设 $p\in\mathbb{R}[x]\setminus\mathbb{R}$. 不可约

则 $\deg p\leq 2$.

证：假设 $p=p_d x^d+p_{d-1}x^{d-1}+\cdots+p_0$,

其中 $p_0,\cdots,p_{d-1},p_d\in\mathbb{R}$, $p_d\neq 0$

假设 $d>2$.

由代数学基本定理. $\exists\, r\in P$ 使得

$$p_d r^d+p_{d-1}r^{d-1}+\cdots+p_0=0 \quad (*)$$

因为 p 不可约. 所以 $r\notin\mathbb{R}$. (余式定理)

于是 $\bar r\neq r$

由 $(*)$ $0=\bar 0=\overline{p_d r^d+p_{d-1}r^{d-1}+\cdots+p_0}$

$=\overline{p_d}\,\bar r^d+\overline{p_{d-1}}\,\bar r^{d-1}+\cdots+\overline{p_0}$

$=p_d\bar r^d+p_{d-1}\bar r^{d-1}+\cdots+p_0=p(\bar r)$

于是 $\bar r$ 是 p 的另一个根.

由余式定理 $p(x)=(x-r)g(x)$

$p(\bar r)=0\Rightarrow(\bar r-r)g(\bar r)=0 \Rightarrow g(\bar r)=0$

$\Rightarrow g(x)=(x-r)(x-\bar r)h(x)$

$\because (x-r)(x-\bar r)\in\mathbb{R}[x]$

$\therefore h(x)\in\mathbb{R}[x]$ $\deg h>1$. $h\mid g\rightarrow\leftarrow$ ☒

<u>注</u> 设 $f\in\mathbb{C}[x]\setminus\mathbb{C}$, f 在 $\mathbb{C}[x]$ 中的

不可约因式分解可以写成

$$f=\alpha(x-r_1)^{m_1}\cdots(x-r_k)^{m_k}$$

其中 $\alpha\in\mathbb{C}$, $r_1,\ldots r_k\in\mathbb{C}$ 两两不同

$m_1, \cdots m_k \in \mathbb{Z}$

注 设 $f \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$. f 在 $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约分解可以写成

$$f = \alpha \left[\prod_{k=1}^{s} (x - r_k)^{m_k} \right] \left[\prod_{l=1}^{t} (x^2 + a_l x + b_l)^{n_l} \right]$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$, $r_k \in \mathbb{R}$. $r_1, \cdots r_s$ 两两不同

$m_1, \cdots m_s \in \mathbb{Z}^+$

$a_l, b_l \in \mathbb{R}$. $a_l^2 - 4 b_l < 0$

$(a_1, b_1), \cdots (a_t, b_t)$ 两两不同

$n_1, \cdots, n_l \in \mathbb{Z}^+$.

§3. 多元多项式

设 A 是交换环

$A[x]$ 也是交换环

$A[x_1][x_2]$ $\cdots$

$\cdots$

$A[x_1][x_2] \cdots [x_n]$

设 σ 是 $\{1, 2, \cdots n\}$ 的一个置换

则 $A[x_1][x_2] \cdots [x_n]$

与 $A[x_{\sigma(1)}][x_{\sigma(2)}] \cdots [x_{\sigma(n)}]$ 是同构.

于是 记 $A[x_1][x_2] \cdots [x_n]$ 为

$A[x_1, x_2, \cdots x_n]$ 的

称为 A 上关于 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 的

多元多项式环

定义 $M = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$, $i_1, \cdots i_n \in \mathbb{N}$

称为一个单项式, 其次数为 $i_1 + \cdots + i_n$, 记为 $\deg(M)$.

记 $X_n = \{ x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid i_1 \cdots i_n \in \mathbb{N} \}$

命题3.1

设 $f \in A[x_1, \cdots x_n] \setminus \{0\}$

则 $\exists!$ $a_1, \cdots a_k \in A \setminus \{0\}$

$M_1, \cdots M_k \in X_n$ 两两不同

使得

$$f = a_1 M_1 + \cdots + a_k M_k$$

证：对 n 归纳. $n=1$. 显然

设 $n-1$ 时定理成立

$$A[x_1, \cdots x_{n-1}\, x_n] = A[x_1, \cdots x_{n-1}][x_n]$$

$$f = \cancel{\quad} \, f_d x_n^d + f_{d-1} x_{n}^{d-1} + \cdots + f_0$$

其中 $f_i \in A[x_1, \cdots x_{n-1}]$. 由归纳假设

$$f_i = \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} M_{ij}\ , \text{其中} M_{ij} \in X_{n-1}$$

