§5 特征子空间的应用

§5.1 线性算子和矩阵的对角化

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，$\mathcal{A}$ 在 F 中互不相同的特征根的集合称为 $\mathcal{A}$ 在 F 上的谱（spectrum）记为 $\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})$。类似地，对于 $A\in M_n(F)$，可定义 $\mathrm{spec}_F(A)$。

例：设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\in M_4(\mathbb{Q})$

计算 $\mathrm{spec}_{\mathbb{Q}}(A)$，$\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(A)$ 和 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)$

解：$\chi_A(t)=|tE-A|$

$$=\begin{vmatrix}t&-1&0&0\\0&t&-1&0\\0&0&t&-1\\0&0&1&t\end{vmatrix}=t^2(t^2+1)$$

$\mathrm{spec}_{\mathbb{Q}}(A)=\{0\}$，$\mathrm{spec}_{\mathbb{Q}}(A)=\{0\}$

$\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A)=\{0,\sqrt{-1},-\sqrt{-1}\}$

定义：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$。如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是对角的，则称 $\mathcal{A}$ 是可对角化的。设 $A\in M_n(F)$，如果 A 相似于某个对角矩阵，则称 A 在 F 上是可对角化的。

注：A 在 F 上可对角化

$\iff \exists\, P\in GL_n(F)$，对角 $D\in M_n(F)$ 使得

$$A=P^{-1}DP$$

定理 5-1　设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，则下列断言等价：

(i) $\mathcal{A}$ 可对角化 $\iff$ $\boxed{\cancel{V=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{spec}_F(\mathcal{A})}\mathcal{A}^{\lambda}}}$

(ii) $\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，其中 $n=\dim V$

(iii) $V=\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{spec}(\mathcal{A})}V^{\lambda}$.

证: 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的基底 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵

为 $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$. 则

$\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_i) = \alpha_i \vec{\varepsilon}_i$, $i = 1, \cdots, n$

于是 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 都是 $\mathcal{A}$ 的特征向量

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 设 $\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_n$ 是 $\mathcal{A}$ 的线性无关的特征向量. 不妨设

$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{i_1}$ 对应的特征根是 λ_1

$\vec{v}_{i_1+1}, \cdots \vec{v}_{i_2}$ - - . . . λ_2

. . .

$\vec{v}_{i_{m-1}+1} \cdots \vec{v}_{i_m}$ - - . . . λ_m

其中 $i_m = n$, $\lambda_1, \cdots \lambda_m \in F$. 两两不同

设 $\operatorname{spec}_F(\mathcal{A}) = \{\lambda_1, \cdots \lambda_m, \lambda_{m+1}, \cdots \lambda_k\}$

令 $U_1 = \langle \vec{v}_1, \cdots \vec{v}_{i_1} \rangle$

$U_2 = \langle \vec{v}_{i_1+1}, \cdots \vec{v}_{i_2} \rangle$

$\vdots$

$U_m = \langle \vec{v}_{i_{m-1}+1}, \cdots, \vec{v}_{i_m} \rangle$

则 $U_1 \subset V^{\lambda_1}, \cdots, U_m \subset V^{\lambda_m}$

~~由定理4.1~~

~~$V^{\lambda_1} + \cdots + V^{\lambda_m}$ 是直和~~

~~于是 $U_1 + \cdots + U_m$ 也是直和~~

由第一章命题4.1.

$U_1 + \cdots + U_m$ 是直和

由第一章命题4.2

$\dim(U_1 + \cdots + U_m) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_m$

$= i_1 + i_2 - i_1 + \cdots + i_m - i_{m-1} = i_m = n$

于是 $U_1 + \cdots + U_m = V$.

