更正：$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. $\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$

其中 $p_1,\dots,p_s\in F[t]\setminus F$. 首一，不可约

且两两互素，$m_1,\dots,m_s\in\mathbb{Z}^+$

证明：$V=V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_s)$

其中 $V(p_i)=\ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$.

证：对 s 归纳．当 $s=1$ 时

$$\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}$$

$$\cancel{V(p_1^{m_1}(\mathcal{A}))=V(\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}))=\ker(0)}$$

$$V(p_1)=\ker(p_1^{m_1}(\mathcal{A}))=\ker(\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}))$$
$$=\ker(0)=V$$

设 $s>1$ 且定理对 $s-1$ 成立

令 $p=p_1^{m_1}\cdots p_{s-1}^{m_{s-1}}$，$q=p_s^{m_s}$ 则

$$\gcd(p,q)=1$$

由引理 6.3 $V=U\oplus V(p_s)$

其中 $U=\ker(p(\mathcal{A}))$. 令 $\mathcal{A}_U=\mathcal{A}|_U$

由引理 6.3 $\mathcal{A}_U$ 的极小多项式是 p

且 $q(\mathcal{A})|_U$ 是可逆的

由归纳假设

$$U=U(p_1)\oplus\cdots\oplus U(p_{s-1})$$

其中 $U(p_i)=\ker(p_j^{m_j}(\mathcal{A}_U))$, $j=1,2,\dots,s-1$

下面验证

$$U(p_j)=V(p_j),\quad j=1,\dots,s-1$$

不妨只验证

$$U(p_1)=V(p_1)$$

由定义可知 $U(p_1)\subset V(p_1)$

反之 设 $\vec{v}\in V(p_1)$. $\because V=U\oplus V(p_s)$

$\therefore \exists\, \vec{u}\in U$, $\vec{v_s}\in V(p_s)$ 使得

$$\vec{v}=\vec{u}+\vec{v_s}$$

$$p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{v})=p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{u})+p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{v_s})$$

$$p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{v})=p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{u})$$

[不能直接得出 $\vec{v}=\vec{u}$！]

②

$p_1^{m_1}(\mathcal{A})\circ p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{v}) = p_1^{m_1}(\mathcal{A})\circ p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{u})$

$p_s^{m_s}(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{v}) = p_s^{m_s}(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u})$

$\because$ $\vec{v}\in V(p_1)$ $\therefore$ $p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$

于是 $p_s^{m_s}(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u})=\vec{0}$

$\because$ $p_s^{m_s}(\mathcal{A})|_U$ 可逆

$\therefore$ $p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{u})=\vec{0} \Rightarrow \vec{u}\in U(p_1)$

$\because$ $\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}_s$, $\vec{v}\in V(p_1)$, $\vec{u}\in U(p_1)$

且 $U(p_1)\subset V(p_1)$

$\therefore$ $\vec{v}_s\in V(p_1)$

$\because$ $1\neq s$ $\therefore$ $\gcd(p_1, p_s)=1$

$\therefore$ $\gcd(p_1^{m_1}, p_s^{m_s})=1$

$\therefore$ $\exists\, a, b\in F[t]$ 使得

$a(t)p_1^{m_1}(t)+b(t)p_s^{m_s}(t)=1$,

$a(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})+b(\mathcal{A})\circ p_s^{m_s}(\mathcal{A})=\mathcal{E}$.

$a(\mathcal{A})\circ p_1^{m_1}(\mathcal{A})(\vec{v}_s)+b(\mathcal{A})\circ p_s^{m_s}(\mathcal{A})(\vec{v}_s)=\vec{v}_s$

$\therefore$ $\vec{v}_s\in V(p_1)\cap V(p_s)$

$\therefore$ 上式综合看 $\vec{v}_s=\vec{0}$，即 $\vec{v}=\vec{u}\in U(p_1)$

以而 $V(p_1)=U(p_1)$

于是 $V(p_j)=U(p_j)$, $j=1,2,\dots,s-1$

$V=V(p_1)\oplus\cdots\oplus V(p_{s-1})\oplus V(p_s)$.