两两不同 $a_{ij} \in A \setminus \{0\}$

$$f = \sum_{i=0}^{d} f_i x_n^i = \sum_{i=0}^{d} \left(\sum_{j_i=1}^{k_i} a_{ij_i} M_{ij} \right) x_n^i$$

$$= \sum_{i=0}^{d} \sum_{j_i=1}^{k_i} a_{ij_i} \left(M_{ij} x_n^i \right)$$

因为 $M_{ij_i} x_n^i$ 也两两不同 $i \in \{0, \cdots d\}$, $j_i \in \{1, \cdots k_i\}$

存在性成立

要证明唯一性. 只要证明如下断言

设 $a_1, \cdots, a_k \in A \setminus \{0\}$, $M_1, \cdots M_k \in X_n$

两两不同. 如果

$$a_1 M_1 + \cdots + a_k M_k = 0 \qquad (*)$$

则 $a_1 = \cdots = a_k = 0$

对 n 归纳. $n = 1$ ✓

设 $n-1$ 时 ~~定理~~ 断言成立

假设 $(*)$ 中存在 $a_i \neq 0$. 则

不妨假设 ~~$a_1, \cdots a_k$ 都不是零~~.

则 ~~存在 M_i~~ ~~$M_1, \cdots M_k$~~ 其中必有 x_n 出现

设 $d_i = \deg_{x_n}(M_i)$. 不妨设

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k.$$

则 $d_k > 0$ 且 $M_i = N_i x_n^{d_i}$, ~~$i=1, \cdots k$~~,

$N_i \in X_{n-1}$, $i = 1, \cdots k$

则 $a_1 M_1 + \cdots + a_k M_k$ 关于 x_n 的首项系数为

$$a_k N_k + \alpha_{k-1} N_{k-1} + \cdots + \alpha_1 N_1$$

$$\text{其中 } \alpha_j = \begin{cases} a_j & \text{若 } d_j = d_k \\ 0 & \text{若 } d_j < d_k \end{cases}$$

于是 $a_k N_k + \alpha_{k-1} N_{k-1} + \cdots + \alpha_1 N_1 = 0$

若 $\alpha_j \neq a_j$ 则 $N_k \neq N_j$.

$\Rightarrow a_k = 0$ (归纳假设) $\rightarrow\leftarrow$ 図

定义: 设 $f \in A[x_1, \dots x_n] \setminus \{0\}$

$$f = a_1 M_1 + \cdots + a_k M_k$$

其中 $a_1, \dots a_k \in A \setminus \{0\}$, $M_1, \dots M_k \in X_n$ 两两不同. ~~且~~ 则 $\deg(f)$ 定义为

$$\max_{1 \le i \le k} \deg(M_i).$$

注: f 关于 x_i 次数. 记为 $\deg_{x_i}(f)$.

例 设 $f = (x-1)(y-2) - xy + 2x - 3x^2y$ $\in \mathbb{Q}[x]$. 展开 f 并计算 f 的次数

$$f = xy - 2x - y + 2 - xy + 2x - 3x^2y$$

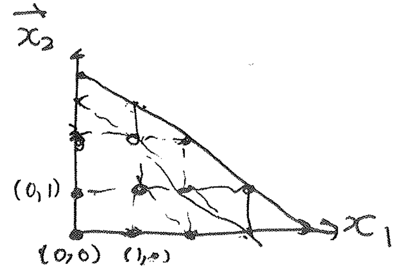
$$= -3x^2y - y + 2 \qquad \deg(f) = 3.$$

例: 设 $S = \{M \in X_n \mid \deg(M) \le m\}$

计算 $\mathrm{card}(S)$.

$n=1$ $\quad 1, x, \dots, x^m$ $\quad m+1$ 个

$n=2$



$(i_1, i_2) \mapsto x_1^{i_1} x_2^{i_2}$

$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \in S \iff i_1 + \cdots + i_n \le m$

$\iff \exists\, i_0 \in \mathbb{N},\ i_0 + i_1 + \cdots + i_n = m$

$\iff \exists\, i_0, i_1 \dots i_n \in \mathbb{N}\ \ i_0 + i_1 + \cdots + i_n = m$

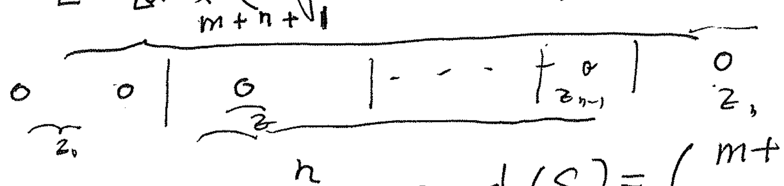
$\iff \exists\, i_0, i_1 \dots i_n \in \mathbb{N}\ \ (i_0+1) + (i_1+1) + \cdots + (i_n+1) = m+n+1$

