回忆: 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, U 是 $\mathcal{A}$-子空间

则 $\bar{\mathcal{A}}\in\mathcal{L}(V/U)$.

$$\boxed{\text{设 } \mathcal{A}_U=\mathcal{A}|_U.\ \text{则}\quad \chi_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}_U}\cdot\chi_{\bar{\mathcal{A}}}}$$

定理5.4 推论5.2

$\mathcal{A}$ 有矩阵表示 $A=\begin{pmatrix}A_U & *\\ 0 & \bar{A}\end{pmatrix}$

其中 A_U 是 $\mathcal{A}_U$ 的矩阵

$\bar{A}$ 是 $\bar{\mathcal{A}}$ 的矩阵

定义: 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V$. 由

$\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \cdots$

生成的子空间称为由 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 生成的循环子空间. 记为

$F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

命题5.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $\vec{v}\in V$

(i) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

(ii) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\{p(\mathcal{A})(\vec{v})\mid p\in F[t]\}$

(iii) 若 $\dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 为 d $\Longleftrightarrow$ $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基 (这里 $\vec{v}\neq\vec{0}$)

(i) 设 $\vec{u}\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 则 $\exists\ m\in\mathbb{N}$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\in F$

使得 $\vec{u}=\alpha_0\vec{v}+\alpha_1\mathcal{A}(\vec{v})+\cdots+\alpha_m\mathcal{A}^m(\vec{v})$

则 $\mathcal{A}(\vec{u})=\alpha_0\mathcal{A}(\vec{v})+\alpha_1\mathcal{A}^2(\vec{v})+\cdots+\alpha_m\mathcal{A}^{m+1}(\vec{v})$

$\in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ (i) 成立

(ii) 设 $p\in F[t]$. 把 p 写成

$p(t)=\beta_m t^m+\beta_{m-1}t^{m-1}+\cdots+\beta_0$

其中 $\beta_i\in F$

则 $p(\mathcal{A})=\beta_m\mathcal{A}^m+\beta_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}+\cdots+\beta_0\mathcal{E}$

$p(\mathcal{A})(\vec{v})=\beta_m\mathcal{A}^m(\vec{v})+\beta_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}(\vec{v})+\cdots+\beta_0\vec{v}$

于是 $\{p(\mathcal{A})(\vec{v})\mid p\in F[t]\}$ 恰是 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \cdots$ 的所有线性组合, (ii) 成立

(iii) "$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$" 设 k 为使得

$\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$ 线性无关

的最大正整数 则 $\exists\ \alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{k-1} \in F$

使得 $\mathcal{A}^{k}(\vec{v}) = \alpha_0 \vec{v} + \alpha_1 \mathcal{A}(\vec{v}) + \cdots + \alpha_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$

令 $f(t) = t^{k} - \alpha_{k-1} t^{k-1} - \cdots + \alpha_1 t - \alpha_0$

则 $f(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$

设 $\vec{u} \in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$. 由 (ii), $\exists\ p \in F[t]$

使得 $\vec{u} = p(\mathcal{A})(\vec{v})$

由多项式除法

$$p(t) = g(t) f(t) + r(t),$$

其中, $g, r \in F[t]$ $\quad \deg r < k$

于是 $p(\mathcal{A}) = g(\mathcal{A}) f(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$

$$p(\mathcal{A})(\vec{v}) = g(\mathcal{A}) \cdot f(\mathcal{A})(\vec{v}) + r(\mathcal{A})(\vec{v})$$

$$\vec{u} = r(\mathcal{A})(\vec{v})$$

$\because \deg r < k \quad \vec{u} \in \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v}) \rangle$

于是 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots \mathcal{A}^{k-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 的一组基. 从而 $k = d$.