推论6.1 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 可对角化

$\Leftrightarrow$ $\mu_{\mathcal{A}}=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_s)$，其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_s\in F$，两两不同

推论6.2 设 $A\in M_n(F)$ 则 A 可对角化

$\Leftrightarrow$ $\mu_A=(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_s)$，其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_s\in F$，两两不同

证：把A看成线性变换，然后用推论6.1

例 设 $A\in M_n(F)$ 满足 $A^2=E$. 问 A 能不能对角化.

解：设 $p(t)=t^2-1$. 则 $p(A)=A^2-E=O$

于是 $\mu_A \mid p$. 即

$\mu_A=t+1$ 或 $\mu_A=t+1$. 或 $\mu_A=(t-1)(t+1)$

当 $\mu_A=t\pm 1$ 时 $A=\pm E$ 显然可对角化

当 $\mu_A=(t+1)(t-1)$ 且 $1\neq -1$ 时. 由推论6.2

A 可对角化

当 ~~$\mu_A=$~~ $\mathrm{char}(F)=2$, 且 $\mu_A=(t-1)^2$ 时

A 不能对角化 (推论6.2)

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ 不能对角化

例：$\mathcal{A}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

求 $\mathbb{R}^3$ 关于 $\mathcal{A}$ 的广义特征子空间分解

$\mu_{\mathcal{A}} = t^3-4t^2+5t-2$

[Minimal Polynomial (μA)]

$\mu_{\mathcal{A}} = (t-2)(t-1)^2$

[Factor (μA)]

$V(t-2) = \ker(\mathcal{A}-2\mathcal{E}) = (A-2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解空间

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$V((t-1)^2) = \ker((\mathcal{A}-\mathcal{E})^2) = (A-E)^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的解空间

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathcal{A}$ 在 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 下的矩阵 $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

§6.3 循环子空间的分解

回忆：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{v} \in V$

$F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} = \langle \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \cdots \rangle$

称为由 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 生成的循环子空间，简称

$\mathcal{A}$－循环子空间

基本性质 (命题5.3)

(i) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$－子空间，

(ii) 如果 $d = \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$，则
$\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]$ 的基

(iii) 如果 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 线性无关
但 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \cdots \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v}), \mathcal{A}^{d}(\vec{v})$ 线性相关
则 $d = \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

(iv) $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} = \{ p(\mathcal{A})(\vec{v}) \mid p \in F[t] \}$

定理 6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，则 $\exists \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k \in V$
使得 $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1 \oplus \cdots \oplus F[\mathcal{A}]\vec{v}_k$

证：设 $n = \dim V$，对 n 归纳
当 $n=1$ 时 令 $\vec{v} \in V \setminus \{0\}$
则 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v} = V$，定理成立

设 $n>1$ 且 $\dim V < n$ 时定理成立
如果存在 $\vec{w} \in V$，使得 $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$
则定理成立

设 V 不是 $\mathcal{A}$-循环的，令 m 是
V 中所有 $\mathcal{A}$-循环子空间的维数
的最大值，则 $\exists\, \vec{w} \in V$，使得
$\dim(F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) = m$ 且 $m < n$

我们将构造 $\mathcal{A}$-子空间 U 使得
$$V = (F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}) \oplus U$$
然后对 $\mathcal{A}|_{\cancel{F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}},\ \cancel{F[\mathcal{A}]\vec{w}}}$ 和 $\mathcal{A}|_U$, U
分别用归纳假设.

