§3 不变子空间

§3.1 定义与性质

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$U$ 是 V 的子空间

如果 $\mathcal{A}(U) \subset U$，则称 U 是关于 $\mathcal{A}$ 的

子空间，简称 ~~A不变~~ $\mathcal{A}$-子空间.

注：当 U 是 $\mathcal{A}$-子空间时，

$$U|_{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(U)$$

动机：把 V 分解为

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$$

其中，$U_1, \cdots, U_m$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 令

~~A限~~ $\quad \mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{U_i}$

则 $\mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(U_i)$，$i=1, \cdots, m$

通过研究 $\mathcal{A}_i$ 来研究 $\mathcal{A}$.

例：（平凡情形）$\{\vec{0}\}$ 和 V 是 $\mathcal{A}$-子空间

$$\mathcal{A}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{0}\}. \quad \mathcal{A}(V) = \mathrm{im}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}.$$

例 $\ker(\mathcal{A})$ 和 $\mathrm{im}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

证：$\mathcal{A}(\ker(\mathcal{A})) = \{\vec{0}\} \subset \ker(\mathcal{A})$.

$\Rightarrow \ker(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

$\mathcal{A}(\mathrm{im}(\mathcal{A})) \subset \mathrm{im}(\mathcal{A})$

$\Rightarrow \mathrm{im}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

引理 3.1. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$ 满足

$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$. 则

$\ker(\mathcal{B})$ 和 $\mathrm{im}(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{A}$-子空间.

证：设 $K_B = \ker(\mathcal{B})$. ~~$K_A = \ker$~~

$I_B = \mathrm{im}(\mathcal{B})$.

设 $\vec{v} \in K_B$. $\quad \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{v})) = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}(\vec{v})$

$= \mathcal{A} \circ \mathcal{B}(\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{v})) = \mathcal{A}(\vec{0}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{v}) \in K_B \Rightarrow K_B$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

设 $\vec{v} \in I_{\mathcal{B}}$. 则 $\exists \vec{u} \in V$, 使得

$$\vec{v} = \mathcal{B}(\vec{u})$$

$$\mathcal{A}(\vec{v}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{u})) = \mathcal{A}\circ\mathcal{B}(\vec{u}) = \mathcal{B}\circ\mathcal{A}(\vec{u})$$
$$= \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{u})) \in I_{\mathcal{B}}$$

$\Rightarrow I_{\mathcal{B}}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间 ▨

命题 3.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

(i) 设 U, W 是 $\mathcal{A}$-子空间. 则 $U \cap W$ 和 $U+W$ ~~都是~~ $\mathcal{A}$-子空间

(ii) $\forall f \in F[t]$ $\ker(f(\mathcal{A}))$ 和 $\operatorname{im}(f(\mathcal{A}))$ ~~都是~~ $\mathcal{A}$-子空间

证: (i) 设 $\vec{v} \in U \cap W$

$\vec{v} \in U \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{v}) \in U$.

同理 $\mathcal{A}(\vec{v}) \in W$. 于是 $\mathcal{A}(\vec{v}) \in U \cap W$

即 $U \cap W$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

设 $\vec{v} \in U+W$. 则 $\exists \vec{u} \in U$, $\vec{w} \in W$

使得 $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

$$\mathcal{A}(\vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{u}) + \mathcal{A}(\vec{w})$$

$\because \mathcal{A}(\vec{u}) \in U$. $\mathcal{A}(\vec{w}) \in W$

$\therefore \mathcal{A}(\vec{v}) \in U+W$. 于是 $U+W$ 是 $\mathcal{A}$-子空间.

(ii) 因为 $\mathcal{A}\circ f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{A})\circ\mathcal{A}$

所以 $\ker(f(\mathcal{A}))$ 和 $\operatorname{im} f(\mathcal{A})$ ~~都是~~ $\mathcal{A}$-子空间 ▨

例 设 $\mathcal{A}$: $F^2 \longrightarrow F^2$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

求 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

证: 2维 $\mathcal{A}$-子空间. F^2

0维 $\mathcal{A}$-子空间. $\{\vec{0}\}$

设 $U = \langle \vec{v} \rangle$ $\vec{v} \neq \vec{0}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一维不变子空间.