例: 设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

设 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 和 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\vec{w}$ 的维数

解: $\mathcal{A}^0\vec{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathcal{A}^1\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\because \dim \mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} \leqslant 2 \quad \therefore \dim \mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} = 2$

$\mathcal{A}^0\vec{w} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A}^1\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\vec{w}) = 1.$

定义: 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{v} \in V$, $p \in F[t]$

(i) 如果 $p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$, 则称 $p(t)$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式

(ii) 在关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的所有零化多项式中, 非零, 次数最低, 首一的多项式, 称为关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的极小多项式, 记为 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$.

命题5.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{v} \in V$

(i) $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 存在且唯一

(ii) 若 $p \in F[t]$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式，则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} \mid p$. 特别地

$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} \mid \mu_{\mathcal{A}}$

(iii) $\dim_F F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} = \deg \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

证：(i) $\because \mu_{\mathcal{A}} \in F[t] \setminus F$ 且 $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$

$\therefore$ 存在关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的非平凡零化多项式，于是 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 存在.

设 $f, g \in F[t]$ 为关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的两个极小多项式，则

$$(f(\mathcal{A}) - g(\mathcal{A}))(\vec{v}) = f(\mathcal{A})(\vec{v}) - g(\mathcal{A})(\vec{v})$$
$$= \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$$

于是 $f-g$ 也是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式. 因为 $\deg f = \deg g$ 且它们都首一. 所以 $\deg(f-g) < \deg(f)$

由此可知 $f-g=0 \Rightarrow f=g$.

(ii) 设 $p(t)$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式

利用多项式除法

$$p(t) = q(t)\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(t) + r(t)$$

其中 $q, r \in F[t]$. $\deg r < \deg \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

$$p(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A})\circ\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$$
$$p(\mathcal{A})(\vec{v}) = q(\mathcal{A})\circ\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v}) + r(\mathcal{A})(\vec{v})$$
$$\vec{0} = r(\mathcal{A})(\vec{v})$$

于是 $r(t) = 0 \Rightarrow \mu_{\mathcal{A},\vec{v}} \mid p$

(iii) 设 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(t) = t^d + \beta_{d-1}t^{d-1} + \cdots + \beta_0$

$$\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^d + \beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-1} + \cdots + \beta_0\mathcal{E}$$
$$\vec{0} = \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \mathcal{A}^d(\vec{v}) + \beta_{d-1}\mathcal{A}^{d-1}(\vec{v}) + \cdots + \beta_0\vec{v}$$

于是 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v}), \mathcal{A}^d(\vec{v})$ 线性相关. 但 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 线性无关

(否则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 的次数必然小于 d)

由命题 5.3 (iii) $d=\dim F[\mathcal{A}]\vec{v}$. ▨

例：在上面例子中 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=t^2$,

$\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}=t$.

而 $\mu_{\mathcal{A}}=t^2$.

注：在书中 p56. 练习 9
(i) 已证 (ii) 书上有提示，但我们将给另一个证明

~~引理 定理 5.5~~

引理 5.4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\vec{v}\in V$. ~~满足~~
$V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 则 $\mu_{\mathcal{A}}(t)=\chi_{\mathcal{A}}(t)$.
特别地 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 $\mathcal{A}$.

证：设 $n=\dim V$. 由命题 5.3 (iii)

$\vec{v},\ \mathcal{A}(\vec{v}),\ \dots,\ \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$

是 V 的一组基.

设 $\mu_{\mathcal{A}}(t)=t^n+\alpha_{n-1}t^{n-1}+\dots+\alpha_0$

则 $\mathcal{A}^n=-\alpha_0\mathcal{E}-\alpha_1\mathcal{A}-\dots-\alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}$

$\mathcal{A}^n(\vec{v})=-\alpha_0\vec{v}-\alpha_1\mathcal{A}(\vec{v})-\dots-\alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ ④