由命题 5.3
$\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots, \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}$ 的基
将其扩充为 V 的一组基
$\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots, \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}), \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots \vec{\varepsilon}_n$
由第一周章定理 8.1 [也见该定理后面的推论]
$\exists\, f \in V^*$ 使得
$f(\vec{w}) = f(\mathcal{A}(\vec{w})) = \cdots = f(\mathcal{A}^{m-2}(\vec{w})) = 0$
$f(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})) = 1$
$f(\vec{\varepsilon}_{m+1}) = \cdots = f(\vec{\varepsilon}_n) = 0$

注 当 $m=1$ 时 $f(\vec{w}) = 1$，$f(\vec{\varepsilon}_2) = \cdots = f(\vec{\varepsilon}_n) = 0$

定义：$\varphi: V \longrightarrow F^m$
$$\vec{x} \longmapsto \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ f(\mathcal{A}(\vec{x})) \\ \vdots \\ f(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{x})) \end{pmatrix}$$

因为 $\mathcal{A}^i \in \mathcal{L}(V)$, $f \in V^*$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mathcal{A}^i} & V \\ & \searrow^{f\circ\mathcal{A}^i} & \downarrow f \\ & & F \end{array} \qquad f\circ\mathcal{A}^i \in V^*$$

从而 $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, F^m)$

断言1 φ 在基底 $\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \cdots \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}), \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots \vec{\varepsilon}_n$ 下的矩阵 $A \in F^{m\times n}$ ~~具~~有下列分块形式 $A = (B \,\vdots\, C)_{m\times n}$ 其中

$B \in GL_m(F)$, $C \in F^{m\times(n-m)}$

断言1的证明: $\forall i \in \{0, 1, \cdots m-1\}$

$$\varphi(\mathcal{A}^i(\vec{w})) = \begin{pmatrix} f(\mathcal{A}^i(\vec{w})) \\ f(\mathcal{A}^{i+1}(\vec{w})) \\ \vdots \\ f(\mathcal{A}^{m-2}(\vec{w})) \\ f(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})) \\ f(\mathcal{A}^{m}(\vec{w})) \\ \vdots \\ f(\mathcal{A}^{i+m-1}(\vec{w})) \end{pmatrix} - (m-i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} - m-i$$

$* \in F$

于是 A 的前 m 行 m 列子矩阵是

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ 1 & * & & * & * \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(B) = m$. 断言1成立

断言2. $\ker(\varphi)$ 是 $n-m$ 维 $\mathcal{A}$-子空间

断言2的证明: 由断言1. $\mathrm{rank}(\varphi) = m$

由线性映射维数公式

$$\dim\ker(\varphi) + \mathrm{rank}(\varphi) = n$$

$$\Rightarrow \dim\ker(\varphi) = n-m$$

设 $\vec{x} \in \ker(\varphi)$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ f(\mathcal{A}(\vec{x})) \\ \vdots \\ f(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{x})) \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathcal{A}^i(\vec{x})) = 0 \quad i = 0, 1, \cdots m-1$$

~~$\varphi(\mathcal{A}\ \mathcal{A}^m(\vec{x})$~~ 由 m 的选择可知 $\exists\, k \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{x}), \cdots \mathcal{A}^{k-1}(\vec{x})$ 是 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{x}$ 一组基. 于是 $\exists\, \alpha_0, \cdots \alpha_{k-1} \in F$

$$\mathcal{A}^m(\vec{x}) = \alpha_0\vec{x} + \alpha_1\mathcal{A}(\vec{x}) + \cdots + \alpha_{k-1}\mathcal{A}^{k-1}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow f(\mathcal{A}^m(\vec{x})) = \alpha_0 f(\vec{x}) + \alpha_1 f(\mathcal{A}(\vec{x})) + \cdots + \alpha_{k-1} f(\mathcal{A}^{k-1}(\vec{x})) = 0$$

$$\varphi(\mathcal{A}(\vec{x})) = \begin{pmatrix} f(\mathcal{A}(\vec{x})) \\ \vdots \\ f(\mathcal{A}^{m-1}(\vec{x})) \\ f(\mathcal{A}^{m}(\vec{x})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{x}) \in \ker(\varphi)$$

断言2成立

断言3 $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{w} \oplus \ker(\varphi)$

证：设 $\vec{u} \in F[\mathcal{A}]\vec{w} \cap \ker(\varphi)$

$\exists\ \beta_0, \beta_1, \dots \beta_{m-1} \in F$ 使得

$$\vec{u} = \beta_0\vec{w} + \beta_1\mathcal{A}(\vec{w}) + \dots + \beta_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}(\vec{w})$$