$\iff \exists\, j_0, j_1 \dots j_n \in \mathbb{Z}^+\ \ j_0 + j_1 + \cdots + j_n = m+n+1$

即 card S 是方程

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_n = m+n+1$$

正~~整数~~解的个数.



$$\mathrm{card}(S) = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$$

定义 设 $h\in A[x_1,\dots x_n]\setminus\{0\}$

$$h=a_1M_1+\cdots+a_kM_k$$

其中 $M_1,\dots M_k\in\mathcal{Z}_n$. 两两不同

$a_1,\dots a_k\in A\setminus\{0\}$

如果 $\deg M_1=\cdots=\deg M_k$. 则称 h 的齐次的.

例 $xy+2x^2+3y^2$ 是齐2次的

设 $f\in A[x_1,\dots x_n]\setminus\{0\}$, $d=\deg(f)$

则 $f=h_d+h_{d-1}+\cdots+h_0$

其中 h_d 是齐 d 次的, h_i 或者是齐 i 次的 或者是零.

例: $f=3x^5+4x^4y-2xy-y^2-1$

$$f=(3x^5+4x^4y)+(-y^2-2xy)+(-1)$$

引理 3.1 设 g 是齐 d 次的, h 是齐 e 次的. 则 gh 是齐 $d+e$ 次的 (其中 A 是整环, $g,h\in A[x_1,\dots x_n]$)

证: 因为 A 是整环, 所以 $A[x_1]$ 是整环, 通过简单归纳可知 $A[x_1,\dots,x_n]$ 也是整环 于是 $gh\neq 0$

设 $g=g_1M_1+\cdots+g_kM_k$

$h=h_1N_1+\cdots+h_\ell N_\ell$

其中 $\deg M_i=d$, $i=1,\dots k$

$\deg N_j=e$, $j=1,\dots \ell$.

$\deg(M_iN_j)=d+e$.

gh 是 $\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{e}g_ih_jM_iN_j\neq 0$

gh 是齐 $d+e$ 次的

注 $\deg(0)=-\infty$

定理3.1 设 $f,g\in A[x_1,\dots x_n]$, 其中 A 是整环. 则 $\deg(fg)=\deg f+\deg g$.

证：如果 f 或 g 等于零，则定理显然成立。设 $f\neq 0$ 且 $g\neq 0$，则

$$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0$$

$$g = g_e + g_{e-1} + \cdots + g_0$$

其中 f_d, g_e 分别是齐 d 次和齐 e 次的多项式。其它 f_i, g_j 或者是零或者是齐 i（齐 j）次的

$$fg = f_d g_e + \sum_{\substack{i=0\\(i,j)\neq(d,e)}}^{d}\sum_{j=0}^{e} f_i g_j$$

由引理3.1

$$\deg(f_d g_e) = d+e$$

$$\deg(f_i g_j) < d+e$$

$$\Rightarrow \deg(fg) = d+e \quad \square$$

~~多元对称多项式简介~~

~~设 $\sigma\in S_n$~~

~~$\tilde{\sigma}: A[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow A[x_1,\cdots x_n]$~~

~~$f(x$~~

定理3.2 设 A，B 是两个交换环，$\varphi: A\longrightarrow B$ 环同态。任取 $b_1,\dots,b_n\in B$。存在唯一的环同态

$$\tilde{\varphi}: A[x_1,\cdots x_n] \longrightarrow B$$

满足 $\tilde{\varphi}|_A = B$ 和 $\tilde{\varphi}(x_i) = b_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

证：对 n 归纳：$n=1$。由一元多项式的环同态定理，$\exists!\ \tilde{\varphi}_1: A[x]\longrightarrow B$ 同态，使得 $\tilde{\varphi}_1|_A = B$，$\tilde{\varphi}_1(x_1)=b_1$。

设 $\exists!\ \tilde{\varphi}_{n-1}: A[x_1,\cdots x_{n-1}]$ 环同态，使得 $\tilde{\varphi}_{n-1}(x_i)=b_i$，$i=1,2,\cdots n-1$，$\tilde{\varphi}_{n-1}|_A = B$。

当 n 时 对 $\tilde{\varphi}_{n-1}$，$A[x_1,\cdots x_{n-1}][x_n]$，$B$。再用一元多项式环同态定理即可 $\square$

§4 对称多项式简介

设 $\sigma \in S_n$ 由定理3.2，存在唯一的环同态 $\tilde{\sigma}: A[x_1,\cdots,x_n] \to A[x_1,\cdots,x_n]$ 满足 $\tilde{\sigma}|_A = id$. $\tilde{\sigma}(x_i) = x_{\sigma(i)}$, $i=1,\cdots,n$

定义：设 $f \in A[x_1,\cdots,x_n]$. 如果 $\forall \sigma \in S_n$

$\tilde{\sigma}(f) = f$. 则称 f 是关于 $x_1,\cdots x_n$ 的对称多项式.