于是

$$(\mathcal{A}(\vec{v}),\mathcal{A}^2(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^n(\vec{v}))=(\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\dots,\mathcal{A}^{n-1}(\vec{v}))\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&0&-\alpha_0\\1&0&&0&0&-\alpha_1\\0&1&&0&0&-\alpha_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&&1&0&-\alpha_{n-2}\\0&0&&0&1&-\alpha_{n-1}\end{pmatrix}}_{A}$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t)=\chi_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t&0&\cdots&0&0&\alpha_0\\-1&t&\cdots&0&0&\alpha_1\\0&-1&\cdots&0&0&\alpha_2\\&&\ddots&&&\\0&0&\cdots&-1&t&\alpha_{n-2}\\0&0&\cdots&0&-1&t+\alpha_{n-1}\end{vmatrix}$$

按第一行展开得

$$\chi_{\mathcal{A}}(t)=t\begin{vmatrix}t&0&\cdots&0&0&\alpha_1\\-1&t&\cdots&0&0&\alpha_2\\&&\ddots&&&\\0&0&&-1&t&\alpha_{n-2}\\0&0&\cdots&0&-1&t+\alpha_{n-1}\end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}\alpha_0\begin{vmatrix}-1&&0\\&\ddots&\\ *&&-1\end{vmatrix}_{(n-1)}$$

通过对 n 归纳得

$\chi_{\mathcal{A}}(t)=t(t^{n-1}+\alpha_{n-1}t+\dots+\alpha_1)+\alpha_0$
$=t^n+\alpha_{n-1}t^{n-1}+\dots+\alpha_1t+\alpha_0=\mu_{\mathcal{A}}(t)$ ▨

Cayley-Hamilton 定理：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

则 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 $\mathcal{A}$

证：设 $n = \dim V$. 对 n 归纳.

$n=1$ 设 $\mathcal{A}$ 的某矩阵为 (a), $a \in F$

~~$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t - a$~~ 即 $\forall \vec{v} \in V$. $\mathcal{A}\vec{v} = a\vec{v}$

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = |t(1) - (a)| = t - a$$

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} - a\mathcal{E}.$$

$\forall \vec{v} \in V$ $\quad \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \mathcal{A}(\vec{v}) - a\mathcal{E}(\vec{v}) = a\vec{v} - a\vec{v} = \vec{0}$

于是 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

设 $\dim V \in \{1, \ldots, n-1\}$ 时成立

现考虑 n 的情形

情形 1 $\quad V$ 有非平凡 $\mathcal{A}$-子空间 U

则 $\dim U \in \{1, \ldots, n-1\}$. 令 $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}|U$.

则 $\overline{\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子.

则 $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}_U}(t)\,\chi_{\overline{\mathcal{A}}}(t)$ [推论5.2]

于是 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \chi_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}) \circ \chi_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$

设 $\vec{v} \in V$. 则

(*) $\quad \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \chi_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}) \circ \chi_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})(\vec{v})$

令 $\mathcal{B} = \chi_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})$. 由命题5.2 (i),

U 是 $\mathcal{B}$-子空间. 设 $\overline{\mathcal{B}}$ 是 $\mathcal{B}$ 关于 U 的商算子. 则

$$\overline{\mathcal{B}}(\vec{v}+U) = \cancel{\mathcal{B}(\vec{v})+U}\ \overline{\chi_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})}(\vec{v}+U)$$

$= \chi_{\overline{\mathcal{A}}}(\overline{\mathcal{A}})(\vec{v}+U)$ [命题5.2 (ii)]

[归纳假设]

$= \vec{0} + U$

于是 $\mathcal{B}(\vec{v}) + U = \vec{0} + U$

即 $\mathcal{B}(\vec{v}) \in U$ 换言之

$\vec{u} := \chi_{\overline{\mathcal{A}}}(\mathcal{A})(\vec{v}) \in U$

于是 $\chi_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A})(\vec{u}) = \chi_{\mathcal{A}_U}(\mathcal{A}_U)(\vec{u})$

$= \vec{0}$ [归纳假设]

由此和(※)可知

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$$

即 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 定理在情形1下成立.