于是 $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_m}=V$ 是 V 的直和分解

若 $k>m$, 则 $\dim V^{\lambda_{m+1}}>0$ 且

$V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_m}+V^{\lambda_{m+1}}$ 是直和

(定理4.1) 且 则 $\dim V>n$ →←

于是 $spec_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\ldots\lambda_m\}$

且 $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_m}=\bigoplus_{\lambda\in spec_F(\mathcal{A})}V^{\lambda}$

(iii) ⇒ (i) 设 $spec_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$

且 $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_m}$ (*)

设 $\vec{e}_{j1},\ldots,\vec{e}_{jk_j}$ 是 V^{λ_j} 的一组基 $j=1,\ldots m$

由 (*) $\vec{e}_{11},\cdots\vec{e}_{1k_1},\cdots,\vec{e}_{m1},\cdots\vec{e}_{mk_m}$ 是 V 的一组基.

~~因为 $\vec{e}_{11},\cdots,e_{1k_1},\cdots,e_{m1},\cdots,e_{mk_m}$~~

$\because\ \forall j\in\{1,\ldots m\},\ k\in\{1,\ldots k_j\}$

$\mathcal{A}(\vec{e}_{jk})=\lambda_j.$

$\therefore$ $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\lambda_m \ddots \lambda_m}_{k_m} \end{pmatrix}$$

□

推论5.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\dim V=n$ 如果 $\mathcal{A}$ 在 F 中有 n 个互不相同的特征根. 则 $\mathcal{A}$ 可对角化

证: 设 $spec_F(\mathcal{A})=\{\lambda_1,\ldots\lambda_n\}$

则 $\dim(V^{\lambda_i})>0$

$\because$ $\lambda_1,\ldots\lambda_n$ 互不相同

$\therefore$ $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_n}$ 是直和

$\dim(V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_n})$

$=\dim(V^{\lambda_1})+\cdots+\dim(V^{\lambda_n})\geq n$

$\because$ $V^{\lambda_1}+\cdots+V^{\lambda_n}\subset V$ 且 $\dim V=n.$

~~[illegible]~~ $V_1^{\lambda_1}+\cdots+V_u^{\lambda_u}=V$

由定理5.1. $\mathcal{A}$ 可对角化.

~~例~~

注：把矩阵 $A\in M_n(F)$ 看作 $F^n\to F^n$ 的线性算子. 我们有同样的结论.

例：$\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ 由下列关系确定

$$(\mathcal{A}(\vec{e_1}),\mathcal{A}(\vec{e_2}),\mathcal{A}(\vec{e_3}))=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}}_{A}$$

($\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ 是标准基).

问：$\mathcal{A}$ 是否能对角化？如果能，求 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是对角阵.

证：$\chi_{\mathcal{A}}(t)=|tE-A|$

$$=\begin{vmatrix}t-2&-1&-1\\-1&t-2&-1\\-1&-1&t-2\end{vmatrix}=(t-4)(t-1)^2$$

$\mathcal{A}$ 有两个特征根

$\lambda_1=4,\quad\lambda_2=1$

由 ~~命题~~4.1

$\dim V^{\lambda_1}=1,\quad 1\leq\dim V^{\lambda_2}\leq 2$

求 V^{λ_1} 的一组基

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$V^{\lambda_1}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

求 V^{λ_2} 的一组基

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$V^{\lambda_2}=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$\cancel{\dim V^{\lambda_2}=2}$,

$3=\dim V^{\lambda_1}+\dim V^{\lambda_2}=\dim(V^{\lambda_1}+V^{\lambda_2})$

$\Rightarrow V^{\lambda_1}+V^{\lambda_2}=\mathbb{R}^3$

$\mathcal{A}$ 可对角化

5

令 $\vec{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$(\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_1),\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_2),\mathcal{A}(\vec{\varepsilon}_2))=(\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}4&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例: 证明 ~~幂零算子~~

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\ & & & & &\\0&0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{n\times n}$$

当 $n>1$ 时 不能对角化.

$$\chi_A=|tE-A|=\begin{vmatrix}t&-1&0&0&\cdots&0\\0&t&-1&0&\cdots&0\\0&0&t&\cdots&&\\ &&&\ddots&&\\0&0&\cdots&&0&-1\\0&0&\cdots&&&t\end{vmatrix}$$

$=t^n$

A 的特征根是 $\lambda=0$

V^λ 是 $A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 的解空间

$\because$ $\operatorname{rank}(A)=n-1$ $\therefore$ $\dim V^\lambda=1$

所以 $\dim V^\lambda<\dim V=n$.