例：零次对称多项式为 $a \in A$

一次对称多项式为 $a(x_1+\cdots+x_n)+b$, $a \in A\setminus\{0\}$, $b \in A$

二次：例如 $x_1^2+\cdots+x_n^2$

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j$$

例：因为 $\tilde{\sigma}$ 是同态. 所以对称多项式的和，差，积，仍是对称的.

命题4.1 设

$f=(y-x_1)\cdots(y-x_n) \in A[x_1,\cdots x_n,y]$

令 $f=y^n-\varepsilon_1 y^{n-1}+\varepsilon_2 y^{n-2}+\cdots+(-1)^n\varepsilon_n$

$$= y^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \varepsilon_i y^{n-i}$$

则 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n \in A[x_1,\cdots x_n]$ 是对称的

证：设 $\sigma \in S_n$. $\exists$ 环同态 $\hat{\sigma}$ 满足 $A[x_1,\cdots x_n, y] \to A[x_1,\cdots x_n, y]$

$\hat{\sigma}|_{A[x_1,\cdots,x_n]} = \tilde{\sigma}$ 且 $\hat{\sigma}(y)=y$

则 $f=\hat{\sigma}(f)$

于是 $f = y^n+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\tilde{\sigma}(\varepsilon_i)y^{n-i}$

于是 $\varepsilon_i = \tilde{\sigma}(\varepsilon_i)$, $\forall \sigma \in S_n$, $i\in\{1,2,\cdots n\}$

即 ε_i 是关于 $x_1,\cdots x_n$ 的对称多项式

定义：利用命题4.1的记号 $\varepsilon_i(x_1,\cdots x_n)$ 称为关于 $x_1,\cdots x_n$ 的 i 阶初等多项式

注: $\varepsilon_i(x_1\cdots x_n) = \sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_n\le n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}$

是 i 齐次的对称地

$\varepsilon_1(x_1,\dots,x_n) = \cancel{x_1+\dots+x_n}\ x_1+\dots+x_n$

$\varepsilon_n(x_1,\dots,x_n) = x_1\cdots x_n$.

定理4.1 (根与系数的关系)

设 F 是域, $f\in F[x]\setminus F$

$f = f_n(x-r_1)\cdots(x-r_n)$

$= f_nx^n + f_{n-1}x^{n-1}+\dots+f_0$

其中 $f_i\in F$, $r_j\in F$

则 $f_n^{-1}f_i = (-1)^{n-i}\varepsilon_{n-i}(r_1,\dots,r_n)$

$(i=0,1,\dots,n-1)$

证: 由定理3.2, 存在环同态

$\varphi: F[x_1,\dots,x_n,x]\to F[x]$

满足: $\varphi|_F = id_F$, $\varphi(x_i)=r_i$, $i=1\dots n$, $\varphi(x)=x$

设 $g = f_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)$

$\varphi(g) = f_n(x-r_1)\cdots(x-r_n) = f$

由命题4.1

$g = f_n\left(x^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varepsilon_i x^{n-i}\right)$

$\varphi(g) = f_n\left(x^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\varepsilon_i(r_1\dots r_n)x^{n-i}\right)$

$= f_nx^n + f_{n-1}x^{n-1}+\dots+f_0$

$= f_n\left(x^n + \sum_{i=1}^{n} f_n^{-1}f_{n-i}x^{n-i}\right)$

$\Rightarrow (-1)^i\varepsilon_i(r_1,\dots,r_n) = f_n^{-1}f_{n-i}$

$f_n^{-1}f_i = (-1)^{n-i}\varepsilon_{n-i}(r_1\dots r_n)$

例 $n=2$

$r_1+r_2 = -f_2^{-1}f_1$ (韦达定理)

$r_1r_2 = f_2^{-1}f_1$

$n=3$

$r_1+r_2+r_3 = -f_3^{-1}f_2$

$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1 = f_3^{-1}f_1$

$r_1r_2r_3 = -f_3^{-1}f_0$