<u>情形2</u> V 中没有非平凡不变子空间

设 $\vec{v} \in V$ 且 $\vec{v} \neq \vec{0}$. 由命题5.3 (i)

$$V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$$

由引理5.4 $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 $\mathcal{A}$. ∎

<u>推论5.3</u> 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mu_{\mathcal{A}} \mid \chi_{\mathcal{A}}$

特别地 $\deg \mu_{\mathcal{A}} \leq \dim V$

证: 由 Cayley-Hamilton 定理

$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 于是 $\mu_{\mathcal{A}} \mid \chi_{\mathcal{A}}$

(定理2.2 (i)). 特别地

$$\deg \mu_{\mathcal{A}} \leq \deg \chi_{\mathcal{A}} = \dim V.$$

推论5.4 (Cayley-Hamilton定理的矩阵版)

设 $A \in M_n(F)$. 则

(i) $\chi_A(t)$ 零化 A

(ii) $\mu_A(t) \mid \chi_A(t)$. 特别地. $\deg \mu_A \leq n$

证: ~~利~~ 把 A 看成 $F^n \to F^n$ 的线性变换

或利用定理2.1中的代数同构 Φ.

例 Cayley-Hamilton 定理的伪证

设 $A \in M_n(F)$.

$$\chi_A(t) = |tE - A|$$

$$\chi_A(A) = |AE - A| = |A - A| = |O_{n\times n}| = 0$$

∎

§6 各种类型的直和分解

§6.1 预备引理

引理 6.1 设 $p_1, \cdots, p_k, g \in F[t] \setminus \{0\}$

(i) 如果 $\forall i \in \{1, \cdots, k\}$，$\gcd(p_i, g) = 1$，则

$$\gcd(p_1 \cdots p_k, g) = 1$$

(ii) 如果 $p_1, \cdots p_k$ 两两互素，且 $p_i \mid g$，$i = 1 \cdots k$，则 $(p_1 \cdots p_k) \mid g$.

证：(i) $\because \gcd(p_i, g) = 1$ $\therefore$

$\exists\ a_i, b_i \in F[t]$ 使得

$$a_i p_i + b_i g = 1 \quad , i = 1 \ldots k$$

(Bezout 关系)

于是 $\prod_{i=1}^{k} (a_i p_i + b_i g) = 1$

$\Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right) + c g = 1$，其中 $c \in F[t]$

$\Rightarrow \gcd\left(\prod_{i=1}^{k} p_i, g\right) = 1$

(上学期 第五章 定理3.2)

(ii) 对 k 归纳. $k=1$. 显然

设 $k>1$ 且 (ii) 对 $k-1$ 成立.

当 k 时

设 $p = p_1 \cdots p_{k-1}$ ~~…~~ 由归纳假设 $p \mid g$

由 (i) $\gcd(p, p_k) = 1$

$\exists\ a, b \in F[t]$ $a p + b p_k = 1$

$$a p g + b p_k g = g \qquad (*)$$

因为 $p \mid g$ 所以 $g = f p$ 同理

$g = g p_k$，其中 $f, g \in F[t]$

由 $(*)$

$$a p g p_k + b p_k f p = g$$

$\Rightarrow p p_k (a p + b f) = g \Rightarrow (p p_k) \mid g$ ☒

引理 6.2 设 $p_1, \cdots p_k \in F[t] \setminus \{0\}$.

两两互素，则

$$\operatorname{lcm}(p_1 \cdots p_k) = p_1 \cdots p_k$$

证：$\because p_i \mid \operatorname{lcm}(p_1 \cdots p_k)$，$i = 1 \cdots k$

$\therefore p_1 \cdots p_k \mid \operatorname{lcm}(p_1 \cdots p_k)$

[引理 6.1 (ii)]

8

又因为 $p_1 \cdots p_k$ 是 $p_1, \cdots p_k$ 的公倍式

所以 $\mathrm{lcm}(p_1, \cdots p_k) = p_1 \cdots p_k$. ∎

引理 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. $f \in F[t]$ 零化 $\mathcal{A}$