由定理5.1, A 不能被对角化

定理5.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

$\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow$ (i) $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 F 中可以分解为一次多项式之积. (ii) $\mathcal{A}$ 在每个特征根的代数重数与几何重数相同

证: $\Rightarrow$: 设 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基 $\vec{\varepsilon}_1,\dots,\vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 $\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1&&0\\&\ddots&\\0&&\alpha_n\end{pmatrix}}_{B}$

则 $\chi_{\mathcal{A}}(t)=\begin{vmatrix}t-\alpha_1&&\\&\ddots&\\&&t-\alpha_n\end{vmatrix}=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$

于是 (i) 满足

于是 $\mathcal{A}$ 的特征根都在 F 中.

设 $\lambda\in\operatorname{spec}_F(\mathcal{A})$. λ 在 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 重复出现了 k 次. 则 $(t-\lambda)^k\mid\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 但 $(t-\lambda)^{k+1}\nmid\chi_{\mathcal{A}}(t)$. 于是 λ 的代数重数是 k. 另一方面 V^λ 是

$$(\lambda E-B)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$ 的解空间

λ的几何~~数~~重数 $= \dim V^{\lambda}$

$= n - \mathrm{rank}(\lambda E - B) \geq k$

（∵ $\lambda E - B$ 是对角阵，且在对角线上有 k 个零）

于是 ~~dim V~~ λ的几何重数 = λ的代数重数

例：第一卷 p72 例3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

求 A^m

解：设 $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. $f_{m+1} = f_m + f_{m-1}$

Fibonacci 序列

$f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, …

$$A = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}$$

断言：$A^m = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}$ $m \geq 1$

断言之证明

$m = 1$ ✓

设 $m-1$ 时成立

$$A^m = A^{m-1}A = \begin{pmatrix} f_{m-2} & f_{m-1} \\ f_{m-1} & f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_{m-2} + f_{m-1} \\ f_m & f_{m-1} + f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix}$$

$= t^2 - t - 1$ $\Delta = 5 > 0$

∴ A 有两个不同的实根 ⇒ A 可对角化

$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

V^{λ_1} 是 $\frac{1+\sqrt{5}}{2} x_1 - x_2 = 0$ 的解空间

$V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

则 $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$\left[B^{-1}AB = B^{-1}(A\vec{B}^{(1)}, A\vec{B}^{(2)}) = B^{-1}(\lambda_1\vec{B}^{(1)}, \lambda_2\vec{B}^{(2)}) \right.$$

$$= (B^{-1}\lambda_1\vec{B}^{(1)}, B^{-1}\lambda_2\vec{B}^{(2)}) = (\lambda_1 B^{-1}\vec{B}^{(1)}, \lambda_2 B^{-1}\vec{B}^{(2)})$$

$$\left. = \left(\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right]$$

由此可知, $A = B\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B^{-1}$

$$\Rightarrow A^m = B\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix} B^{-1}$$

$$\Rightarrow A^m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^m & \lambda_2^m \\ \lambda_1^{m+1} & \lambda_2^{m+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}, & \frac{-1}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_m = \frac{\lambda_1^m - \lambda_2^m}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right)$$

$$f_m \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \quad m \to \infty$$

Lemma Given a symmetric matrix with integer entries, if the eigenvalues have distinct multipliaities, ~~they~~ then they are integer(s). 7

英译中 再记得之.

如果整系数对称矩阵的特征值的重数两两不同. 则它们都是整数.

证: 设该矩阵为 $A \in M_n(\mathbb{Z})$. 则 $\chi_A(t)$ 为 n 次整系数多项式且首一

设 $\chi_A(t) = p_1(t)^{m_1} \cdots p_s(t)^{m_s}$ 为 $\chi_A(t)$ 在 $\mathbb{Q}[t]$ 中的不可约分解. 因为 $\chi_A(t)$ 首一. 可假设所有 $p_i(t)$ 都首一.