于是 $\vec{u}$ 在基底 $\vec{w}, \mathcal{A}(\vec{w}), \dots, \mathcal{A}^{m-1}(\vec{w}), \vec{\varepsilon}_{m+1}, \dots \vec{\varepsilon}_n$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m-n \end{matrix}$$

$\because \vec{u} \in \ker(\varphi)$ $\quad \varphi(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} n$

$$m\Big\{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (B, C)\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= B\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \end{pmatrix}$$

由断言1 $\quad B \in GL_m(F) \Rightarrow \beta_0 = \dots = \beta_{m-1} = 0$

于是 $F[\mathcal{A}]\vec{w} \cap \ker(\varphi) = \{\vec{0}\}$

$$\dim(F[\mathcal{A}]\vec{w} \oplus \ker(\varphi)) = m + n - m \quad \leftarrow 断言2$$
$$= n$$

断言3成立

令 $W = F[\mathcal{A}]\vec{w}$，$K = \ker(\varphi)$

由断言3. $V = W \oplus K$

由 m 的选取. $0 < \dim W < n \Rightarrow 0 < \dim K < n$

由断言2. K 是 $\mathcal{A}$-子空间

对 $\mathcal{A}|_K$, K 用归纳假设得

K 是若干个 K 中 $\mathcal{A}|_K$ 循环子空间的直和. 而它们~~也~~都是 $\mathcal{A}$-循环的 $\boxed{}$

推论 6.3 (Cayley-Hamilton 定理的加强版)

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. (i) $\cancel{\chi_{\mathcal{A}}\ 零化}$ $\mu_{\mathcal{A}} \mid \chi_{\mathcal{A}}$

(ii) 设 p 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的一个不可约因子. 则

$$p \mid \mu_{\mathcal{A}}$$

证：由定理 6.2

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$$

其中 $U_1, \dots, U_k$ 是非零 $\mathcal{A}$-循环的

设 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}|U_i$，$i=1,\dots,k$

$\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_1}, \dots, \mu_{\mathcal{A}_k})$

$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}_1} \cdots \chi_{\mathcal{A}_k}$

由引理 5.4 $\mu_{\mathcal{A}_i} = \chi_{\mathcal{A}_i}$，$i=1,\dots,k$

$\Rightarrow \mu_{\mathcal{A}} \mid \chi_{\mathcal{A}}$ (i) 成立

设 p 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的一个不可约因子．则 ~~$p \mid \mu_{\mathcal{A}}$~~ $\exists i \in \{1,\dots,k\}$ 使得

$p \mid \chi_{\mathcal{A}_i} = \mu_{\mathcal{A}_i} \Rightarrow p \mid \mu_{\mathcal{A}}$．$\boxed{}$

推论 6.4 设 $F=\mathbb{C}$，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$

则 (i) $\chi_{\mathcal{A}}$ 的根与 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的根相同 (~~不计重数~~)

(ii) $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Longleftrightarrow \gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}') = 1$

证：由代数学基本定理

$\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdots (t-\lambda_s)^{m_s}$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$，两两不同，$m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}^+$

由推论 6.3

$\chi_{\mathcal{A}} = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_s)^{n_s}$

其中 $n_1 \geqslant m_1, \dots, n_s \geqslant m_s$

于是 (i) 成立

由推论 6.~~4~~．$\mathcal{A}$ 可对角化

$\Longleftrightarrow m_1 = \cdots = m_s = 1 \Longleftrightarrow \gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}') = 1$

~~乙 本学期第一次习题课~~

$\boxed{}$

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$

问 A 是否相似于对角矩阵？

解 $\mu_A = t^4 - 18t^3 - 34t^2 + 64t + 512$

~~验算是否~~ 容易验证 $\gcd(\mu_A, \mu_A') = 1$．

§6.4 ~~根子空间~~ 分解

设 $F = \mathbb{C}$，$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$

$\mathcal{A}$ 关于 λ 的根子空间是

$\{\vec{v} \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} \ (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$