设 $f = pq$ 其中 $p, q \in F[t] \setminus F$ 且 $\gcd(p, q) = 1$

令 $K_p = \ker(p(\mathcal{A}))$ 和 $K_q = \ker(q(\mathcal{A}))$

则 (i) K_p 和 K_q 是 $\mathcal{A}$-子空间且

$V = K_p \oplus K_q$

(ii) ~~[illegible]~~ $p(\mathcal{A})|_{K_q}$ 和 $q(\mathcal{A})|_{K_p}$ 上

都是双射

(iii) 设 $f = \mu_{\mathcal{A}}$ 且 p, q 都首一

则 p 和 q 分别是 $\mathcal{A}|_{K_p}$ 和

$\mathcal{A}|_{K_q}$ 的极小多项式

证: (i) 由命题 3.1 (ii), K_p, K_q 是 $\mathcal{A}$

子空间.

$\because \gcd(p, q) = 1$ $\therefore \exists a, b \in F[t]$

使得 $a(t)p(t) + b(t)q(t) = 1$

于是 $a(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + b(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$

设 $\vec{v} \in V$ 则

$$\underbrace{a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v})}_{\vec{v}_q} + \underbrace{b(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{v})}_{\vec{v}_p} = \mathcal{E}(\vec{v}) = \vec{v} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} q(\mathcal{A})(\vec{v}_q) &= q(\mathcal{A}) \circ a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v}) \\ &= a(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{v}) \\ &= a(\mathcal{A}) \circ (pq)(\mathcal{A})(\vec{v}) \\ &= a(\mathcal{A}) \circ f(\mathcal{A})(\vec{v}) \\ &= a(\mathcal{A}) \circ \mathcal{O}(\vec{v}) = \vec{0} \end{aligned}$$

于是 $\vec{v}_q \in K_q$. 同理 $\vec{v}_p \in K_p$

于是 $V = K_p + K_q$.

设 $\vec{w} \in K_p \cap K_q$

由 $(*)$ $\vec{w} = a(\mathcal{A}) \circ p(\mathcal{A})(\vec{w}) + b(\mathcal{A}) \circ q(\mathcal{A})(\vec{w})$

$= \vec{0}$

由此可知 $V = K_p \oplus K_q$

(ii) 由命题5.2 (i) K_q 是 $p(A)$-子空间

令 $B = p(A)|_{K_q}$. 则 $B \in \mathcal{L}(K_q)$

要证 B 是双射，只要证 B 是单射即可. 换言之，只要证 $\ker(B)=\{\vec{0}\}$

设 $\vec{v} \in \ker(B)$ 则 $p(A)(\vec{v})=\vec{0}$

$$\Rightarrow a(A)\circ p(A)(\vec{v})=\vec{0}$$

由 (**) $\quad \vec{v} = -b(A)\circ q(A)(\vec{v})$

$\because \vec{v} \in K_q \quad \therefore q(A)(\vec{v})=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}$

(iii) 设 $A_p = A|_{K_p}$ 和 $A_q = A|_{K_q}$.

因为 $K_p = \ker(p(A))$ 所以

$\forall \vec{v} \in K_p \quad p(A)(\vec{v}) = p(A_p)(\vec{v})=\vec{0}$

于是 $p(t)$ 零化 A_p. 由 ~~命题~~ 定理22

(i) 可知 $\mu_{A_p} \mid p$

同理 $\quad \mu_{A_q} \mid q$

$\because \gcd(p,q)=1 \quad \therefore \gcd(\mu_{A_p}, \mu_{A_q})=1$ 9

$\mu_A = \mathrm{lcm}(\mu_{A_p}, \mu_{A_q})$ (命题5.3(iii))

$= \mu_{A_p}\cdot\mu_{A_q}$ (引理6.2(四))

$= pq$ (引理假设)

$\Rightarrow \mu_{A_p} = p$ 且 $\mu_{A_q} = q$ $\boxtimes$

§6.2 广义特征子空间分解

定义：设 $A \in \mathcal{L}(V)$，μ_A 在 $F[t]$ 中的不可约因式分解为

$$\mu_A = p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$$

其中 $p_1,\dots,p_s \in F[t]\setminus F$，首一，不可约，两两互素，$m_1,\dots,m_s \in \mathbb{Z}^+$

则 $\ker(p_i^{m_i}(A))$ 称为 A 关于因子 p_i 的广义子空间，记为 $V(p_i)$.