如果 $\deg p_1 > 1$. 则 $p_1(t)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有两个不同根 α_1, α_2 它们是 A 在 $\mathbb{C}$ 上的特征值 且有同样的重数 m_1 矛盾. 于是所有 p_i 都是一次的. 即 $\chi_A(t)$ 的所有根都是有理数 ~~且两两不同~~.

$$\chi_A(t) = (t-\alpha_1)^{m_1} \cdots (t-\alpha_s)^{m_s}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{Q}$. 两两不同. 且 $m_1, \dots, m_s$ 两两不同. 因为 $\chi_A(t) \in \mathbb{Z}$ 且首一. 所以 $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{Z}$ 因

(25)

注 该引理不需要对称这个条件

注 设 $f\in\mathbb{Z}[x]$，首一，则 f 的有理根必为整根

证：设 $f = x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \cdots + f_1 x + f_0$，

其中 $f_i\in\mathbb{Z}$，$i=0,1,\cdots,m-1$.

设 $r\in\mathbb{Q}$ 且 $f(r)=0$. 设 $r=\frac{p}{q}$，其中

$p,q\in\mathbb{Z}$ 且 $\gcd(p,q)=1$，$q>0$

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p^m}{q^m} + f_{m-1}\frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \cdots + f_1\frac{p}{q} + f_0$$

$$= \frac{p^m + f_{m-1}q\,p^{m-1} + \cdots + f_1 q^{m-1}p + f_0 q^m}{q^m}$$

$$\Rightarrow \quad p^m = -q\left(f_{m-1}p^{m-1} + \cdots + f_1 q^{m-2}p + f_0 q^{m-1}\right)$$

$\because \gcd(p,q)=1 \quad \therefore q=1 \Rightarrow$

$r\in\mathbb{Z}$ ☐

§5.2 复数方阵的三角化

引理5.2 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间，$n>0$，$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$。则 $\mathcal{A}$ 有 $n-1$ 维不变子空间。

证：回忆 $\mathcal{A}$ 的对偶算子

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[dr, "f\circ\mathcal{A}"'] & V \arrow[d, "f\in V^*"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \mathcal{A}^*: V^* &\longrightarrow V^* \\ f &\longmapsto f\circ\mathcal{A} \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V^*)$$

$\chi_{\mathcal{A}^*}(t)\in\mathbb{C}[t]$ 且次数为正。由代数学基本定理，$\mathcal{A}^*$ 至少有一个特征根 λ。设 $g\in V^*\setminus\{0\}$ 是 λ 对应的特征向量，则 $\langle g\rangle$ 是 V^* 中一维子空间。回忆

$$\langle g\rangle^\circ=\{\vec{v}\in V\mid g(\vec{v})=0\}$$

则 $\dim\langle g\rangle^\circ=n-1$。只要验证 $\langle g\rangle^\circ$ 是 $\mathcal{A}$-子空间即可。$\forall\vec{v}\in\langle g\rangle^\circ$

$$g(\mathcal{A}(\vec{v}))=g\circ\mathcal{A}(\vec{v})=\mathcal{A}^*(g)(\vec{v})=(\lambda g)(\vec{v})$$
$$=\lambda(g(\vec{v}))=\lambda\cdot 0=0\Longrightarrow\mathcal{A}(\vec{v})\in\langle g\rangle^\circ \quad \boxtimes$$

定理5.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$，其中 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间。则存在 V 中一组基，使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是上三角型的。 ⑧

证：对 n 归纳。当 $n=1$ 时，定理显然成立。设 $n-1$ 时定理成立。设 $n=\dim V$。

由引理5.2，V 中有 $n-1$ 维 $\mathcal{A}$-子空间 U。设 $\mathcal{A}|_U=\mathcal{A}_U$，则 $\mathcal{A}_U\in\mathcal{L}(U)$。