则：$\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$，其中 $\lambda\in F$

设 $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 v_1 \\ \alpha_2 v_2 \end{pmatrix}$

$$=\lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (\alpha_1-\lambda)v_1=0 \\ (\alpha_2-\lambda)v_2=0 \end{cases}$$

<u>情形1</u> $\alpha_1\neq\alpha_2$. $\quad \lambda=\alpha_1,\ v_2=0$

或 $\lambda=\alpha_2,\ v_1=0$

则 $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

一维不变子空间是 $\left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$，$\left\langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$

<u>情形2</u> $\alpha_1=\alpha_2=:\alpha$

$\mathcal{A}(\vec{v})=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\alpha\vec{v}$

任何一维子空间都是 $\mathcal{A}$-子空间

§3.2 不变子空间下的矩阵表示

定理 3.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\dim V=n$

(i) 设 U 是 d 维 $\mathcal{A}$ 子空间，则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$M=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}_{n\times n}，\text{其中 } A_{11}\in M_d(F).$$

(ii) 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某个矩阵表示为 M，则 $\mathcal{A}$ 必有 d 维 $\mathcal{A}$-子空间

<u>证</u>：(i) 设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$ 是 U 的基，把它扩充为 V 的一组基 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$

$\because\ \mathcal{A}(\vec{e}_i)\in U=\langle\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_d\rangle$

$(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\cdots\mathcal{A}(\vec{e}_d))=(\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_d)A_{11}$

$A_{11}\in M_d(F)$

$(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\cdots\mathcal{A}(\vec{e}_d),\mathcal{A}(\vec{e}_{d+1}),\cdots\mathcal{A}(\vec{e}_n))=$

$$(\vec{e}_1,\cdots\vec{e}_n)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}.$$

(ii) 设 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 M. 则

$$(\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_1), \dots \mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_d), \mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_{d+1}), \dots \mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_n)) = (\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_d, \vec{\varepsilon}_{d+1}, \dots \vec{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_1), \dots \mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_d)) = (\vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_d) A_{11}$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_i) \in \langle \vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_d \rangle, \quad i = 1, \dots d$

$\Rightarrow \mathcal{A}(\langle \vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_d \rangle) \subset \langle \vec{\varepsilon}_1, \dots \vec{\varepsilon}_d \rangle$ ☒

定理 3.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$

(i) 如果 $U_1, \dots, U_m$ 是 $\mathcal{A}$ 的子空间

且 $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$

则 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m \end{pmatrix}_{n \times n}$$

其中 $A_i \in M_{d_i}(F)$, $d_i = \dim U_i$, $i = 1 \dots m$

(ii) ~~如果~~ $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是 M, 则 ~~$\mathcal{A}$ V~~ 存在 $\mathcal{A}$-子空间 $U_1, \dots, U_m$ 使得

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$$

且 $\dim U_i = d_i$, $i = 1, \dots, m$

证: 设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|U_i$, $i = 1 \dots m$

则 $\mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(U_i)$ 的基.

设 $\vec{e}_{i1}, \dots \vec{e}_{id_i}$ 是 U_i 的基,

则 $(\mathcal{A}_i(\vec{e}_{i1}), \dots \mathcal{A}_i(\vec{e}_{id_i})) = (\vec{e}_{i1}, \dots, \vec{e}_{id_i}) A_i$. 其中 $A_i \in M_{d_i}(F)$

因为 $(\mathcal{A}(\vec{e}_{i1}), \dots \mathcal{A}(\vec{e}_{id_i})) = (\mathcal{A}_i(\vec{e}_{i1}), \dots, \mathcal{A}_i(\vec{e}_{id_i}))$

且 $\vec{e}_{11}, \dots \vec{e}_{1d_1}, \dots, \vec{e}_{m1}, \dots \vec{e}_{md_m}$ 是 V 的一组基 ($\because$ ~~U~~ $= U_1 \oplus \dots \oplus U_m$)