注：$V(p_i)$ 是 A 子空间 (命题5.2)

注：书中定义的根子空间是广义子空间的特殊情形，我们将在今后说明

定理 6.1 利用上述定义中的记号，我们有

$$V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_s)$$

且 (i) $p_i^{m_i}$ 是 $A|_{V(p_i)}$ 的极小多项式

(ii) $p_i(A)$ 在 $\boxed{V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_{i-1}) \oplus V(p_{i+1}) \oplus \cdots \oplus V(p_s)}$ 上的可逆的

证：对 s 归纳。当 $s=1$ 时，$\mu_A = p_1^{m_1}$

$$V(p_1) = \ker(p_1^{m_1}(A)) = \ker(\mu_A(A))$$
$$= \ker(O) = V.$$

性质 (i) 和 (ii) 自然满足.

设 $s>1$ 且定理对 $s-1$ 成立.

令 $p = p_1^{m_1} \cdots p_{s-1}^{m_{s-1}}$，$q = p_s^{m_s}$ 由引理 6.1(i)

$\gcd(p, q) = 1$. 由引理 6.3

$$V = U \oplus V_{p_s}$$

其中 $U = \ker(p(A))$ 且 $A|_U$ 上的极小多项式是 p，$p_s(A)|_U$ 是双射

令 $A_U = A|_U$ 对 A_U，p 和 U 用归纳假设

得到 $U = U(p_1) \oplus \cdots \oplus U(p_{s-1})$

其中 $U(p_j) = \ker(p_j^{m_j}(A_U))$

A_U 限制在 U_j 上的极小多项式是 $p_j^{m_j}$，$j = 1, \ldots s-1$

下面验证：$U_j = V(p_j)$，$j = 1, \ldots s-1$

不妨只验证 $U_1 = V(p_1)$.

由 U_1 和 $V(p_1)$ 的定义可知，$U_1 \subset V(p_1)$

$\because V = U \oplus V(p_s)$

设 $\vec{v} \in V(p_1)$

$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v_s}$，其中 $\vec{u} \in U$，$\vec{v_s} \in V(p_s)$

$$p_s^{m_s}(A)(\vec{v}) = p_s^{m_s}(A)(\vec{u}) + p_s^{m}(A)(\vec{v_s})$$
$$= p_s^{m_s}(A)(\vec{u})$$

$\because p_s(A)$ 在 U 上可逆 $\therefore p_s^{m}(A)$ 在 U 上可逆. 又 $\vec{v}, \vec{u} \in U$

于是 $\vec{v} = \vec{u} \Rightarrow \vec{u} \in U(p_1)$
$\Rightarrow V(p_1) = U(p_1)$.

见最后页

于是

$V = V(p_1) \oplus \cdots \oplus V(p_{s-1}) \oplus V(p_s)$

令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V(p_i)}$ $i=1,\dots s$

则 $\mathcal{A}_j$ 是 $\mathcal{A}$ 限制在 $V(p_j)$ 上, $j=1,\dots s-1$

于是 $\mu_{\mathcal{A}_j} = p_j^{m_j}(\mathcal{A})$, $j=1,\dots s-1$.

因 $p_s(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_{s-1})$ 上可逆

适当调整下标后可知. $\forall k \in \{1,\dots,s\}$

$p_k(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_{k-1})\oplus V(p_{k+1})\oplus\cdots\oplus V(p_s)$

$\boxed{}$

上可逆

推论 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 $\mathcal{A}$ 可对角化

$\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t) = (t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_m)$

其中 $\alpha_1,\dots\alpha_m \in F$. 两两不同

证: "$\Rightarrow$" 设 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组基

且 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

则 $\mu_{\mathcal{A}} = \mu_A = \mathrm{lcm}(t-\alpha_1,\dots t-\alpha_n)$ (命题33)

$= (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_m)$

其中 $\lambda_1,\dots\lambda_m$ 是 $\alpha_1,\dots\alpha_n$ 中互不相同的元素

"$\Leftarrow$" 由定理 6.1

$V = V(t-\alpha_1)\oplus\cdots\oplus V(t-\alpha_m)$

令 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|_{V(t-\alpha_i)}$, $i=1,\dots,m$.