记作 $V(\lambda)$

引理6.4 利用上述定义中的记号

则 $(t-\lambda) \mid \mu_A$ 且 $V(t-\lambda)=V(\lambda)$

证：由推论6.4 $(t-\lambda)\mid\mu_A$ 于是

$V(t-\lambda)$ 有定义. 设 $(t-\lambda)$ 在

μ_A 中的重数为 m. 则

$V(t-\lambda) = \ker((A-\lambda\mathcal{E})^m)$

$= \{\vec{v}\in V \mid (A-\lambda\mathcal{E})^m(\vec{v})=\vec{0}\}$

$\subset V(\lambda)$.

反之 设 $\vec{v}\in V(\lambda)$. 则 $\exists k\in\mathbb{N}$ 使得 $(A-\lambda\mathcal{E})^k(\vec{v})=\vec{0}$

设 $\mu_A=(t-\lambda)^m g(t)$, 其中 $g\in F[t]$

由 m 的定义可知 $\gcd(t-\lambda, g)=1$.

从而 $\gcd((t-\lambda)^k, g)=1$

$\exists a, b\in F[t]$. 使得

$a(t)(t-\lambda)^k + b(t)g(t) = 1$

$a(A)(A-\lambda\mathcal{E})^k + b(A)g(A) = \mathcal{E}$

$a(A)(A-\lambda\mathcal{E})^k(\vec{v}) + b(A)g(A)(\vec{v}) = \vec{v}$

$b(A)g(A)(\vec{v}) = \vec{v}$

$b(A)\underbrace{(A-\lambda\mathcal{E})^m g(A)}_{\mu_A(A)=0}(\vec{v}) = (A-\lambda\mathcal{E})^m(\vec{v})$

$\Rightarrow (A-\lambda\mathcal{E})^m(\vec{v})=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}\in V(t-\lambda)$.

注 由引理6.4和定理6.1 可直接证明 教科书中根子空间分解定理 (P72, 定理3)

在不假设 $F=\mathbb{C}$ 或代数闭域的条件

我们还证明了

P68 (哈密顿—凯莱定理) (Cayley—Hamilton定理 推论6.4(i))

P69 推论 (推论6.4(ii))

P74 等式(7) (定理6.3)

§6.5 循环子空间的进一步的性质

P56. 习题9(ii)

设 $A\in\mathcal{L}(V)$. 则 $\exists\vec{v}\in V$, 使得

$\mu_{A,\vec{v}}=\mu_A$

[习题课将证明]

命题6.1 设 $A\in\mathcal{L}(V)$. 则

V 是 A-循环的 $\Leftrightarrow \deg(\mu_A)=\dim V$

证："$\Rightarrow$" 引理5.4

"$\Leftarrow$" 设 $\deg \mu_A = \dim V =: n$. 由 P56 习题9(ii)

$\exists\, \vec{v} \in V$ 使得 $\quad \mu_{A,\vec{v}} = \mu_A$

$\Rightarrow \deg \mu_{A,\vec{v}} = \dim V$

$\Rightarrow \dim F[A]\cdot\vec{v} = \dim V \quad$ [命题5.4]

$\Rightarrow F[A]\cdot\vec{v} = V$

$\square$

例: $A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

证明 $\mathbb{R}^3$ 是 A-循环的 且求 $\vec{v}$ 使得

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}[A]\cdot\vec{v}$$

(称 $\vec{v}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 关于 A 的循环向量)

证: 由前例 $\mu_A = t^3 - 4t^2 + 5t - 2$

$\deg \mu_A = 3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ 是 A-循环的

设 $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ 是循环向量

即 $\vec{v}, A(\vec{v}), A^2(\vec{v})$ 线性无关 (命题5.3)

即 $\operatorname{rank}\Big(\underbrace{\big(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, A^2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\big)}_{B}\Big) = 3$

$$B = \begin{pmatrix} v_1 & v_1+v_3 & v_1+3v_3 \\ v_2 & v_1+v_2-v_3 & 2v_1+v_2-2v_3 \\ v_3 & 2v_3 & 4v_3 \end{pmatrix}$$

$v_3 = 1 \quad B = \begin{pmatrix} v_1 & v_1+1 & v_1+3 \\ v_2 & v_1+v_2-1 & 2v_1+v_2-2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$v_1 = 0 \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ v_2 & v_2-1 & v_2-2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$v_2 = 0 \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \operatorname{rank}(B) = 3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是一个循环向量.