于是 (*)

$(\mathcal{A}(\vec{e}_{11}),\cdots\mathcal{A}(\vec{e}_{1d_1}),\cdots,\mathcal{A}(\vec{e}_{m1}),\cdots,\mathcal{A}(\vec{e}_{md_m}))$

$$=(\vec{e}_{11},\cdots,\vec{e}_{1d_1},\cdots,\vec{e}_{m1}\cdots\vec{e}_{md_m})\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m\end{pmatrix}$$

(ii) 设 $(\vec{\varepsilon}_{11},\cdots\vec{\varepsilon}_{1d_1},\cdots\vec{\varepsilon}_{m1},\cdots\vec{\varepsilon}_{md_m})$

是 V 的一组基, 且在该基下 $\mathcal{A}$ 的

矩阵为 M. $\widehat{A_i}$

$U_i=\langle\vec{\varepsilon}_{i1},\cdots\vec{\varepsilon}_{id_i}\rangle$, $i=1,\ldots,m$

则 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_m$ 有

(见第一章 命题4.2. 我们有

$V=U_1+\cdots+U_m$

$\dim U_1+\cdots+\dim U_m=d_1+\cdots+d_m=n$.)

$\cancel{\langle\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_{i1}),\cdots\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_{id_i})\rangle}$

$\cancel{=\langle\vec{\varepsilon}_{i1},\cdots\vec{\varepsilon}_{id_i}\rangle A_i}$

由 (*) 可知

$(\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_{i1}),\cdots\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_{id_i}))=(\vec{\varepsilon}_{i1},\cdots\vec{\varepsilon}_{id_i})A_i$

$i=1,\cdots m$

$\Rightarrow$ U_i 是 $\mathcal{A}$-子空间.

§3.3. $\mathcal{A}$-子空间与极小多项式

引理3.2. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $A\in M_n(F)$

是 $\mathcal{A}$ 的某个矩阵表示.

则 (i) $\forall p\in F[t]$. p 零化 $\mathcal{A}\Leftrightarrow p$ 零化 A

(ii) $\mu_{\mathcal{A}}=\mu_A$

证: 由定理2.1

$$\Phi:\ \mathcal{L}(V)\longrightarrow M_n(F)$$
$$\mathcal{A}\longmapsto A$$

是代数同构.

则 $\Psi=\Phi|_{F[\mathcal{A}]}$

则 Ψ: $F[\mathcal{A}]\longrightarrow F[A]$
$$\mathcal{A}\longmapsto A$$

是代数同构. 于是

$\forall p\in F[t]$

$p(\mathcal{A})=\mathcal{O}\Leftrightarrow\Psi(p(\mathcal{A}))=\mathcal{O}$

$\Leftrightarrow p(A)=O$

(i) 成立

(ii) 由(i) $\mu_A(A)=O \Rightarrow \mu_A(A)=0$

$\Rightarrow \mu_A \mid \mu_A$

同理 $\mu_A \mid \mu_A$. 于是 $\mu_A=\mu_A$ ▢

命题3.2 设 $A\in M_n(F)$.

(i) 如果 $A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$

则 $\mu_B \mid \mu_A$, $\mu_D \mid \mu_A$

(ii) 如果 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_m \end{pmatrix}$

则 $\mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_{A_1},\cdots,\mu_{A_m})$

证: (i) 设 $B\in M_d(F)$, 则 $D\in M_{n-d}(F)$

断言 $A^k=\begin{pmatrix} B^k & C_k \\ O & D^k \end{pmatrix}$

其中 $C_k\in F^{d\times(n-d)}$

断言之证明: 对k归纳

$k=0$ $\quad A^0=E_n=\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix}$

断言对$k-1$成立

设 $A^{k-1}=\begin{pmatrix} B^{k-1} & C_{k-1} \\ O & D^{k-1} \end{pmatrix}$

则 $A^k=\begin{pmatrix} B^{k-1} & C_{k-1} \\ O & D^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} B^k & B^{k-1}C+C_{k-1}D \\ O & D^k \end{pmatrix}$

于是断言成立.

