§1.5 线性映射的标准型

定理1.4 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 则在 V 和 W 的某组基下. φ 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in F^{m\times n}$$

证: 设. $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基

$\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_m$ 是 W 的一组基

φ 在这两组基下的矩阵为 $A \in F^{m\times n}$

由初等行和列变换可知. 存在 $P \in GL_m(F)$ $Q \in GL_n(F)$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

设 $(\vec{\varepsilon}_1', \dots \vec{\varepsilon}_m') = (\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_m) P^{-1}$

$(\vec{e}_1', \dots \vec{e}_n') = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) Q$

则 $\vec{\varepsilon}_1' \dots \vec{\varepsilon}_m'$ 是 W 的基 ($\because P^{-1}$ 可逆)

$\vec{e}_1', \dots \vec{e}_n'$ 是 V 的基 ($\because Q$ 可逆)

于是 φ 在 $\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n', \vec{\varepsilon}_1', \dots \vec{\varepsilon}_m'$ 下的矩阵是

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$ ∎

注: 利用上述定理和证明中的记号

设 $\vec{x} = x_1' \vec{e}_1' + \dots + x_n' \vec{e}_n'$

$\varphi(\vec{x}) = x_1' \vec{\varepsilon}_1' + \dots + x_r' \vec{\varepsilon}_r'$.

§1.6 对偶映射

设 V^*, W^* 分别是 V, W 的对偶空间

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

$\forall f \in W^*$ 我们有 $f \circ \varphi \in V^*$

由此得到映射

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & W \arrow[d, "f"] \\ & F \end{tikzcd}$$

$$\varphi^*: \; W^* \longrightarrow V^*$$
$$f \longmapsto f \circ \varphi$$

称为 φ^* 的对偶映射.

设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ 则 $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

定理1.5. 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ~~如果φ在~~ 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$; $\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_m$ 是 V, W 的基底. φ 在这两组基下的矩阵为 A

则 φ^* 在 它们的对偶基

$$\vec{\varepsilon}_1^*, \ldots \vec{\varepsilon}_m^*; \quad \vec{e}_1^*, \ldots, \vec{e}_n^*$$

下的矩阵 是 A^t

证: 先验证: $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in W^*$

$$\varphi^*(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) \circ \varphi$$

$\forall \vec{x} \in V$

$$(\alpha f + \beta g) \circ \varphi(\vec{x}) = (\alpha f + \beta g)(\varphi(\vec{x}))$$

$$= \alpha f(\varphi(\vec{x})) + \beta g(\varphi(\vec{x}))$$

$$= \alpha (f \circ \varphi)(\vec{x}) + \beta (g \circ \varphi)(\vec{x})$$

$$= (\alpha \varphi^*(f) + \beta \varphi^*(g))(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad \varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha \varphi^*(f) + \beta \varphi^*(g)$$

于是 $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$.

设 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots m \\ j=1,\ldots n}}$

设 $B = (b_{kl})_{\substack{k=1\ldots n \\ l=1\ldots m}}$ 是 φ^* 在

$\vec{\varepsilon}_1^*, \ldots \vec{\varepsilon}_m^*, \vec{e}_1^*, \ldots, \vec{e}_n^*$ 下的矩阵

$$\varphi^*(\vec{\varepsilon}_l^*) = \sum_{k=1}^{n} b_{kl} \vec{e}_k^*$$

$$\vec{\varepsilon}_l^* \circ \varphi$$

$$\vec{\varepsilon}_l^* \circ \varphi(\vec{e}_j) = \vec{\varepsilon}_l^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{\varepsilon}_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{\varepsilon}_l^*(\vec{\varepsilon}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \delta_{li} = a_{lj}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kl} \vec{e}_k^* \right)(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kl} \vec{e}_k^*(\vec{e}_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kl} \delta_{kj} = b_{jl}$$

于是 $b_{jl} = a_{lj}$ 其中 $l \in \{1, \ldots m\}$, $j \in \{1, \ldots n\}$

$$\Rightarrow B = A^t$$

$\boxed{/\!/}$

§2 线性算子代数

记号：记 $\mathcal{L}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$.

$\mathcal{L}(V)$ 中的元素称为线性算子. 通常用 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 表示

§2.1 矩阵的相似

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, V 的一组基~~下的矩阵~~为 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$. $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n$; $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的矩阵为 A. 简称为 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的矩阵.