命题 6.2 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 且 V 是 A-循环的

设 $\mu_A = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_0$

$\vec{v}$ 是 V 关于 A 的循环向量

则 A 在基底 $\vec{v}, A(\vec{v}), \dots, A^{n-1}(\vec{v})$

下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

证：由命题5.3 和 命题6.1

$\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$

是 V 的一组基 $\forall i \in \{0, 1, \dots n-2\}$

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^i(\vec{v})) = \mathcal{A}^{i+1}(\vec{v}) \quad -①$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})) = \mathcal{A}^n(\vec{v})$$

$$= (-\alpha_{n-1}\mathcal{A}^{n-1} - \dots - \alpha_1 \mathcal{A} - \alpha_0 \mathcal{E})(\vec{v})$$

$$= -\alpha_0 \vec{v} - \alpha_1 \vec{v} - \dots - \alpha_{n-1} \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v}) \quad -②$$

由 ①

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^i(\vec{v})) = (\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})) \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i+2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})) = (\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})) \begin{pmatrix} -\alpha_0 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 命题成立.

例 在上例中 $\mathcal{A}$ 在基底 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{A}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}^2(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 下

的矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

§6.3 $\mathcal{A}$-不可分子空间

定义：设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$U \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

如果 U 不能写成两个维数为正的 $\mathcal{A}$-子空间的直和，则称 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的 (indecomposable)。否则称为 $\mathcal{A}$-可分的

定理6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，则 V 是有限个 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和

证：设 $n = \dim V$，对 n 归纳。

$n=1$. V 是 $\mathcal{A}$-不可分的

设 $n>1$ 且当 $\dim V < n$ 时 定理成立

如果 V 是 $\mathcal{A}$ 不可分的，则 定理成立

否则 $V = U \oplus W$，其中

U, W 是 $\mathcal{A}$-子空间

$\dim U < n$，$\dim W < n$

对 U, $\mathcal{A}|_U$ 和 W, $\mathcal{A}|_W$ 用归纳假设即可. ☒

命题6.3. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 则 V 是 $\mathcal{A}$ 不可分的

$\Longleftrightarrow$ (i) $\mu_{\mathcal{A}}$ 是F上某个不可约多项式的幂次

(ii) V 是 $\mathcal{A}$-循环的.

证: $\Rightarrow$ 若 $\mu_{\mathcal{A}}$ 不是某个不可约多项式的幂次. 则 $\exists\, p, q\in F[t]\setminus F$ 使得

$\mu_{\mathcal{A}} = p^m q$ 且 $\gcd(p,q)=1$, 其中p不可约

则 $\gcd(p^m, q)=1$. 由引理6.3. $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{A}$-可分的. $\rightarrow\leftarrow$

若 V 不是 $\mathcal{A}$-循环的. 由定理6.3

V 是若干个 $\mathcal{A}$-循环子空间的直和

V 是 $\mathcal{A}$-可分的 $\longrightarrow\longleftarrow$

$\Leftarrow$ 设 $\mu_{\mathcal{A}}=p^m$ 其中 $p\in F[t]$ 不可约

$\because V$ 是 $\mathcal{A}$-循环的

$\therefore \dim V = \deg p^m$ (命题6.1)

设 $V=U\oplus W$ 其中 U, W 是 $\mathcal{A}$ 子空间

设 $\mathcal{A}_U=\mathcal{A}|_U$. $\mathcal{A}_W=\mathcal{A}|_W$. 则

由 $\mu_{\mathcal{A}_U}\mid\mu_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mu_{\mathcal{A}_U}=p^k$. $k\in\mathbb{Z}^+$