设 $\mu_A=t^m+\alpha_{m-1}t^{m-1}+\cdots+\alpha_0$, $\alpha_i\in F$

$O=\mu_A(A)=\begin{pmatrix} B^m & * \\ O & D^m \end{pmatrix}+\alpha_{m-1}\begin{pmatrix} B^{m-1} & * \\ O & D^{m-1} \end{pmatrix}$

$+\cdots+\alpha_0\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix}$

$$0 = \mu_A(A) = \begin{pmatrix} \mu_A(B) & * \\ 0 & \mu_A(D) \end{pmatrix}$$

其中 (*) 代表某个 $d\times(n-d)$ 矩阵

于是 $\mu_A(B) = 0$，$\mu_A(D) = 0$

由 $\overbrace{\mu_B \mid \mu_A}^{\text{定理2.2.(i)}}$ $\mu_D \mid \mu_A$

(ii) 由 (i) 可知

$\mu_{A_i} \mid \mu_A$，$i=1,\dots,m$.

于是 μ_A 是 $\mu_{A_1},\dots,\mu_{A_m}$ 的~~最小~~公倍式 [首一]

设 $l = \mathrm{lcm}(\mu_{A_1},\dots,\mu_{A_m})$，

则 $l = g_i \mu_{A_i}$，$i=1,\dots,m$.

$$l(A) = \begin{pmatrix} l(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l(A_m) \end{pmatrix}$$

[见 (i) 的~~讨~~证明]

$l(A_i) = (g_i \mu_{A_i})(A_i)$
$= g_i(A_i)\mu_{A_i}(A_i) = 0$

于是 $l(A_i) = 0$，$i=1,\dots,m$.

$\Rightarrow l(A) = 0$

$\Rightarrow \mu_A \mid l$ [定理2.2 (i)]

$\Rightarrow \mu_A = l$ ▨

~~命题~~ 3.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

(i) 如果 U 是 $\mathcal{A}$-子空间，$B = \mathcal{A}|_U$.

则 $\mu_B \mid \mu_{\mathcal{A}}$

(ii) 设 $U_1,\dots,U_m$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

且 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$. 令

$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{U_i}$，$i=1,\dots,m$

则 $\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1},\dots,\mu_{\mathcal{A}_m})$

证：(i) 设 $\mathcal{B}$ 是 U 的基

$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d$

下的矩阵. 把 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d$ 扩充

为 V 的一组基，由定理3.1及其证明可知 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

由命题3.2 (i) $\mu_B \mid \mu_A$

由引理3.2，$\mu_B \mid \mu_{\mathcal{A}}$.

(ii) 设 $\mu_{\mathcal{A}_i}$ 在 U_i 的某组基下的矩阵为 A_i，由定理3.2及其证明 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_m \end{pmatrix}$$

其中 A_i 是 $\mathcal{A}_i$ 的某个矩阵

由引理3.2

$$\mu_{\mathcal{A}_i} = \mu_{A_i}, \quad i=1,\dots,m$$

于是，由命题3.2

$$\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1}, \dots, \mu_{\mathcal{A}_m}) \quad \square$$

§4 特征子空间

§4.1 特征向量

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$. 如果 $\vec{v}$ 与 $\mathcal{A}(\vec{v})$ 线性相关 则称 $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征向量 (eigenvector).

引理 4.1. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V\setminus\{\vec{0}\}$.