再设 $\vec{e}_1', \cdots, \vec{e}_n'$ 是 V 的另一组基. $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1', \cdots, \vec{e}_n'$ 下的矩阵是 B.

令： $(\vec{e}_1', \cdots, \vec{e}_n') = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) P$

则 $B = P^{-1} A P$

定义：设 $A, B \in M_n(F)$. ~~如果存在~~ $P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 则称 B 与 A 相似 (similar) 记为 $B \sim_s A$.

验证： $\sim_s$ 是等价关系.

设 $A \in M_n(F)$

$A = E^{-1} A E \Rightarrow A \sim_s A$ （自反性成立）

设 $A, B \in M_n(F)$, $B \sim_s A$ 则 $\exists P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PAP^{-1} = (P^{-1})^{-1} A P^{-1}$

$\Rightarrow A \sim_s B$ （对称性成立）

设 $C \in M_n(F)$ $A \sim_s B$, $B \sim_s C$

则 $\exists P, Q \in GL_n(F)$, 使得

$A = P^{-1}BP$, $B = Q^{-1}CQ$

$\Rightarrow A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP)$ （传递性成立）

$\Rightarrow A \sim_s C$.

本章的目的

给定 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, 求 V 的一组基使得 φ 在该基下的矩阵尽可能"简单"

给定 $A \in M_n(F)$. 求 A 在相似意义下的"标准型".

命题2.1 (相似不变量)

设 $A, B \in M_n(F)$ 且 $A \sim_s B$

则 (i) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

(ii) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

(iii) $\det(A) = \det(B)$

证：设 $P \in GL_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$.

(i) 因为 P 满秩．所以 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

(ii) 因为矩阵的迹是交换不变量（习题课）

$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$

$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP)$

(iii) $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$

$= \det(A)$

例：由(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ~~不相似~~

由(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

由(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\sim_s \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．证明 A 与 E_2 不相似

证：设 $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(F)$ 使得

$E_2 = S^{-1}AS \Rightarrow S = AS$

即 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$

$a = a+c \Rightarrow c = 0$, $b = b+d \Rightarrow d = 0$

$\Rightarrow S$ 不可逆 $\longrightarrow\!\longleftarrow$. ☒

§2.2 线性算子的若干例子

例 $O: V \longrightarrow V$ 零算子

$\vec{v} \longmapsto \vec{0}$

它在任何基下的矩阵都是 $O_{n\times n}$，简记为 O

$\mathcal{E}: V \longrightarrow V$ 恒同算子

$\vec{v} \longmapsto \vec{v}$

它在任何基下的矩阵都是 E_n．简记为 E

例：设 $V = U \oplus W$，U, W 是子空间

$\forall \vec{v} \in V$，$\exists!\ \vec{u} \in U$，$\vec{w} \in W$ 使得

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$$

$$P_U : V \longrightarrow V$$
$$\vec{v} \longmapsto \vec{u}$$

称为从 V 到 U 的投影或 V 沿 W 的平行投影

$$P_U \circ P_U(\vec{v}) = P_U(\vec{u}) = \vec{u}.$$

于是 $P_U \circ P_U = P_U$

记号：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $k \in \mathbb{Z}^+$

$\underbrace{\mathcal{A} \circ \cdots \circ \mathcal{A}}_{k}$ 记为 $\mathcal{A}^k$ 特别地

$$\mathcal{A}^0 = \mathcal{E}$$

可直接验证：$\forall i, j \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}^i \circ \mathcal{A}^j = \mathcal{A}^{i+j}$$

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$.

则称 $\mathcal{A}$ 是幂等的. 同样 $A \in M_n(F)$

如果 $A^2 = A$，则称 A 是幂等的.

~~例：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是幂等的.~~

例 设 $\Delta : F_n[x] \longrightarrow F_n[x]$

$$f(x) \longmapsto f(x+1) - f(x)$$

因为线性变换替换是线性映射，且 $\mathcal{L}(V)$ 是线性空间，所以 $\Delta \in \mathcal{L}(F_n[x])$

注意到 $\Delta x^i = (x+1)^i - x^i \quad (i > 0)$

$$\deg(\Delta x^i) < i$$

$$\forall \alpha \in F \quad \Delta(\alpha) = \alpha - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \forall f \in F_n[x] \quad \Delta^n(f) = 0$$

即 $\Delta^n = \mathcal{O}$

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $\exists\ k \in \mathbb{Z}^+$，使得 $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$. 则称 $\mathcal{A}$ 是幂零的

类似地 可以定义幂零矩阵.