因 $\mu_{\mathcal{A}_i} = t-\alpha_i$. 则

$\mathcal{A}_i - \alpha_i \mathcal{E}_i = 0$ 其中 $\mathcal{E}_i$ 是 $V(t-\alpha_i)$ 的恒同算子. 令 $V(t-\alpha_i)$ 的基是

$\vec{\varepsilon}_{i1},\dots,\vec{\varepsilon}_{id_i}$, 则 $\mathcal{A}_i$ 在该基下

的矩阵为 $\alpha_i E_{d_i}$. 由定理 3.2

$\mathcal{A}$ 的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 E_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m E_{d_m} \end{pmatrix}$$

$\boxed{}$

例：设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$. 证明

$\mathcal{A}$ 可对角化

证：设 $p(t)=t^2-t$. 则 $p(\mathcal{A})=0$

于是 $\mu_{\mathcal{A}} \mid p(t)=t(t-1)$

$\mu_{\mathcal{A}}$ 只可能是 t, $t-1$, $t(t-1)$

由推论 6.1. $\mathcal{A}$ 可对角化.

更正. 另证 $V(p_i)=U(p_i)$, $i=1,\dots,s$.

只要验证: $V(p_1)=U(p_1)$

我们有 $V=U\oplus V(p_s^{m_s})$

$U(p_1)=\{\vec{u}\in U \mid p_1^{m_1}(\mathcal{A}|_U)(\vec{u})=\vec{0}\}$

$V(p_1)=\{\vec{v}\in V \mid p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}\}$

$s\neq 1$

由 $U(p_1)$ 和 $V(p_1)$ 的定义

$U(p_1)\subset V(p_1)$ 中

设 $\vec{v}\in V(p_1)$.

则 $\exists!$ $\vec{u}\in U$, $\vec{v_s}\in V(p_s)$ 使得

$\vec{v}=\vec{u}+\vec{v_s}$ (**)

$p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{v})=p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{u})+p_s^{m_s}(\vec{v_s})$

$p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{v})=p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{u})$

$p_1^{m_1}(\mathcal{A})\circ p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{v})=p_1^{m_1}(\mathcal{A})\circ p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{u})$

$p_s^{m_s}(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{v})=p_s^{m_s}(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u})$

$\parallel$

$\vec{0}$ ($\vec{v}$ 的定义)

于是 $p_s^{m_s}(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u})=\vec{0}$

∵ $p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u})\in U$ 且 $p_s^{m_s}(\mathcal{A})|_U$ 可逆

∴ $p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u})=\vec{0}\Rightarrow \vec{u}\in U(p_1)$

∴ $\vec{u}\in V(p_1)$

由 (**) $\vec{v_s}\in V(p_1)$

$\because \gcd(p_1^{m_1}, p_s^{m_s}) = 1$

$\therefore \exists\, f, g \in F[\lambda]$ s.t

$f p_1^{m_1} + g\, p_s^{m_s} = 1$

$f(A) p_1^{m_1}(A) + g(A) p_s^{m_s}(A) = E$

$(***)$ $f(A) p_1^{m}(A)(\vec{v_s}) + g(A) p_s^{m_s}(A)(\vec{v_s}) = \vec{v_s}$

$\because \vec{v_s} \in V(p_1) \cap V(p_s)$

由 $(***)$ ~~和~~ $\vec{v_s} = \vec{0}$

由 $(**)$ $\vec{v} = \vec{u} \in U(p_1)$. 验证完