由归纳假设，$\exists$ U 中基底 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1}$ 使得 $\mathcal{A}_U$ 在该基下的矩阵为 $T_{n-1}\in M_{n-1}(\mathbb{C})$ 且 T_{n-1} 是上三角型的。再设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n$ 是 V 的一组基

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1),\dots\mathcal{A}(\vec{e}_{n-1}),\mathcal{A}(\vec{e}_n))=(\mathcal{A}_U(\vec{e}_1),\dots\mathcal{A}_U(\vec{e}_{n-1}),\mathcal{A}(\vec{e}_n))$$

$$=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n-1},\vec{e}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} T_{n-1} & \begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{matrix} \\ \underbrace{0\ \cdots\ 0}_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}}_{T_n}，其中 \alpha_i\in\mathbb{C}$$

显然 T_n 也是上三角形的 $\boxtimes$

推论 5.2. 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 相似于一个上三角形矩阵.

证: 设 $\mathcal{A}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则 A 是 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵. ~~于是~~ 由定理 5.3, ~~A~~ 在 $\mathbb{C}^n$ 的另一组基下的矩阵为上三角形矩阵 T. 则 $A \sim_s T$ ☒

§5.3. 商映射, 循环子空间和 Cayley – Hamilton 定理

引理 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. U 是 $\mathcal{A}$-子空间

定义: $\overline{\mathcal{A}}: V/U \longrightarrow V/U$

$$\vec{v}+U \longmapsto \mathcal{A}(\vec{v})+U$$

则 $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/U)$.

证: 先验证 $\overline{\mathcal{A}}$ 是良定义的

设 $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V$ 使得 $\vec{u}_1 + U = \vec{u}_2 + U$

即 $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in U$

则 $\mathcal{A}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \in U$ (U 是 $\mathcal{A}$-子空间)

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{u}_1) - \mathcal{A}(\vec{u}_2) \in U$ ($\mathcal{A}$ 是线性的)

$\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{u}_1)+U = \mathcal{A}(\vec{u}_2)+U$ ($\sim_U$ 的定义)

$\Rightarrow \overline{\mathcal{A}}(\vec{u}_1+U) = \overline{\mathcal{A}}(\vec{u}_2+U)$ ($\overline{\mathcal{A}}$ 的定义)

$\Rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ 是良定义的映射.

再验证 $\overline{\mathcal{A}}$ 是线性的 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$

$\overline{\mathcal{A}}(\alpha_1(\vec{v}_1+U) + \alpha_2(\vec{v}_2+U))$

$= \overline{\mathcal{A}}((\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) + U)$ [V/U 中线性运算]

$= \mathcal{A}(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) + U$ [$\overline{\mathcal{A}}$ 的定义]

$= [\alpha_1\mathcal{A}(\vec{v}_1) + \alpha_2\mathcal{A}(\vec{v}_2)] + U$ [$\mathcal{A}$ 是线性的]

$= \alpha_1(\mathcal{A}(\vec{v}_1)+U) + \alpha_2(\mathcal{A}(\vec{v}_2)+U)$ [V/U 中线性运算]

$= \alpha_1\overline{\mathcal{A}}(\vec{v}_1+U) + \alpha_2(\overline{\mathcal{A}}(\vec{v}_2+U))$ [$\overline{\mathcal{A}}$ 的定义] ☒

定义: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-子空间

则 $\overline{\mathcal{A}}: V/U \longrightarrow V/U$

$$\vec{v}+U \longmapsto \mathcal{A}(\vec{v})+U$$

称为 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子

命题5.1 设 $\mathcal{A}\in L(V)$，U是$\mathcal{A}$-子空间

$\pi: V \to V/U$ 自然投射

则 (i) $\pi\circ\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}}\circ\pi$，其中$\overline{\mathcal{A}}$是$\mathcal{A}$关于$U$的商映射

(ii) 设 $\varphi: V/U \to V/U$ 满足 $\pi\circ\mathcal{A}=\varphi\circ\pi$. 则 $\varphi=\overline{\mathcal{A}}$

证:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/U \arrow[r, "\overline{\mathcal{A}}"] \arrow[r, dashed, "\varphi"', shift right=2] & V/U \end{tikzcd}$$

(i) $\forall \vec{v}\in V$

$\pi\circ\mathcal{A}(\vec{v})=\pi(\mathcal{A}(\vec{v}))=\mathcal{A}(\vec{v})+U$

$\overline{\mathcal{A}}\circ\pi(\vec{v})=\overline{\mathcal{A}}(\vec{v}+U)$

$=\mathcal{A}(\vec{v})+U$

$\Rightarrow \pi\circ\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}}\circ\pi$

(ii). $\forall\vec{v}\in V$

$\varphi\circ\pi(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}+U)$

$\parallel$

$\pi\mathcal{A}(\vec{v})=\pi(\mathcal{A}(\vec{v}))=\mathcal{A}(\vec{v})+U$

$\Rightarrow \varphi(\vec{v}+U)=\mathcal{A}(\vec{v})+U$

$\Rightarrow \varphi=\overline{\mathcal{A}}$ ☒

例: 设U是V的子空间. 则U关于恒同映射是不变的.

$$\overline{\mathcal{E}}: V/U \to V/U$$
$$\vec{v}+U \mapsto \mathcal{E}(\vec{v})+U=\vec{v}+U$$

于是商映射$\overline{\mathcal{E}}$是V/U上的恒同映射.

同理 $\overline{\mathcal{O}}$是V/U的零映射.

定理5.3 设V是n维线性空间，$n>1$

设$\mathcal{A}\in S(V)$，U是$\mathcal{A}$-子空间，$d=\dim U>0$

设$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d$是$U$的基，$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n$是$V$的基. 记$\mathcal{A}|_U$为$\mathcal{A}_U$，$\mathcal{A}$关于$U$的商算子为$\overline{\mathcal{A}}$. 令

A_U为$\mathcal{A}_U$在$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d$下的矩阵

$\overline{A}$为$\overline{\mathcal{A}}$在$\vec{e}_{d+1}+U,\dots,\vec{e}_n+U$下的矩阵

则$\mathcal{A}$在$\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\dots,\vec{e}_n$下的矩阵

是 $A=\begin{pmatrix} A_U & B \\ O & \overline{A}\end{pmatrix}$，其中$B\in F^{d\times(n-d)}$

注 $\because A_U \in \mathcal{L}(U) \therefore A_U \in M_d(F)$ 存在且唯一

$\because \bar{A} \in \mathcal{L}(V/U)$ 而 $\vec{e}_{d+1}+U, \cdots \vec{e}_n+U$ 是 V/U 的一组基 [见第章 命题5.1 的证明]

证: $\forall j \in \{1, \cdots d\}$, $\vec{e}_j \in U$

$$A(\vec{e}_j) = A_U(\vec{e}_j) = (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_d) \overrightarrow{A_U^{(j)}}$$

$$= (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_d) \overrightarrow{A_U^{(j)}} + (\vec{e}_{d+1}, \cdots \vec{e}_n) \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} n-d$$

$$= (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) \begin{pmatrix} \vec{A}_U^{j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n) \overrightarrow{A^{(j)}}$$

$\forall j \in \{d+1, \cdots, n\}$

$$A(\vec{e}_j) + U = \bar{A}(\vec{e}_j + U) = (\vec{e}_{d+1}+U, \cdots \vec{e}_n+U) \overrightarrow{\bar{A}^{(j)}}$$

$$A(\vec{e}_j) + U = (\vec{e}_{d+1}, \cdots \vec{e}_n) \overrightarrow{\bar{A}^{(j)}} + U$$

$$A(\vec{e}_j) = (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_d) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{dj} \end{pmatrix} + (\vec{e}_{d+1}, \cdots \vec{e}_n) \overrightarrow{\bar{A}^{(j)}}$$

其中 $b_{1j}, \cdots b_{dj} \in F$

$$A(\vec{e}_j) = (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1} \cdots \vec{e}_n) \begin{pmatrix} B^{(j)} \\ \overrightarrow{\bar{A}^{(j)}} \end{pmatrix}$$