§2.3 代数同构

引理2.1 $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \circ, \mathcal{E})$ 是环，且 $\forall \alpha, \beta \in F$，$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$

(*) $(\alpha\mathcal{A}) \circ (\beta\mathcal{B}) = \alpha\beta(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})$

证：∵ $\mathcal{L}(V)$ 是线性空间 (定理1.1)

∴ $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O})$ 是交换群

$\forall\ \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{L}(V)$

$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ (定理1.2)

$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ (\mathcal{C})$ (结合律)

$\boxed{\mathcal{A} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A}}$

下面验证分配律.

$\forall \vec{v} \in V$

$\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C})(\vec{v}) = \mathcal{A}((\mathcal{B} + \mathcal{C})(\vec{v}))$

$= \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{v}) + \mathcal{C}(\vec{v})) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{v})) + \mathcal{A}(\mathcal{C}(\vec{v}))$

$= \mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\vec{v}) + \mathcal{A} \circ \mathcal{C}(\vec{v}) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C})(\vec{v})$

于是 $\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$

同理 $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \circ \mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{C} + \mathcal{B} \circ \mathcal{C}$

最后验证 (*)

$\forall \vec{v} \in V$

$(\alpha\mathcal{A}) \circ (\beta\mathcal{B})(\vec{v}) = \alpha\mathcal{A}(\beta\mathcal{B}(\vec{v}))$

$= \alpha\beta\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{v})) = \alpha\beta(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(\vec{v}) \Rightarrow$ (*) 成立

定理2.1 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基

$$\Phi: \mathcal{L}(V) \longrightarrow M_n(F)$$
$$\mathcal{A} \longmapsto A$$

其中 A 是 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵

则 Φ 既是线性同构又是环同构

(简称代数同构)

证：由定理1.1 及其证明，Φ 是线性同构. 因为 $\mathcal{E}$ 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是 E，所以 $\Phi(\mathcal{E}) = E$.

由定理1.2 $\Phi(A\circ B)=AB$.

于是 Φ 是环同构 □

~~设：因为Φ满~~

§2.3 极小多项式

令 $F[A]=\langle A^0, A^1, A^2, \dots\rangle \subset \mathcal{L}(V)$

$F[A]=\langle A^0, A^1, A^2, \dots\rangle \subset M_n(F)$

命题2.2 (i) 设 $A\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\dim F[A]\leq n^2$ 且 $F[A]$ 是 $\mathcal{L}(V)$ 的交换子环

(ii) 设 $A\in M_n(F)$. 则 ~~$F[A]$ 是 $M_n(F)$~~ $\dim F[A]\leq n^2$ 且 $F[A]$ 是 $M_n(F)$ 的交换子环.

证: (i) ~~设~~ 因为 $F[A]\subset\mathcal{L}(V)$. $\dim\mathcal{L}(V)=n^2$, 所以 $\dim F[A]\leq n^2$

设 $S=\sum_{i=0}^{k} f_i A^i$, $f_i\in F$, $k\in\mathbb{N}$

$T=\sum_{j=0}^{l} g_j A^j$, $g_j\in F$, $l\in\mathbb{N}$

~~不妨设 $k\geq l$, $S+T=\sum_{i=0}^{l}(f_i+g_i)A^i+\sum_{j=l+1}^{k} f_j A^j\in F[A]$~~

~~再证~~ 因为 $F[A]$ 是线性空间 所以 $(F[A], +, 0)$ 是子群

$E=A^0\in F[A]$.

$$S\circ T=\left(\sum_{i=0}^{k} f_i A^i\right)\circ\left(\sum_{j=0}^{l} g_j A^j\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}(f_i A^i)\circ(g_j A^j) \quad \text{[广义分配律]}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} f_i g_j A^{i+j} \quad \text{[引理2.1]}$$

同理 $T\cdot S=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} f_i g_j A^{i+j}$

于是 $S\circ T=T\cdot S$ 且 $S\circ T\in F[A]$. □

(ii) 类似 □

注 由多项式赋值定理

$$\varphi: F[t]\longrightarrow F[A], \quad \sum_{i=0}^{k} f_i t^i \longmapsto \sum_{i=0}^{k} f_i A^i$$

$$\psi: F[t]\longrightarrow F[A], \quad \sum_{i=0}^{k} f_i t^i \longmapsto \sum_{i=0}^{k} f_i A^i$$

都是环同态.