$\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 $\Leftrightarrow \exists\lambda\in F$, 使得 $\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$

证: "$\Rightarrow$" 设 $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量，则存在 $\alpha_1,\alpha_2\in F$，不全为零 使得

$$\alpha_1\vec{v}+\alpha_2\mathcal{A}(\vec{v})=\vec{0}$$

于是 $\because \vec{v}\neq\vec{0}$ $\therefore \alpha_2\neq 0$

$$\mathcal{A}(\vec{v})=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\vec{v}.$$

令 $\lambda=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ 即可 $\boxtimes$

命题 4.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V$

$\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 $\Leftrightarrow$ $\langle\vec{v}\rangle$ 是一维 $\mathcal{A}$-子空间

证: "$\Rightarrow$" 由引理 4.1. $\exists\lambda\in F$. 使得

$$\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$$

$\forall\vec{u}\in\langle\vec{v}\rangle$ $\exists\alpha\in F$ 使得 $\vec{u}=\alpha\vec{v}$

$$\mathcal{A}(\vec{u})=\mathcal{A}(\alpha\vec{v})=\alpha\mathcal{A}(\vec{v})=\alpha\lambda\vec{v}\in\langle\vec{v}\rangle$$

于是 $\langle\vec{v}\rangle$ 是 $\mathcal{A}$-子空间. 因为 $\vec{v}\neq\vec{0}$, $\dim\langle\vec{v}\rangle=1$

"$\Leftarrow$" $\because \dim\langle\vec{v}\rangle=1$ $\therefore \vec{v}\neq\vec{0}$

$\because \mathcal{A}(\vec{v})\in\langle\vec{v}\rangle$ $\therefore \exists\lambda\in F$ 使得

$$\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$$

由引理 4.1, $\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$ 的特征向量 $\boxtimes$

§4.2 特征向量的计算

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 在 V 的基底 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵为 $A\in M_n(F)$.

设 $\vec{v}=v_1\vec{e}_1+\dots+v_n\vec{e}_n\neq\vec{0}$, $\lambda\in F$

$$\mathcal{A}(\vec{v})=\lambda\vec{v} \iff A\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$$

$$\iff (\lambda E-A)\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\iff \begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组 ~~的解~~ $(\lambda E-A)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 的非零解.

而方程组

$$(*)\quad (\lambda E-A)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \text{ 有非平凡解}$$

$$\Leftrightarrow |\lambda E-A|=0$$

计算 A 的所有特征向量的步骤

① 求 $\lambda\in F$，使得 $|\lambda E-A|=0$ $(**)$

② 对满足 $(**)$ 的每个 λ，求 $(*)$ 的解空间 V^λ，所有 V^λ 中的非零向量，即为 A 的特征向量.

定义：设 $A\in M_n(F)$，t 是未定元，多项式 $|tE-A|\in F[t]$ 称为 A 的特征多项式，记为 $\chi_A(t)$，$\chi_A(t)$ 在 F 中的根称为 A 的特征根（值）(eigen roots, eigen values)

设 $A=(a_{ij})$

$$|tE-A|=\begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

于是 $|\lambda E-A|=\chi_A(\lambda)$. 由此可知

$|\lambda E-A|=0 \Leftrightarrow \lambda$ 是 $\chi_A(t)$ 的根

命题4.2 设 $A\in M_n(F)$，则 χ_A 是相似不变量.

证：$B\sim_s A$，则存在 $P\in GL_n(F)$ 使得

$$B=P^{-1}AP$$

$$\chi_B(t)=|tE-B|=|tE-P^{-1}AP|$$

$$=|tP^{-1}EP-P^{-1}AP|=|P^{-1}(tE-A)P|$$

$$=|P^{-1}|\,|tE-A|\,|P|=|tE-A|=\chi_A(t) \quad \square$$

注：设 $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V)$. $A, B \in M_n(F)$ 是 $\mathscr{A}$ 在 V 的两组不同的基下的矩阵

则 $A \sim_s B \Rightarrow \chi_A = \chi_B$

定义：设 $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(V)$. A 是 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵. 则 χ_A 也称为 $\mathscr{A}$ 的特征多项式，记为 $\chi_{\mathscr{A}}$.

注 $\deg \chi_A = n$, 且首一.

注：设 $A \in M_n(F)$. 则 A 可以看成线性算子

$$A: F^n \longrightarrow F^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

从而 A 也有特征向量.