其中 $B = \begin{pmatrix} b_{1d+1} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{dd+1} & & b_{dn} \end{pmatrix}$

$$A(\vec{e}_j) = (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \cdots \vec{e}_n) \overrightarrow{A^{(j)}}$$

$$\Rightarrow (A(\vec{e}_1), \cdots A(\vec{e}_d), A(\vec{e}_{d+1}), \cdots A(\vec{e}_n))$$

$$= (\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \cdots \vec{e}_n) A \quad \square$$

推论5.2 ~~[illegible]~~ 沿用定理5.3中记号

$$\chi_A(t) = \chi_{\bar{A}}(t) \chi_{A_U}(t)$$

证:

$$\chi_A(t) = |tE_n - A| = \left| t\begin{pmatrix} E_d & 0 \\ 0 & E_{n-d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_U & B \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} tE_d - A_U & -B \\ 0 & tE_{n-d} - \bar{A} \end{vmatrix} = |tE_d - A_U| \, |tE_{n-d} - \bar{A}|$$

$$= \chi_{A_U}(t) \chi_{\bar{A}}(t)$$

命题5.2 设 $A\in\mathcal{L}(V)$. U是A一个不变子空间 $p\in F[t]$ 则

(i) U是 $p(A)$ 一子空间

(ii) 设 $\overline{A}$ 和 $\overline{p(A)}$ 是 A 和 $p(A)$ 关于U的商算子. 则

$$\overline{p(A)} = p(\overline{A})$$

证: (i) 设 $\vec{u}\in U \Rightarrow A(\vec{u})\in U$

$\Rightarrow A^2(\vec{u})\in U \Rightarrow \cdots$ 由此可知

$\forall k\in\mathbb{N}$ $A^k(\vec{u})\in U$. 即

$\boxed{U\text{也是 }A^k\text{一子空间}}$ (引理到)

设 $B\in\mathcal{L}(V)$. ~~如果~~ U 也是B子空间.

则 $\forall \alpha,\beta\in F$. $\vec{u}\in U$

$(\alpha A+\beta B)(\vec{u}) = \alpha A(\vec{u})+\beta B(\vec{u})\in U$

(∵ $A(\vec{u})$, $B(\vec{u})\in U$)

$\Rightarrow$ $\boxed{U\text{是}(\alpha A+\beta B)\text{一子空间}}$

由上述两个结论可知. U是$p(A)$子空间.

(ii) $\overline{A^0} = \overline{E} = (\overline{A})^0$

$\overline{A^1} = \overline{A} = \overline{A}^1$

设 $\overline{A^k} = \overline{A}^k$. 则

$\forall \vec{v}\in V$ $\overline{A^{k+1}}(\vec{v}+U) = A^{k+1}(\vec{v})+U$

$= \overline{A}(A^k(\vec{v})+U) = \overline{A}(\overline{A^k}(\vec{v}+U))$

$= \overline{A}(\overline{A}^k(\vec{v}+U)) = \overline{A}^{k+1}(\vec{v}+U)$

$\boxed{\Rightarrow \overline{A^k} = \overline{A}^k \quad \forall k\in\mathbb{N}}$

$\forall \vec{v}\in V$

$\overline{\alpha A+\beta B}\circ\pi(\vec{v}) = \overline{(\alpha A+\beta B)}(\vec{v}+U) = \pi(\alpha A(\vec{v})+\beta B(\vec{v}))$

$= [\alpha A(\vec{v})+\beta B(\vec{v})]+U$

$(\alpha\overline{A}+\beta\overline{B})\circ\pi(\vec{v}) = \alpha\overline{A}+\beta\overline{B}(\vec{v}+U)$

$= \alpha A(\vec{v})+\beta B(\vec{v})+U$

由命题5.1(2) $\boxed{\overline{\alpha A+\beta B} = \alpha\overline{A}+\beta\overline{B}}$

由上述两个结论 $\overline{p(A)} = p(\overline{A})$ ∎