例：设 $f=t^2-1$. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$f(A)=A^2-E=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

注：设 $\mathcal{S}=\sum_{i=0}^{k}f_i\mathcal{A}^i$.

$$\mathcal{S}=0 \not\Rightarrow f_0=f_1=\cdots=f_n=0$$

反例 $\mathcal{A}=\mathcal{E}$

$$1\cdot\mathcal{E}^2-1\cdot\mathcal{E}=0 \text{ 但 } 1\neq 0.$$

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $p\in F[t]$.
如果 $p(\mathcal{A})=0$ 则称 p 零化 $\mathcal{A}$ 或 p 是 $\mathcal{A}$ 的一个零化多项式. 当 $p\neq 0$ 时 p 称为非平凡的.

同样可以定义方阵 A 的零化多项式

① 例：设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. 分别求 A,B,C 的一个非平凡零化多项式.

解：$A^0=E$, $A^1=E \Rightarrow A^1-A^0=0$

$p(t)=t-1$ 零化 A

$B^0=E$ $B^1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$. 它们线性无关

$B^2=0 \Rightarrow g(t)=t^2$ 零化 B

$C^0=E$, $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 线性无关

$C^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $-C^0+0\cdot C+C^2=0$

$r(t)=t^2-1$ 零化 C.

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $F[t]$ 中 $\mathcal{A}$ 的次数最低，首一的非平凡零化多项式称为 $\mathcal{A}$ 的极小多项式. 记为 $\mu_{\mathcal{A}}$. 同样地可以定义方阵 A 的极小多项式. 记为 μ_A

引理 2.2 複

(i) 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 的极小多项式存在且唯一

(ii) 设 $A\in M_n(F)$, 则 A 的极小多项式存在且唯一

证：我们证明 (ii). (i) 类似.

$\because \dim F[A]<\infty$

$\therefore \exists\, k$ 使得 $A^0, A, \dots A^k$ 线性无关. 取这样的 k 中最小的.

则 $\exists\, \alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_k\in F$, 不全为零

使得 $\alpha_0 E+\alpha_1 A+\dots+\alpha_k A^k = O$.

由 k 的极小性 $\alpha_k\neq 0$

于是 $A^k+\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}A^{k-1}+\dots+\frac{\alpha_1}{\alpha_k}A+\frac{\alpha_0}{\alpha_k}E=0$

令 $p(t)=t^k+\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}t^{k-1}+\dots+\frac{\alpha_0}{\alpha_k}$

则 $P(A)=0$ 且首一.

再由 k 的极小性可知. 不存在有 A 次数比 k 低的非平凡零化多项式 唯一性 (唯一性) 见随课教后的注

例：在上例中. 求得的零化多项式都是极小的

定理 2.2 设 ~~$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$~~, $A\in M_n(F)$

(i) 如果 $p\in F[t]$ 零化 A, 则 $\mu_A\mid p$

(ii) $\dim F[A]=\deg\mu_A$

(iii) A 可逆 $\Longleftrightarrow \mu_A(0)\neq 0$

(iv) ~~对 $\mathcal{A}$~~ 如果 $A\sim_s B$, 则 $\mu_A=\mu_B$

注. (i), (ii) (iii) 对线性算子也成立.

证：(i) 设 $p\in F[t]$ 使得 $P(A)=0$

由多项式除法. $\exists\, q, r\in F[t]$ 使得

$p(t)=q(t)\mu_A(t)+r(t)$ 和 $\deg r<\deg\mu_A$.

由多项式赋值定理

$$P(A) = q(A)\mu_A(A) + r(A)$$

$\Rightarrow$ $r(A) = 0$.

$\because$ $\deg r(t) < \deg \mu_A(t)$ $\therefore$ $r(t) = 0$

$\Rightarrow$ $\mu_A \mid p$.

(ii) 设 $d = \deg \mu_A$. 则

$E, A, \cdots, A^{d-1}$ 在 F 上线性无关

设 $S = f_0 A^0 + f_1 A + \cdots + f_k A^k \in F[A]$

令 $p = f_0 + f_1 t + \cdots + f_k t^k$

由多项式除法

$$p(t) = g(t)\mu_A(t) + r(t)$$

其中 $g, r \in F[t]$ $\deg r < \deg d$

$$S = P(A) = g(A)\mu_A(A) + r(A)$$
$$= r(A)$$

于是 S 是 $E, A, \cdots A^{d-1}$ 的

线性组合 $\Rightarrow$ $\dim F[A] = d$.