例：$\mathscr{A}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基

$\mathscr{A}(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\mathscr{A}(\vec{e_2}) = \vec{e_1} - \vec{e_2}$

求 $\mathscr{A}$ 的特征根和特征向量

$$(\mathscr{A}(\vec{e_1}), \mathscr{A}(\vec{e_2})) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) - 1 = t^2 - 2$$

特征值 $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

$$\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + (\sqrt{2}+1)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha(\sqrt{2}-1) \end{cases} \alpha \in F$$

λ_1 对应的特征向量为

$\alpha(\vec{e_1} + (\sqrt{2}-1)\vec{e_2})$, $\alpha \neq 0$.

类似 λ_2 对应的特征向量是

$\alpha(\vec{e_1} - (\sqrt{2}-1)\vec{e_2})$, $\alpha \neq 0$.

例：$\mathscr{A}: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 是 $\mathbb{C}^3$ 的基. $\mathscr{A}(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$, $\mathscr{A}(\vec{e_2}) = \vec{e_2}$,

$\mathscr{A}(\vec{e_3}) = \vec{e_2} + \vec{e_3}$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量

解：

$(\mathcal{A}(\vec{e_1}), \mathcal{A}(\vec{e_2}), \mathcal{A}(\vec{e_3})) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$

$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$

特征值 $\lambda = 1$

$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

解空间 $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| v_1, v_2 \in F \right\}$

特征向量 $\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2}$，$\alpha_1, \alpha_2 \in F$ 不全为零

§4.3 特征子空间

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda$ 是 $\mathcal{A}$ 在 F 中的特征根。$V^\lambda := \{\vec{v} \in V \mid \mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\}$

称其为 $\mathcal{A}$ 关于 λ 的特征子空间

命题 4.3 设 λ 是线性算子 $\mathcal{A}$ 在 F 中的特征值。则 V^λ 是 $\mathcal{A}$-子空间

证：验证 V^λ 是子空间

设 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$，$\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V^\lambda$

$\mathcal{A}(\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}) = \alpha_1 \mathcal{A}(\vec{v_1}) + \alpha_2 \mathcal{A}(\vec{v_2})$

$= \alpha_1 \lambda \vec{v_1} + \alpha_2 \lambda \vec{v_2}$

$= \lambda(\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2})$

于是 $\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} \in V^\lambda$，$V^\lambda$ 是子空间

再验证 V^λ 是 $\mathcal{A}$-不变的。

设 $\vec{v} \in V^\lambda$，$\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \in V^\lambda$ 目

$\cancel{\mathcal{A}(\mathcal{A}(\vec{v})) = \mathcal{A}(\lambda)}$

定理 4.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda_1, \dots \lambda_m$ 是 $\mathcal{A}$ 在 F 中的特征根，互不相同。则

$V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_m}$ 是直和

证：对 m 归纳。当 $m=1$ 时 显然

设 $m-1$ 时定理成立

于是 $V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_{m-1}}$ 是直和。

设 $\vec{v}_1 \in V^{\lambda_1}, \cdots, \vec{v}_{m-1} \in V^{\lambda_{m-1}}, \vec{v}_m \in V^{\lambda_m}$

使得

$$\vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_{m-1} + \vec{v}_m = \vec{0} \quad \cdots ①$$

对①的两侧作用 $\mathcal{A}$ 得

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\vec{v}_{m-1} + \lambda_m\vec{v}_m = \vec{0} \quad \cdots ②$$

λ_m ① − ② 得

$$(\lambda_m-\lambda_1)\vec{v}_1 + \cdots + (\lambda_m-\lambda_{m-1})\vec{v}_{m-1} = \vec{0}$$

由归纳假设和第一章命题4.1得

$$(\lambda_m-\lambda_1)\vec{v}_1 = \cdots = (\lambda_m-\lambda_{m-1})\vec{v}_{m-1} = \vec{0}$$

于是 $\because \lambda_m - \lambda_i \neq 0, \quad i=1,2,\ldots m-1$

$\therefore \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_{m-1} = \vec{0}$

由①可知 $\vec{v}_m = \vec{0}$

再由第一章命题4.1 $V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_{m-1}} + V^{\lambda_m}$ 是

直和.