同理 $\mu_{\mathcal{A}_W}=p^l$ $\quad l\in\mathbb{Z}^+$

$\mu_{\mathcal{A}} = \mathrm{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_U}, \mu_{\mathcal{A}_W}) = p^{\max(l,k)} = p^m$

于是 $m=k$ 或 $m=l$. 不妨设 $m=k$. 则 $\boxed{\deg p^m \le \dim U}$

$\mu_{\mathcal{A}|_U} = p^m = \mu_{\mathcal{A}}$

$\therefore \dim V = \deg\mu_{\mathcal{A}} \le \dim U$ [习题论文4]

$\Rightarrow V=U \Rightarrow W=\{\vec{0}\} \Rightarrow V$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的

例: $\mathcal{A}$ 如上例

$\mu_{\mathcal{A}}=(t-2)(t-1)^2 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ 是 $\mathcal{A}$ 可分的

$\mathbb{R}^3 = V(t-2)\oplus V((t-1)^2)$

$\mathcal{A}|_{V(t-2)}$ 的极小多项式 $t-2$

$\mathcal{A}|_{V((t-1)^2)}$ 的极小多项式是 $(t-1)^2$

再由 $\dim V(t-2)=1$, $\dim V((t-1)^2)=2$

$\Rightarrow V(t-2)$ 和 $V((t-1)^2)$ 都是 $\mathcal{A}$ 不可分的

定理6.4 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$. 则

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$$

其中 V_i 既是 $\mathcal{A}$-不可分的, 也是 $\mathcal{A}$-循环的. 特别地 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 的极小多项式是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次

证: 定理6.3 和 命题6.3 直接推论

命题6.4 (复 Jordan 块的存在性)

设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $F=\mathbb{C}$, 如果 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的. 则存在 V 的一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}, \quad \lambda\in\mathbb{C}$$

[称之为关于 λ 的 n 阶 Jordan 块]

证: 由命题 6.3 和代数学基本定理

$$\mu_{\mathcal{A}} = (t-\lambda)^n$$

且 $V = F[\mathcal{A}]\vec{v}$

令 $\vec{e}_i = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v})$ $i=1,2,\cdots n$

先验证: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基

只需验证 $\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n=\vec{0}$

$\Rightarrow \alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ 即可

由 $\vec{e}_i$ 的定义

$\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\cdots+\alpha_n\vec{e}_n=\vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v})=\vec{0}$

令 $f(t)=\sum_{i=1}^n \alpha_i (t-\lambda)^{n-i} \in \mathbb{C}[t]$

$\deg(f)\le n-1$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v})=\vec{0} \Rightarrow f(\mathcal{A})(\vec{v})=\vec{0}$

$\Rightarrow \forall j\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ $f(\mathcal{A})(\mathcal{A}^j(\vec{v}))=\vec{0}$

$\Rightarrow f(\mathcal{A})=O$ ($\because$ $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \ldots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 是 V 的基)

于是 $\mu_{\mathcal{A}} \mid f$ $f\equiv 0 \Rightarrow \alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \mathcal{A}\circ(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v}) = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}\circ\mathcal{A}(\vec{v})$$

$$= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}\left(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E}\right)(\vec{v})$$

$$= \underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n}(\vec{v})}_{\vec{0}} + \lambda\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-1}(\vec{v})}_{\vec{e}_1}$$

$$= \lambda\vec{e}_1$$

$i>1$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_i) = \mathcal{A}\circ(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v}) = (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}\circ\mathcal{A}(\vec{v})$$

$$= (\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}\left(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}+\lambda\mathcal{E}\right)(\vec{v})$$

$$= \underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-(i-1)}(\vec{v})}_{\vec{e}_{i-1}} + \lambda\underbrace{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^{n-i}(\vec{v})}_{\vec{e}_i}$$

$$= \vec{e}_{i-1} + \lambda\vec{e}_i$$

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2), \cdots \mathcal{A}(\vec{e}_n)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_n)\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix}}_{J_n(\lambda)}$$

$\square$