(iii) 设 $\mu_A(t) = t^d + \alpha_{d-1}t^{d-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$

其中 $\alpha_i \in F$

则 $\mu_A(A) = A^d + \alpha_{d-1}A^{d-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = O$

$A(A^{d-1} + \alpha_{d-1}A^{d-2} + \cdots + \alpha_1 E) = -\alpha_0 E$

$\mu_A(0) \neq 0 \Rightarrow \alpha_0 \neq 0 \Rightarrow -\alpha_0 E$ 满秩 $\Rightarrow A$ 满秩

$\Rightarrow A$ 可逆

反之. 假设 A 可逆 但 $\alpha_0 = 0$

则 $A(A^{d-1} + \alpha_{d-1}A^{d-1} + \cdots + \alpha_1 E) = O$

$\Rightarrow$ $A^{d-1} + \alpha_{d-1}A^{d-1} + \cdots + \alpha_1 E = O$

设 $p(t) = t^{d-1} + \alpha_{d-1}t^{d-1} + \cdots + \alpha_1$

则 $P(A) = O$ 但 $\deg p = d-1 < d$ $\rightarrow\leftarrow$

(iv) 设 $B = P^{-1}AP$. 其中 $P \in GL_n(F)$

注意到 $\forall i \in B$

$$B^i = \underbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}_{i}$$

$$B^2 = P^{-1}A(P^{-1}P)A \cdots (P^{-1}P)AP$$
$$= P^{-1}A^2P$$

$$\mu_A(B) = P^{-1}A^{d}P + \alpha_{d-1}P^{-1}A^{d-1}P + \cdots + \alpha_1 P^{-1}AP + \alpha_0 P^{-1}EP$$
$$= P^{-1}(A^d + \alpha_{d-1}A^{d-1} + \cdots + \alpha_0 E)P = O.$$

由此 $\mu_B \mid \mu_A$.

同理 $\mu_A \mid \mu_B$

$\because$ μ_A, μ_B 都首 1 $\therefore$ $\mu_A = \mu_B$ ☒

例. $\mu_O = t$. $\mu_E = t-1$

例: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 是 ~~幂零的~~ 幂等的. 证明 当 $\mathcal{A} \neq O$ 和 $\mathcal{A} \neq \mathcal{E}$ 时, $\mathcal{A}$ 的极小多项式是 $t^2 - t$

证: 设 $p(t) = t^2 - t$. 则 p 零化 $\mathcal{A}$ ⑪

于是 $\mu_A \mid p(t)$, 即

μ_A 只可能是 t, $t-1$ 或 t^2-t

当 $\mu_A = t$ 时. $\mathcal{A} = O$ -

当 $\mu_A = t-1$ 时 $\mathcal{A} - \mathcal{E} = O \Rightarrow \mathcal{A} - \mathcal{E}$

否则. $\mu_A = t^2 - t$

例: 证明: ~~如果~~ A 的幂零矩阵 则 $\mu_A = t^k$, 其中 k 是使得 $A^k = O$ 的最小正整数

证: 因为 $\mathcal{A}$ 幂零, 所以存在 $m \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\mathcal{A}^m = O$. 则 t^m 零化 $\mathcal{A}$

由定理22.4. $\mu_A \mid t^m$

$\Rightarrow \mu_A = t^k$. $k \in \mathbb{Z}^+$

由 k 的 ~~极小性~~ 是使得 $\mathcal{A}^k = O$ 的最小正整数.

例. 利用极小多项式，证明

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \nsim_s \underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}_{A}$$

$\mu_E = t^{\cancel{2}} - 1$

E, A 线性无关 于是 $\deg \mu_A \geq 2$

$\Rightarrow \mu_E \neq \mu_A \Rightarrow E \nsim_s A.$

注：引理2.2中唯一性证

设 $g, \tilde{g}$ 为 A 的两个极小多项式

则 $\deg g = \deg \tilde{g}$ (由次数限制可知

又因为 $g, \tilde{g}$ 都首一. 所以

$$\deg(g - \tilde{g}) < \deg(g)$$

$\because g(A) - \tilde{g}(A) = (g - \tilde{g})(A) = 0$

$\therefore g - \tilde{g}$ 零化 $A \Rightarrow g = \tilde{g}$

(~~两~~因为次数的限制)