例. 在上节第一个例子中

$V^{\lambda_1} = \langle \vec{e}_1 + (\sqrt{2}-1)\vec{e}_2 \rangle, \quad V^{\lambda_2} = \langle \vec{e}_1 - (\sqrt{2}+1)\vec{e}_2 \rangle$

$$V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2}$$

在上节第二个例子中

$$V^{\lambda} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle.$$

定义: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, λ 是 $\mathcal{A}$ 在 F 中的特征根. $\dim V^{\lambda}$ 称为 λ 的几何重数

λ 在 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 中的重数称为 λ 的代数重数.

命题4.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, λ 是 $\mathcal{A}$ 在 F 中的特征根. 则 λ 的几何重数小于等于它的代数重数.

证: 设 $d = \dim V^{\lambda}$. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d$ 是 V^{λ} 的一组基. 把它扩充为

V 的一组基 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n$ 为

$(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\dots,\mathcal{A}(\vec{e}_d),\mathcal{A}(\vec{e}_{d+1}),\dots,\mathcal{A}(\vec{e}_n))$

$=(\lambda\vec{e}_1,\dots,\lambda\vec{e}_d,\mathcal{A}(\vec{e}_{d+1}),\dots,\mathcal{A}(\vec{e}_n))$

$$=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n)\underbrace{\begin{pmatrix}\begin{smallmatrix}\lambda&&\\&\ddots_d&\\&&\lambda\end{smallmatrix} & B\\ O & C\end{pmatrix}}_{A}$$

$\chi_{\mathcal{A}}(t)=\chi_A(t)=(t-\lambda)^d g(t)$

其中 $g(t)\in F[t]$

设 m 是 λ 的代数重数. 则

$\chi_{\mathcal{A}}(t)=(t-\lambda)^m h(t)$. $\gcd(h,t-\lambda)=1$

$\Rightarrow d\le m$ $\boxed{/}$

注例: 在4.2节例一的 $\chi_A(t)=t^2-2=(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$

~~$\lambda_1=\sqrt{2}$~~.

$\lambda_1=\sqrt{2}$ 的几何和代数重数都是1

$\lambda_2=-\sqrt{2}$ - - - - - - - - - -

在4.2 例2中

$\chi_{\mathcal{A}}(t)=(t-1)^3$, $\dim V^\lambda=2$

$\lambda=1$ 几何重数为2. 而代数重数为3

§4.4 特征多项式中的相似不变量

设 $A,B\in M_n(F)$. $A\sim_s B$

则 $\chi_A(t)=\chi_B(t)$. (命题4.2)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

$$\chi_A=|tE-A|=\begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12}, & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & t-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ & \cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$=t^n+\alpha_{n-1}t^{n-1}+\dots+\alpha_1 t+\alpha_0$. $\alpha_i\in F$.

于是 $\alpha_{n-1},\dots,\alpha_1,\alpha_0$ 都是相似不变量

$\alpha_{n-1}=-(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})=-\mathrm{tr}(A)$

$\alpha_{n-2}=$ 所有二阶主子式之和

$\alpha_{n-i}=(-1)^{n-i}$[所有i阶主子式之和

$\vdots$

$\alpha_0=(-1)^n\det(A)$.

于是 A 的各阶主子式之和都是相似不变量.

特别地 A 可逆 $\Leftrightarrow$ $\chi_A(0) \neq 0$

即 0 不是 A 的特征根.

例 设 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$, $\alpha_i \in F$

求 A 的特征值.

解 $\because$ rank$(A) \leq 1$ $\therefore$ 当 $k \geq 2$ 时,

A 的所有 k 阶主子式都为零

于是

$\chi_A = t^n - \mathrm{tr}(A)\, t^{n-1}$

A 有两个特征根 0 和 $\mathrm{tr}(A)$

其中 $\mathrm{tr}(A) = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$.